

Lagrange-interpoláció

A feladat:

Adottak az

x_0, x_1, \dots, x_n (ahol $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$) helyeken az f_0, f_1, \dots, f_n megfigyelések.

Olyan minimális fokszámú $\varphi(x)$ polinomot keresünk melyre

$$\varphi(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n$$

Állítás: Egyértelműen létezik egy olyan legfeljebb n -edfokú polinom, amely teljesíti a

$$\varphi(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n$$

illeszkedési feltételeket.

Biz.:

Legyen

$$\ell_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

azaz

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \dots, n$$

Ekkor $\ell_i(x)$ egy n -edfokú polinom és

$$\ell_i(x_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq i, \\ 1, & \text{ha } k = i \end{cases}$$

Legyen

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n f_i \ell_i(x)$$

Ekkor $\varphi(x)$ legfeljebb n -edfokú, és

$$\varphi(x_k) = \sum_{i=0}^n f_i \ell_i(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

azaz $\varphi(x)$ eleget tesz a követelményeknek.

Egyértelműség

Tfh $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ legfeljebb n -edfokú polinomok, melyekre

$$\varphi(x_i) = f_i \quad \text{és} \quad \psi(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Legyen $\Phi(x) = \varphi(x) - \psi(x)$

Ekkor Φ legfeljebb n -edfokú, és

$$\Phi(x_i) = \varphi(x_i) - \psi(x_i) = f_i - f_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

→ a $\Phi(x)$ polinomnak legalább $n + 1$ különböző gyöke van

→ $\Phi(x) \equiv 0$

A továbbiakban $\varphi(x)$ helyett $L_n(x)$:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \ell_i(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$L_n(x)$ meghatározására egy másik lehetőség: a polinomot

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$$

alakban keresve a

$$c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \cdots + c_n x_0^n = f_0$$

$$c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \cdots + c_n x_1^n = f_1$$

$$\vdots$$

$$c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \cdots + c_n x_n^n = f_n$$

lin. egyenletrendszer megoldásával meghatározzuk a c_0, c_1, \dots, c_n együtthatókat.

Newton-alak

Jelölje $N_k(x)$ az $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_k, f_k)$ adatokra illeszkedő Lagrange-polinomot.

- ▶ Csak 1 adat ismert, (x_0, f_0) :

$$N_0(x) \equiv f_0$$

- ▶ 2 adat ismert, $(x_0, f_0), (x_1, f_1)$:

$$N_1(x) = N_0(x) + b_1(x - x_0)$$

Ekkor $N_1(x_0) = N_0(x_0) = f_0$. b_1 -et úgy határozzuk meg, hogy $N_1(x_1) = f_1$ teljesüljön:

$$N_1(x_1) = f_0 + b_1(x_1 - x_0) = f_1$$

$$b_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

- 3 adat ismert, (x_0, f_0) , (x_1, f_1) , (x_2, f_2) :

$$N_2(x) = N_1(x) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Ekkor $N_2(x_0) = N_1(x_0) = f_0$ és $N_2(x_1) = N_1(x_1) = f_1$.

b_2 -t úgy határozzuk meg, hogy $N_2(x_2) = f_2$ teljesüljön:

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0} \left(\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_2 - x_0} \right)$$

- Ha $k + 1$ adat ismert, $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_k, f_k)$:

$$N_k(x) = N_{k-1}(x) + b_k \omega_k(x)$$

Ekkor

$$N_k(x_0) = N_{k-1}(x_0) = f_0,$$

$$N_k(x_1) = N_{k-1}(x_1) = f_1,$$

\vdots

$$N_k(x_{k-1}) = N_{k-1}(x_{k-1}) = f_{k-1}.$$

b_k -t úgy határozzuk meg, hogy $N_k(x_k) = f_k$ teljesüljön:

$$b_k = (f_k - N_{k-1}(x_k)) / \omega_k(x_k)$$

Osztott differenciák

Tf h adottak az x_0, x_1, \dots, x_n alappontok ($x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$) és az f_0, f_1, \dots, f_n értékek.

