

# Integrálközelítések.

Az

$$\mathcal{I}(f) := \int_a^b f(x) dx$$

határozott integrált szeretnénk kiszámítani, ahol  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Miért lehet szükség integrálközelítésre?

- ▶  $f$  nem elemien integrálható
- ▶  $f$  primitív függvényének felírása bonyolult
- ▶ nagyszámú integrál kiszámítására van szükségünk
- ▶  $f$  nem explicit képlettel adott, csak bizonyos pontokban ismerjük az értékét

Az  $\mathcal{I}(f)$  közelítését

$$\mathcal{I}_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

alakban keressük, ahol

$x_1, \dots, x_n$  a közelítés alappontjai, ( $x_i \in [a, b]$ ),  
 $a_1, \dots, a_n$  súlyok (melyek az  $f$  függvénytől nem függnek).

$\mathcal{I}_n(f)$ : kvadratúraképlet (szabad paraméterei:  $n, x_1, \dots, x_n,$   
 $a_1, \dots, a_n$ )

## Interpolációs kvadratúráképletek.

Tfh adottak az  $x_1, \dots, x_n$  alappontok.

Közelítsük  $f$ -et az  $x_1, \dots, x_n$ -re támaszkodó Lagrange polinomjával:

$$f(x) \approx L_{n-1}(x).$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(f) &= \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_{n-1} dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n f(x_i) \ell_i(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b \ell_i(x) dx}_{a_i} = \mathcal{I}_n(f)\end{aligned}$$

## A kvadraturaképlet hibája.

Ha  $f$   $n$ -szer folyt. diff.ható, akkor

$$f(x) = L_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega_n(x),$$

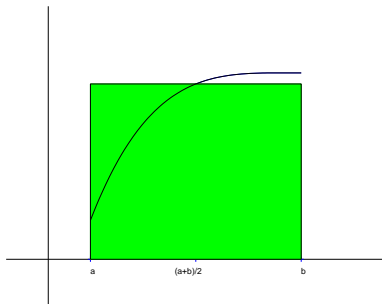
így

$$\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}_n(f) + \int_a^b \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega_n(x) dx$$

(ahol  $\xi$  függ  $x$ -től!)

# 1. Egyszerű érintőképlet.

$n = 1$ , azaz 1 alappont adott,  $x_1 := \frac{a+b}{2}$ .

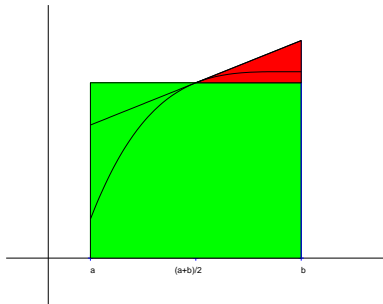


Ekkor  $f(x) \approx L_0(x) \equiv f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ,

$$\mathcal{I}_1(f) = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\mathcal{I}_1(f) = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.



### **Az egyszerű érintőképlet hibája.**

Ha  $f$  kétszer folyt.diff.ható, akkor

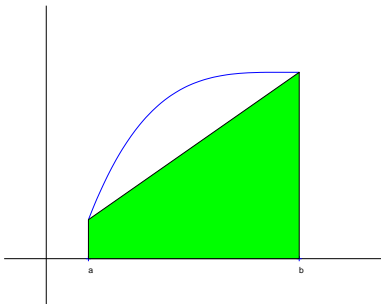
$$\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_1(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi),$$

ahol  $\xi \in [a, b]$ .



## 2. Egyszerű trapéz-képlet.

$n = 2$ , azaz 2 alappont adott:  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ .



Ekkor  $f(x) \approx L_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ , és

$$\mathcal{I}_2(f) = \int_a^b L_1(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

$$\mathcal{I}_2(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

A képlet pontos minden legfeljebb elsőfokú polinom esetén.

### **Az egyszerű trapéz-képlet hibája.**

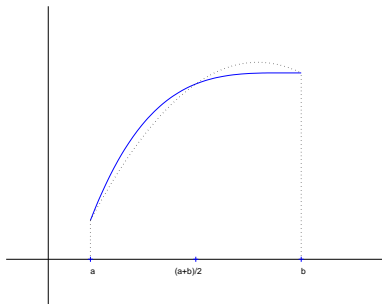
Ha  $f$  kétszer folyt.diff.ható, akkor

$$\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi),$$

ahol  $\xi \in [a, b]$ .

# Egyszerű Simpson-képlet.

$n = 3$ , azaz 3 alappont adott:  $x_1 = a$ ,  $x_2 = \frac{a+b}{2}$ ,  $x_3 = b$ .



