

Lineáris egyenletrendszerek megoldása

Példa:

$$-2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

$$-4x_1 - 10x_2 - 5x_3 = -12$$

$Ax = b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Gauss-elimináció:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -10 & -5 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \ell_{21} = -1 \\ \ell_{31} = 2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -13 & -18 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\ell_{32} = -4} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

A visszahelyettesítés:

$$\begin{aligned} -x_3 &= -2 & \rightarrow & x_3 = 2 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 4 & \rightarrow & x_2 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3 & \rightarrow & x_1 = 3 \end{aligned}$$

Gauss-elimináció

$$Ax = b, \text{ ahol } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Tfh $a_{11} \neq 0$. Az i -edik sorból az 1. sor $\ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ -szeresét levonva:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}$$

Képletekkel: legyen $a_{ij}^{(1)} := a_{ij}$, ekkor

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - \ell_{i1} a_{1j}^{(1)} & \ell_{i1} &= \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - \ell_{i1} b_1^{(1)} & i &= 2, \dots, n, \\ & & j &= 2, \dots, n \end{aligned}$$

Ha $a_{22}^{(2)} \neq 0$ akkor az i -edik sorból az 2. sor $\ell_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ -szeresét
levonva:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)} x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)} x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)} x_n &= b_3^{(3)} \\ &\vdots \\ a_{n3}^{(3)} x_3 + \cdots + a_{nn}^{(3)} x_n &= b_n^{(3)} \end{aligned}$$

A k -edik lépés képlettel (ha $a_{kk}^{(k)} \neq 0$):

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k)} \quad \ell_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \ell_{ik} b_k^{(k)} \quad \begin{array}{l} i = k+1, \dots, n, \\ j = k+1, \dots, n \end{array}$$

Ha $a_{11}^{(1)} \neq 0$, $a_{22}^{(2)} \neq 0$, \dots , $a_{n-1,n-1}^{(n-1)} \neq 0$, akkor az $(n-1)$ -edik lépés után:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(3)} x_n &= b_3^{(3)} \\ &\vdots \\ a_{nn}^{(n)} x_n &= b_n^{(n)} \end{aligned}$$

Ha $a_{nn}^{(n)} \neq 0$, akkor elkezdődhet a visszahelyettesítés.

A sorcsere nélküli Gauss-elimináció pontosan akkor hajtható végre,
ha

$$a_{11}^{(1)} \neq 0, a_{22}^{(2)} \neq 0, \dots, a_{nn}^{(n)} \neq 0.$$

Műveletigény:

1 művelet := 1 összeadás + 1 szorzás

Az A mátrix átalakításához (eltekintve az ℓ_{ik} költségétől):

1. lépés: $(n-1)^2$ művelet

2. lépés: $(n-2)^2$ művelet

\vdots

$(n-1)$. lépés: 1 művelet

Összesen:

$$(n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

A b vektor átalakításához:

1. lépés: $(n - 1)$ művelet

2. lépés: $(n - 2)$ művelet

\vdots

$(n - 1)$. lépés: 1 művelet

Összesen:

$$(n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1 = \frac{n(n - 1)}{2}$$

A visszahelyettesítéshez n szorzással több:

$$\frac{n(n + 1)}{2}$$

LU-felbontás.

Az A mátrix LU-felbontása:

$$A = LU$$

ahol

L alsóháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es,
 U felsőháromszög mátrix.

Az eredeti feladat: $Ax = b$ megoldása.

$$LUx = b$$

A mátrix felbontása után a megoldás két lépésben történik:

1. $Ly = b$
2. $Ux = y$

Mindkét rendszer mátrixa háromszög alakú.

A mátrix determinánása

Ha $A = LU$, akkor a determinánsok szorzástétele alapján

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$$

Háromszögmátrix determinánása a főátlóban álló elemek szorzata, így $\det(L) = 1$ és

$$\det(A) = \det(U)$$

Az A determinánása az U főátlóbeli elemeinek szorzata.

Példa

$Ax = b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

A mátrix felbontása:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U \end{aligned}$$

A visszahelyettesítések:

1. $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

felülről lefelé visszahelyettesítve:

$$y_1 = 3$$

$$-y_1 + y_2 = 1 \quad \rightarrow \quad y_2 = 4$$

$$2y_1 - 4y_2 + y_3 = -12 \quad \rightarrow \quad y_3 = -2$$

$$2. \quad Ux = y$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

alulról felfelé visszahelyettesítve:

$$-x_3 = -2 \quad \rightarrow \quad x_3 = 2$$

$$2x_2 + 3x_3 = 4 \quad \rightarrow \quad x_2 = -1$$

$$-2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \quad \rightarrow \quad x_1 = 3$$

Az A determinánsa:

$$\det(A) = \det(U) = (-2) \cdot 2 \cdot (-1) = 4$$

Az **LU-felbontás műveletigénye** ugyanannyi, mint a Gauss-eliminációé:

A mátrix felbontása: $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ művelet

A két visszahelyettesítés: összesen n^2 művelet

A **determináns kiszámítása** LU-felbontással: $\approx \frac{n^3}{3}$ művelet

Az LU-felbontás **tárigénye**:

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

tömören:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & -13 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

LDU-felbontás

Legyen D egy diagonális mátrix:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} DA &= \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \dots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_2 a_{2n} \\ \vdots & & & \\ d_n a_{n1} & d_n a_{n2} & \dots & d_n a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$AD = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} & \dots & d_n a_{1n} \\ d_1 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_n a_{2n} \\ \vdots & & & \\ d_1 a_{n1} & d_2 a_{n2} & \dots & d_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ha $u_{11} \neq 0, u_{22} \neq 0, \dots, u_{nn} \neq 0$

$$\begin{aligned}
 A = LU &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= L \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12}/u_{11} & \dots & u_{1n}/u_{11} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n}/u_{22} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
 &= LD\tilde{U}
 \end{aligned}$$

ahol

L alsóháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es

D diagonális mátrix

\tilde{U} felsőháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es

Példa

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

az A mátrix LDU-felbontása.