Az x_i, x_{i+1} pontokra támaszkodó elsőrendű osztott differencia:

$$[x_i, x_{i+1}]f := \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Az x_i, \dots, x_{i+k} pontokra támaszkodó k -adrendű osztott differencia:

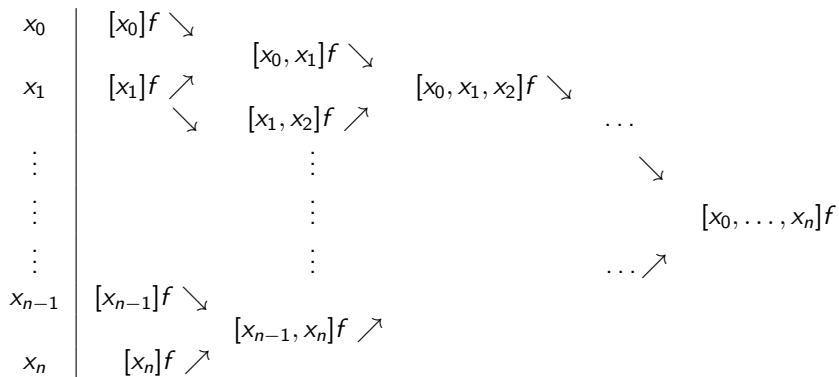
$$[x_i, \dots, x_{i+k}]f = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i}$$

Legyen $[x_i]f = f_i$.

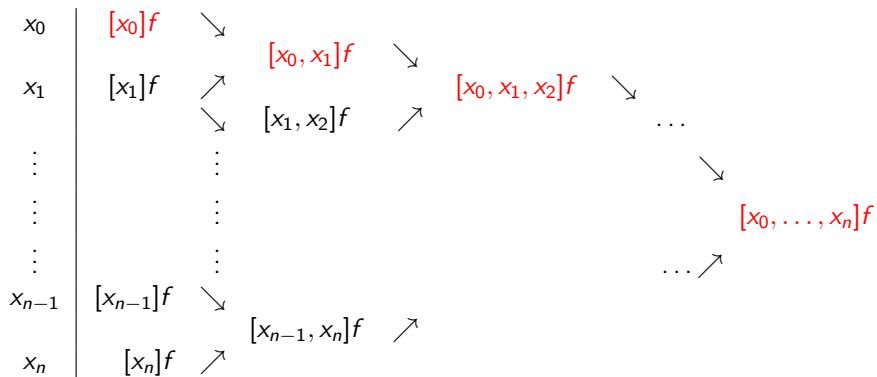
Állítás: A Lagrange polinom Newton-alakjában

$$b_k = [x_0, \dots, x_k]f$$

Számítási séma



A Lagrange-polinom Newton-alakja



$$L_n(x) = [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x - x_0)(x - x_1) \\ + \dots + [x_0, \dots, x_n]f \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2, -5)$, $(-1, 3)$, $(0, 1)$, $(2, 15)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

-2	-5			
		8		
-1	3		-5	
		-2		2
0	1		3	
		7		
2	15			

$$L_3(x) = -5 + 8(x + 2) - 5(x + 2)(x + 1) + 2(x + 2)(x + 1)x$$

Megj.:

A Lagrange-polinom nem függ az adatok sorrendjétől, így választhattuk volna a táblázat alsó “élét” is:

-2	-5			
		8		
-1	3		-5	
		-2		2
0	1		3	
		7		
2	15			

$$L_3(x) = 15 + 7(x - 2) + 3(x - 2)x + 2(x - 2)x(x + 1)$$

Mindkét esetben

$$L_3(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$$

Példa

Határozzuk meg a $(-2, -5)$, $(-1, 3)$, $(1, -5)$, $(2, -9)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & -5 & & & \\ & & 8 & & \\ -1 & 3 & & -4 & \\ & & -4 & & 1 \\ 1 & -5 & & 0 & \\ & & -4 & & \\ 2 & -9 & & & \end{array}$$

$$L_3(x) = -5 + 8(x + 2) - 4(x + 2)(x + 1) + (x + 2)(x + 1)(x - 1)$$

Határozzuk meg azt a minimális fokszámú polinomot, amely az előző adatokon kívül a $(0, 9)$ pontra is illeszkedik!