Ekkor  $f(x) \approx L_2(x)$ , és

$$\mathcal{I}_3(f) = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

A képlet pontos minden legfeljebb harmadfokú polinom esetén.

### **Az egyszerű Simpson-képlet hibája.**

Ha  $f$  négyszer folyt.diff.ható, akkor

$$\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi),$$

ahol  $\xi \in [a, b]$ .

# Összetett képletek.

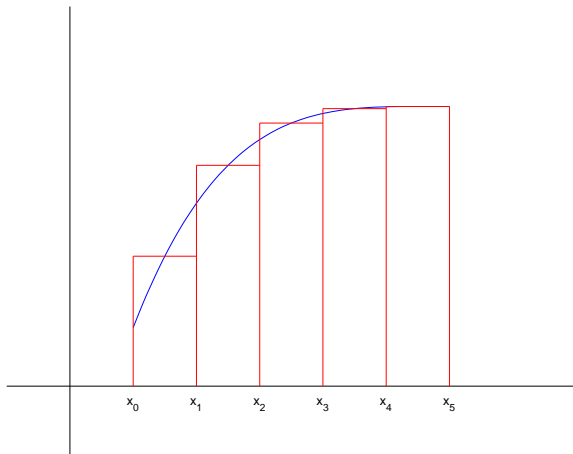
Osszuk fel az  $[a, b]$  intervallumot  $m$  egyforma hosszúságú részintervallumra:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b,$$

$$h := \frac{b - a}{m} = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Minden részintervallumon alkalmazzuk ugyanazt az egyszerű képletet.

# Összetett érintőképlet.



## Összetett érintőképlet.

$$\mathcal{I}_{m \times 1}(f) = h \left[ f \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) + f \left( x_1 + \frac{h}{2} \right) + \dots + f \left( x_{m-1} + \frac{h}{2} \right) \right]$$

azaz

$$\mathcal{I}_{m \times 1}(f) = h \sum_{i=0}^{m-1} f \left( x_i + \frac{h}{2} \right)$$

## Az összetett érintőképlet hibája.

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_{m \times 1}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24m^2} M_2,$$

ahol  $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$



## Összetett trapéz-képlet.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{m \times 2}(f) &= \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)] \\ &= h \left[ \frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2} \right].\end{aligned}$$

azaz

$$\mathcal{I}_{m \times 2}(f) = h \left[ \frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + \frac{f(x_m)}{2} \right]$$

**Az összetett trapéz-képlet hibája.**

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_{m \times 2}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2,$$

ahol  $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

## Összetett Simpson-képlet.

$$\mathcal{I}_{m \times 3} = \frac{h}{6} \left[ f(x_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + 2f(x_1) + 4f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots \right. \\ \left. + 2f(x_{m-1}) + 4f\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}\right) + f(x_m) \right].$$

azaz

$$\mathcal{I}_{m \times 3} = \frac{h}{6} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{i=0}^{m-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right]$$

**Az összetett Simpson-képlet hibája.**

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_{m \times 3}(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4,$$

ahol  $M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$

# 1. Példa. Közelítsük

$$\int_4^{5.2} \ln x dx$$

értékét összetett trapéz-képlettel úgy, hogy az intervallumot 6 részintervallumra osztjuk! Becsüljük meg a közelítés hibáját!

$$m = 6, h = (b - a)/m = 0.2$$

$$x_0 = 4, x_1 = 4.2, x_2 = 4.4,$$

$$x_3 = 4.6, x_4 = 4.8, x_5 = 5, x_6 = 5.2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{6 \times 2} &= 0.2 \left( \frac{\ln 4}{2} + \ln 4.2 + \ln 4.4 + \cdots + \ln 5 + \frac{\ln 5.2}{2} \right) \\ &= 1.82765. \end{aligned}$$

A közelítés hibája:

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{m \times 2}| \leq \frac{(b-a)^3}{12 \cdot m^2} M_2,$$

ahol  $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ .

Esetünkben  $f(x) = \ln x$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ,  $M_2 = \frac{1}{16}$ ,

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{6 \times 2}| \leq \frac{1.2^3}{12 \cdot 6^2} \cdot \frac{1}{16} = 0.00025.$$

## 2. Példa. Közelítsük

$$\int_4^{5.2} \ln x dx$$

értékét összetett Simpson-képlettel úgy, hogy az intervallumot 3 részintervallumra osztjuk! Becsüljük meg a közelítés hibáját!

$$m = 3, h = (b - a)/m = 0.4$$

$$x_0 = 4, x_1 = 4.4, x_2 = 4.8, x_3 = 5.2$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{3 \times 3} &= \frac{0.4}{6} (\ln 4 + 4 \ln 4.2 + 2 \ln 4.4 + \cdots + 4 \ln 5 + \ln 5.2) \\ &= 1.82785.\end{aligned}$$

A közelítés hibája:

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{m \times 3}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880 \cdot m^4} M_4,$$

$$\text{ahol } M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

$$\text{Esetünkben } f'''(x) = \frac{2}{x^3}, f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}, M_4 = \frac{6}{4^4} = \frac{3}{128},$$

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{3 \times 3}| \leq \frac{1.2^5}{2880 \cdot 3^4} \cdot \frac{3}{128} = 0.00000025.$$

### 3. Példa. Közelítsük

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx$$

értékét összetett trapéz-képlettel úgy, hogy a hiba kisebb legyen, mint  $0.5 \cdot 10^{-2}$ .

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{m \times 2}| \leq \frac{(b-a)^3}{12 \cdot m^2} M_2.$$

Itt  $f(x) = \ln(\cos x)$ ,  $f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$   
 $f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$ , tehát  $M_2 = 2$ .

$$\frac{(b-a)^3}{12 \cdot m^2} M_2 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{12m^2} \cdot 2$$

$m$  értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{12m^2} \cdot 2 < 0.5 \cdot 10^{-2}$$

teljesüljön:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \cdot 10^2 < m^2,$$

$$4.019 < m.$$



$m = 5$  esetén az összetett trapéz-képlet:

$$h = \frac{\pi}{20}, \quad x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{20}, x_2 = \frac{\pi}{10}, x_3 = \frac{3\pi}{20}, x_4 = \frac{\pi}{5}, x_5 = \frac{\pi}{4},$$

$$\mathcal{I}_{5 \times 2} = \frac{\pi}{20} \left( \frac{\ln(\cos x_0)}{2} + \ln(\cos x_1) + \cdots + \ln(\cos x_4) + \frac{\ln(\cos x_5)}{2} \right)$$

#### 4. Példa. Közelítsük

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx$$

értékét összetett Simpson-képlettel úgy, hogy a hiba kisebb legyen, mint  $0.5 \cdot 10^{-4}$ .

$$|\mathcal{I} - \mathcal{I}_{m \times 3}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880 \cdot m^4} M_4.$$

Mivel  $f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} = -\cos^{-2} x$ , így  $f'''(x) = -2 \cos^{-3} x \sin x$

$$f^{(4)}(x) = \left( -2 \frac{\sin x}{\cos^3 x} \right)' = -2 \frac{\cos^4 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x}$$

$$= -2 \frac{\cos^2 x + 3 \sin^2 x}{\cos^4 x} = -2 \frac{3 - 2 \cos^2 x}{\cos^4 x}$$

azaz  $M_4 = 16$

$$\frac{(b-a)^5}{2880 \cdot m^4} M_4 = \frac{\pi^5}{4^5 \cdot 2880 \cdot m^4} \cdot 16$$

$m$  értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\frac{\pi^5}{4^5 \cdot 2880 \cdot m^4} \cdot 16 < 0.5 \cdot 10^{-4}$$

teljesüljön:

$$\frac{\pi^5}{4^5 \cdot 2880} \cdot 32 \cdot 10^4 < m^4$$

$$2.4005 < m$$

## Összetett képletek konvergenciája.

Legyen  $\mathcal{I}_n(f, 0, 1)$  az  $n$  pontra épülő egyszerű képlet a  $[0, 1]$  intervallum esetén:

$$\mathcal{I}_n(f, 0, 1) = \sum_{j=1}^n a_j f(t_j).$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^m h \int_0^1 f(x_{i-1} + ht) dt \\ &\approx \sum_{i=1}^m h \sum_{j=1}^n a_j f(t_{ij}) = \sum_{j=1}^n a_j \underbrace{\sum_{i=1}^m h \cdot f(t_{ij})}_{S_m(f, a, b)} \end{aligned}$$

$S_m(f, a, b)$  egy Riemann-összeg, ha  $f$  Riemann-integrálható, akkor

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(f, a, b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Így

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{m \times n}(f) = \int_a^b f(x) dx \sum_{j=1}^n a_j$$

Ha az egyszerű képlet pontos az  $f(x) \equiv 1$  függvény esetén, akkor  $\sum_{j=1}^n a_j = 1$ , azaz

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{m \times n}(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

## Tétel.

Ha az  $n$  pontra épülő egyszerű képlet pontos a konstans függvények esetén, akkor

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{m \times n}(f) = \int_a^b f(x) dx$$

minden Riemann-integrálható  $f$  függvény esetén.