Név:……………………………………
Neptun azonosító:……………………

Diszkrét matematika 2
1. zárthelyi dolgozat
2014. április 14.

1. Adottak az A, B, C, D mátrixok. Döntse el, hogy melyek szorozhatók össze, és számolja ki azt, ahol az eredménymátrix 1×3-as típusú!

$$A=\begin{pmatrix}3 & 11 & 1\\ 2 & 6 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 7 & 4\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}3 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

3×3 2×2 3×2 1×3

2. Döntse el, hogy invertálható-e az A mátrix!

$$A=\begin{pmatrix}3 & 11 & 1\\ 2 & 6 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

3. Határozza meg a B mátrix determinánsát!

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 5\\ 1 & 1 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 5 & 1\\ 3 & 7 & 8 & -1\end{pmatrix}$$

4. Előáll-e az (5,7) vektor az (1,4) és (4,1) vektorok lineáris kombinációjaként? Válaszát indokolja!

5. Alteret alkotnak-e az alábbi vektorhalmazok? Ha nem, altér, akkor röviden indokolja, hogy miért nem az! Altér esetén adja meg a dimenziószámot!
   - $\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 : x_1 = x_3\}$
   - $\{(x_1,x_2)\in R^2 : x_1,x_2 > 0\}$
   - $\{(x_1,x_2)\in R^2 : x_1 + x_2 = 2\}$

6. Határozza meg az $\underline{\mathbf{a}}$=(3,−2,1), $\underline{\mathbf{b}}$=(2,2,−2) vektorok által bezárt szöget, és a 2$\underline{\mathbf{a}}$-3$\underline{\mathbf{b}}$ vektor koordinátáit!

Megoldások:

1) A mátrixok méretei alapján elvégezhetők:

C·B, A·C, D·C, D·A

$\underbrace{3\times2\ \ 2\times2}$, $\underbrace{3\times3\ \ 3\times2}$, $\underbrace{1\times3\ \ 3\times2}$, $\underbrace{1\times3\ \ 3\times3}$

A D·A esetben kapunk 1×3-as mátrixot.

$$\begin{pmatrix}3 & 6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 11 & 1\\ 2 & 6 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & 73 & 11\end{pmatrix}$$

$3\cdot3+6\cdot2+2\cdot1=9+12+2=23$

$3\cdot11+6\cdot6+2\cdot2=33+36+4=73$

$3\cdot1+6\cdot1+2\cdot1=11$

2) Egy mátrix akkor invertálható, ha a determinánsa $\neq 0$!

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 3 & 11 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3\cdot6\cdot1 + 11\cdot1\cdot1 + 2\cdot2\cdot1 - 1\cdot6\cdot1$$

$$- 11\cdot2\cdot1 - 3\cdot2\cdot1 = 18 + 11 + 4 - 6 - 6 - 22 =$$

$$= \underline{\underline{-1}}$$

$\det(A) = -1$, nullától különböző $\Rightarrow$ <u>A invertálható</u>

3) Célszerű a 2. oszlop szerint kifejteni.

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & -1 \end{vmatrix} = \cancel{0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix}} + 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \cancel{0\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix}} + 7\cdot(-1)^{4+2}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}}_{\det|| = 0} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 6 + 80 - 75 - 8 + 4 = \underline{\underline{2}}$$

Többen az 1. sor szerint fejtették ki:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & -1 \end{vmatrix} + \cancel{0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix}} +$$

$$+ 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot1\cdot(-174) + 0 + 2\cdot1\cdot68 + 5\cdot(-1)(-8) = \underline{2}$$

Ahol:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -5+14+0-175-8-0 = -174$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0+3+70-0-7-(-2) = 68$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0+15+28-0-35-16 = -8$$

4) 3 síkbeli vektort adtam meg, így ez a vektorrendszer lineárisan függő, mert a dimenziószámnál több vektor volt.
$\Rightarrow$ A_2 $(5,7)$ vektor előáll a másik két vektor lineáris kombinációjával.

Számolással:
Feltesszük, hogy előáll:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ez α, β-ra egy lineáris egyenletrendszer.

$$\left.\begin{aligned} 5 &= \alpha + 4\beta \\ 7 &= 4\alpha + \beta \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \alpha = 5-4\beta$$

$$7 = 4(5-4\beta)+\beta = 20-16\beta+\beta = 20-15\beta$$

$$15\beta = 13$$

$$\beta = \frac{13}{15} \quad \rightarrow \alpha = 5-4\cdot\frac{13}{15} = \frac{23}{15}$$

$$(5,7) = \frac{13}{15}(1,4) + \frac{23}{15}(4,1)$$

5) a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = x_3\}$

A $x_1 = x_3$ feltétel nem zárja ki a $\underline{0}$ létezését.
Technikailag úgy kapjuk a számhármast, hogy egy síkbeli (x_1, x_2) vektor koordinátái után megismételjük az elsőt: (x_1, x_2, x_1)
Mivel a síkbeli vektorok vektorteret alkotnak, így ez az „ismétléssel gyártott" vektorhalmaz is!
2 dimenziós altér lesz, egy bázis lehet az $(1, 0, 1)$ és $(0, 1, 0)$ vektorpár.

b, c): Nem alkotnak alteret, mert nincs bennük zérusvektor és az ellentett vektorok sem tartoznak a halmazba.

6)

$$\cos\alpha = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{\|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\|}$$

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

$$\|\underline{b}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12}$$

$$(\underline{a}, \underline{b}) = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 6 - 4 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{12}} \Rightarrow \alpha = 90°$$

$$2\underline{a} - 3\underline{b} = (6, -4, 2) - (6, 6, -6) = (0, -10, 8)$$

$(-4)-6 \qquad 2-(-6)$

$$2\underline{a} = (6, -4, 2)$$

$$3\underline{b} = (6, 6, -6)$$

Többen síkbeli vektoroknak tekintették az adott $\underline{a}, \underline{b}$ vektorokat. $\underline{a} = (3 \ ; \ -2, 1)$

$\underline{b} = (2, 2 \ ; \ -2)$

Ha ezekkel jól számoltak, akkor természetesen megkapták rá a pontot.