-2	-5				
		8			
-1	3		-4		
		-4		1	
1	-5		0		2
		-4		5	
2	-9		5		
		-9			
0	9				

$$L_4(x) = L_3(x) + 2(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$

Horner algoritmus

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ahol $a_n \neq 0$. Legyen $x^* \in \mathbb{R}$ adott, $p(x^*) = ?$

$$p(x^*) = (((\cdots (a_n x^* + a_{n-1}) x^* + \cdots) x^* + a_2) x^* + a_1) x^* + a_0$$

Az algoritmus:

$$c_0 = a_n$$

$$c_1 = c_0 x^* + a_{n-1}$$

$$c_2 = c_1 x^* + a_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$c_n = c_{n-1} x^* + a_0 = p(x^*)$$

Táblázatban:

	a_n	a_{n-1}	\cdots	a_2	a_1	a_0
x^*	c_0	c_1	\cdots	c_{n-2}	c_{n-1}	c_n

$$p(x^*) = c_n$$

Példa:

$$p(x) = 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 5x - 1, \quad p(-2) = ?$$

	2	3	0	-3	5	-1
-2	2	-1	2	-7	19	-39

$$p(-2) = -39$$

Általánosított Horner algoritmus

$$L_n(x) = b_0 + b_1 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \\ + \cdots + b_n \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1})$$

ahol $b_k = [x_0, \dots, x_k]f$

$$L_n(x^*) = ?$$

$$c_0 = b_n$$

$$c_1 = c_0(x^* - x_{n-1}) + b_{n-1}$$

$$c_2 = c_1(x^* - x_{n-2}) + b_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$c_n = c_{n-1}(x^* - x_0) + b_0 = L_n(x^*)$$

Az interpoláció hibája

Legyen f egy $(n+1)$ -szer folytonosan differenciálható függvény, $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Legyen $[a, b]$ az alappontok által felfeszített intervallum. Ekkor

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad x \in [a, b]$$

ahol ξ az $[a, b]$ intervallum valamely pontja (x -től függ), és

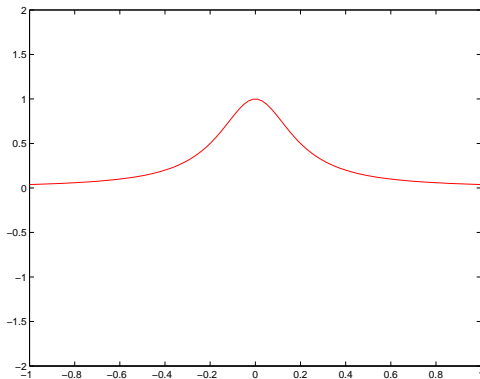
$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Ha $M_{n+1} := \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$, akkor $x \in [a, b]$ esetén

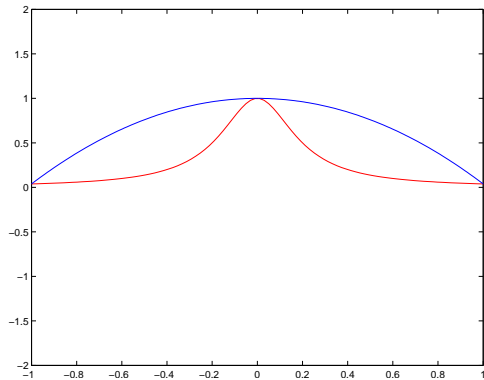
$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

Megj.: Az alappontok számának növelésével a hiba nem feltétlenül csökken, sőt akár tetszőlegesen nagyra válhat.

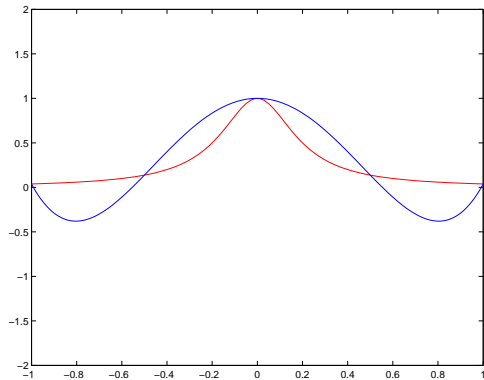
Példa: Az $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ függvény $[-1, 1]$ fölött