Ha

$$A = LDU$$

ahol

L alsóháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es

D diagonális mátrix

U felsőháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es

akkor

$$A = LDU = \tilde{L}U$$

ahol

\tilde{L} alsóháromszög mátrix,

U felsőháromszög mátrix, átlójában csupa 1-es

LDL^T -felbontás

Ha A szimmetrikus, akkor az

$$A = LDU$$

esetén $U = L^T$, azaz

$$A = LDL^T$$

Nem szükséges az L és az L^T mátrixot is előállítani, így a művelet- és a tárigény kb felére csökken.

Példa

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 & -6 \\ 6 & -16 & 10 & 22 \\ -4 & 10 & -5 & -18 \\ -6 & 22 & -18 & -9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 13 \\ -34 \end{pmatrix}$$

Az A felbontása:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -3 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & -6 \\ 3 & 4 & -6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & 3 \\ -3 & \boxed{2} & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \boxed{1} & -2 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ebből

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$Ly = b$ megoldása:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 13 \\ -34 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = -2$$

$$y_2 = -6 + 3y_1 = -12$$

$$y_3 = 13 - 2y_1 + y_2 = 5$$

$$y_4 = -34 - 3y_1 - 2y_2 + 2y_3 = 6$$

$$D^{-1}y = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$L^T x = D^{-1}y$ megoldása:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = -2$$

$$x_3 = 5 + 2x_4 = 1$$

$$x_2 = -6 + x_3 - 2x_4 = -1$$

$$x_1 = 1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2$$

Cholesky felbontás

Ha a szimmetrikus A mátrix LDL^T felbontásában a D főátlójában álló elemek pozitívak, akkor

$$A = LDL^T = LD^{1/2}D^{1/2}L^T = \tilde{L}\tilde{L}^T$$

Az A felbontását $A = LL^T$ alakba, ahol L alsóháromszög mátrix **Cholesky felbontásnak** nev.

Az A mátrixnak pontosan akkor létezik Cholesky felbontása invertálható L mátrixszal, ha A szimmetrikus és pozitív definit.

Példa:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & \boxed{2} & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

azaz

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{L^T}$$

PLU-felbontás (Gauss-elimináció sorcserével)

Permutációs mátrix: az egységmátrix sorainak permutálásával

Pl. az i -edik és j -edik sor cseréjével ($i < j$):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow i. \\ \leftarrow j. \end{matrix}$$

Ekkor

PA : az A mátrix i -edik és j -edik sora felcserélődik,

AP : az A mátrix i -edik és j -edik oszlopa felcserélődik.

Gauss-elimináció:

1. ha $a_{11} \neq 0 \rightarrow$ végrehajtjuk az első lépést
2. ha $a_{11} = 0$ és $a_{i1} = 0$ minden $i = 2, \dots, n$ -re \rightarrow az első oszlopban nincs kiküszöbölendő elem \rightarrow a 2. lépéssel folytathatjuk
3. ha $a_{11} = 0$, de van olyan i , hogy $a_{i1} \neq 0 \rightarrow$ sorcsere

Ha P_1 az 1. és i -edik sort cseréli:

$$A = P_1 A_1 \rightarrow A_1\text{-re kezdődhet a felbontás}$$

az 1. lépés után:

$$A = P_1 A_1 = P_1 L_1 A^{(2)}$$

a 2. lépés:

1. ha $a_{22}^{(2)} \neq 0 \rightarrow$ végrehajtjuk a 2. lépést
2. ha $a_{22}^{(2)} = 0$ és $a_{i2}^{(2)} = 0$ minden $i = 3, \dots, n$ -re \rightarrow a 2. oszlopban nincs kiküszöbölendő elem \rightarrow a köv. lépéssel folytathatjuk
3. ha $a_{22}^{(2)} = 0$, de van olyan $i > 2$, hogy $a_{i2}^{(2)} \neq 0 \rightarrow$ sorcsere

Ha P_2 a 2. és i -edik sort cseréli:

$$A^{(2)} = P_2 A_2$$

$$A = P_1 L_1 P_2 A_2$$

$$L_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{i1} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \ell_{i1} & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{i1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{21} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \ell_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =: P_2 \tilde{L}_1$$

$$A = P_1 P_2 \tilde{L}_1 A_2$$

→ folytatható a felbontás.

Az $(n - 1)$ -edik lépés után:

$$A = \underbrace{P_1 P_2 \cdots P_{n-1}}_{P:=} L U$$

azaz

$$A = P L U$$

ahol

P : permutációs mátrix

L : alsóháromszög mátrix, átlójában 1-esek

U : felsőháromszög mátrix

Az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldása:

$$A = PLU$$

$$LUx = P^{-1}b$$

- ▶ 1. $Ly = P^{-1}b$ megoldása
- ▶ 2. $Ux = y$ megoldása

Részleges főelemválasztás

A k -adik lépésben az $a_{ik}^{(k)}$, $i = k, \dots, n$ elemek közül keressük a legnagyobb abszolútértékű elemet \rightarrow ez lesz a főelem (sorcsere)

Teljes főelemválasztás

A k -adik lépésben az $a_{ij}^{(k)}$, $i, j = k, \dots, n$ elemek közül keressük a legnagyobb abszolútértékű elemet \rightarrow ez lesz a főelem (sor- és oszlopcsere, változhat a változók sorrendje!)

A gyakorlatban: részleges főelemválasztás.