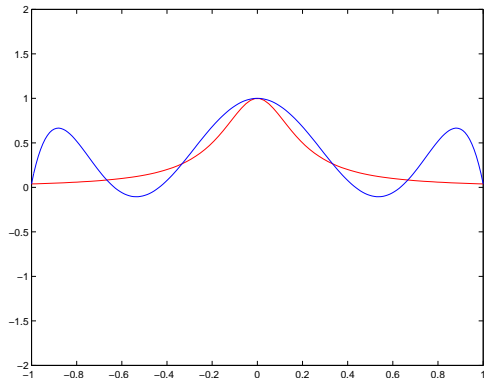
Lagrange-interpoláció, $n = 2$



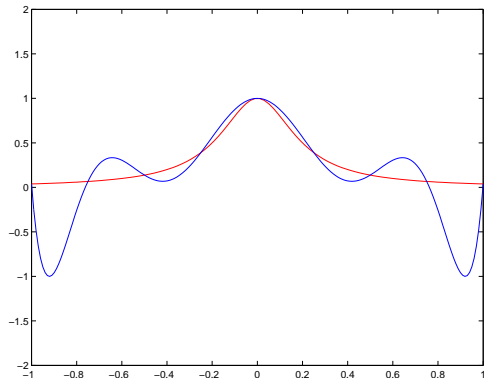
Lagrange-interpoláció, $n = 4$



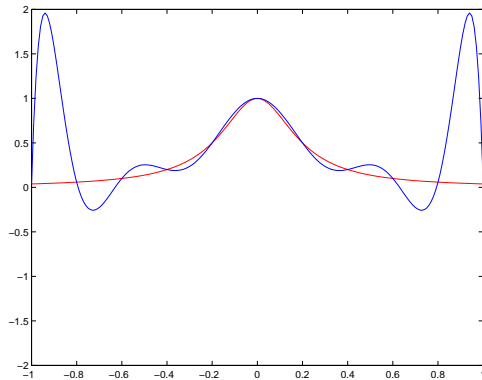
Lagrange-interpoláció, $n = 6$



Lagrange interpoláció, $n = 8$



Lagrange-interpoláció, $n = 10$



Hermite-interpoláció

A feladat:

Adottak

az	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n	alappontok ($x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$)
és az	f_{00}	f_{10}	f_{20}	\dots	f_{n0}	
	f_{01}	f_{11}	f_{21}	\dots	f_{n1}	
	f_{02}	f_{12}	f_{22}	\dots	f_{n2}	
	\vdots					
	f_{0,m_0-1}	f_{1,m_1-1}	f_{2,m_2-1}	\dots	f_{n,m_n-1}	értékek

Olyan $H(x)$ polinomot keresünk, melyre

$$H^{(j)}(x_i) = f_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m_i - 1.$$

Legyen $m = \sum_{i=0}^n m_i$, az illeszkedési feltételek száma

Állítás: Az Hermite-interpoláció feladata egyértelműen megoldható a legfeljebb $(m - 1)$ -edfokú polinomok körében.

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	-10	-2	2
$f'(x_i)$	-20	10	10
$f''(x_i)$		-16	

Az illeszkedési feltételek száma: $m = 7$, így az Hermite-polinom legfeljebb 6-odfokú lesz.

-2	-10		
		-20	
-2	-10		
-1	-2		
		10	
-1	-2		-8
		10	
-1	-2		
1	2		
		10	
1	2		

-2	-10						
		-20					
-2	-10		28				
		8		-26			
-1	-2		2		16		
		10		-10		-4	
-1	-2		-8		4		1
		10		2		-1	
-1	-2		-4		1		
		2		4			
1	2		4				
		10					
1	2						

Alkalmazások

Legyen az f valós függvény differenciálható az x_0 pontban.
Hermite-interpoláció segítségével írjuk fel az f függvény x_0 -beli érintőjének egyenletét!

Azt a $H(x)$ legfeljebb elsőfokú Hermite-polinomot keressük, melyre $H(x_0) = f(x_0)$ és $H'(x_0) = f'(x_0)$

$$\begin{array}{c|c} x_0 & f(x_0) \\ & f'(x_0) \\ x_0 & f(x_0) \end{array}$$

$$H(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ekkor

$$H(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

az f függvény x_0 körüli Taylor-polinomja.

Szakaszonkénti interpoláció

Az alappontok számának növelésével nő az illesztett polinom fokszáma, de a közelítés hibája nem feltétlenül csökken.

Egyetlen magas fokszámú polinom illesztése helyett részintervallumonként alacsonyabb fokszámú polinomok

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot m darab részintervallumra:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$$

Minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon végezzük el a Lagrange-interpolációt!

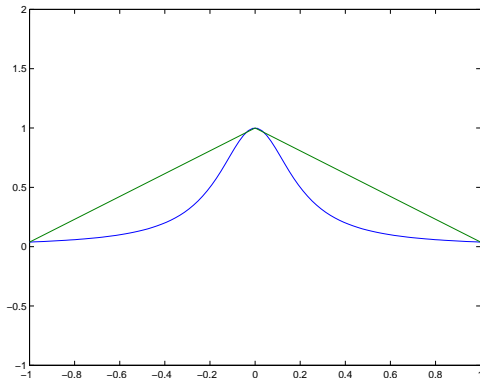
Ha az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon csak az $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ adatok ismertek, akkor **szakaszonkénti lineáris interpoláció** (töröttvonal interpoláció)

Ha $h := x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, m$, és f kétszer folyt. diff.ható $[a, b]$ -n, akkor az $L_{m \times 1}(x)$ töröttvonalra:

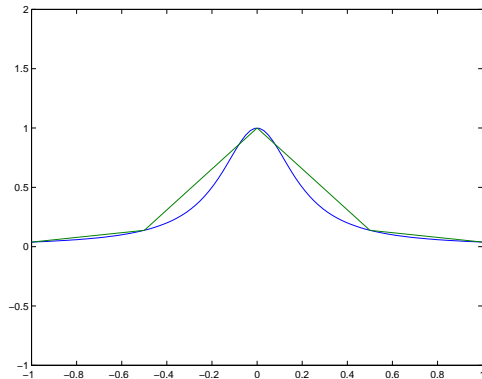
$$|f(x) - L_{m \times 1}(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2, \quad x \in [a, b]$$

Ez tart 0-hoz, ha $h \rightarrow 0$

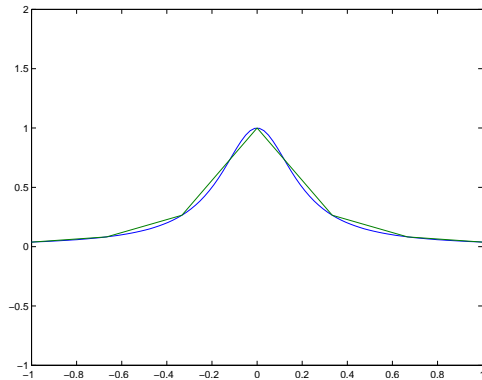
Szakaszonként lineáris interpoláció, 2 részintervallum



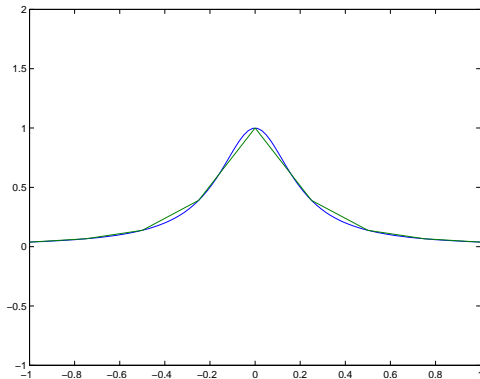
Szakaszonként lineáris interpoláció, 4 részintervallum



Szakaszonként lineáris interpoláció, 6 részintervallum



Szakaszonként lineáris interpoláció, 8 részintervallum



Szakaszonként harmadfokú Hermite-interpoláció

A töröttvonal interpolációval illesztett függvény folytonos, de az osztópontokban "törik", azaz nem diff.ható.

Sima (folyt. diff.ható) függvény illesztése: az osztópontokban előírjuk az 1. derivált értékét is.

Ekkor az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon az

$$\begin{array}{cc} x_{i-1} & x_i \\ \hline f(x_{i-1}) & f(x_i) \\ f'(x_{i-1}) & f'(x_i) \end{array}$$

adatok ismertek. 4 illeszkedési feltétel \rightarrow legfeljebb harmadfokú polinom