

Nemlineáris egyenletek

Az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeit keressük, ahol $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemlineáris függvény.

Példa:

$$\cos(x) - x = 0$$

vagy

$$x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 3 = 0$$

vagy

$$e^x - 4x^2 = 0$$

vagy

$$\ln(x) - x + 2 = 0$$

1. Felezési módszer

Tf h $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, és $f(a) \cdot f(b) < 0$

Ekkor az

$$f(x) = 0$$

egyenletnek van gyöke (a, b) -ben.

Az algoritmus

Adott a maximális iterációszám ($maxit$) és az ε pontosság.

1. legyen $k = 1$, $x_0 = a$ és $x_1 = b$
2. legyen $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$
3.
 - a) ha $f(x_2) = 0$, akkor x_2 gyök \rightarrow kilépés
 - b) ha $f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$, akkor $x_1 = x_2$
 - c) ha $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, akkor $x_0 = x_2$

ha $|x_1 - x_0| < \varepsilon \rightarrow$ kilépés (x_2)

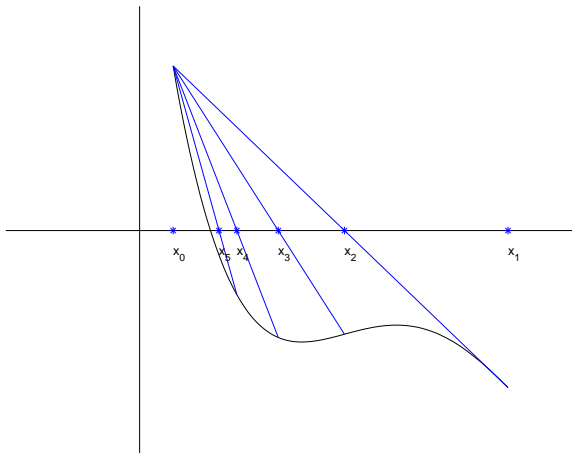
$k := k + 1$

ha $k = maxit \rightarrow$ kilépés (nem találtunk gyököt)

$\rightarrow 2.$

2. Húrmódszer

Az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet gyökét keressük, ahol $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, továbbá $f(a) \cdot f(b) < 0$ és f folyt.



Az x_{k+1} pont meghatározása:

Tfh. az utolsó részintervallum végpontjai x_k és x_j .

Az $(x_j, f(x_j))$ és $(x_k, f(x_k))$ pontokra illeszkedő egyenes egyenlete (Lagrange-interpoláció):

$$\begin{array}{cc} x_j & f(x_j) \\ & \frac{f(x_k) - f(x_j)}{x_k - x_j} \\ x_k & f(x_k) \end{array}$$

$$y(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_j)}{x_k - x_j} \cdot (x - x_k)$$

Ott metszi az x -tengelyt, ahol $y(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_j}{f(x_k) - f(x_j)}$$

Húrmódszer

x_0, x_1 kezdőpont,

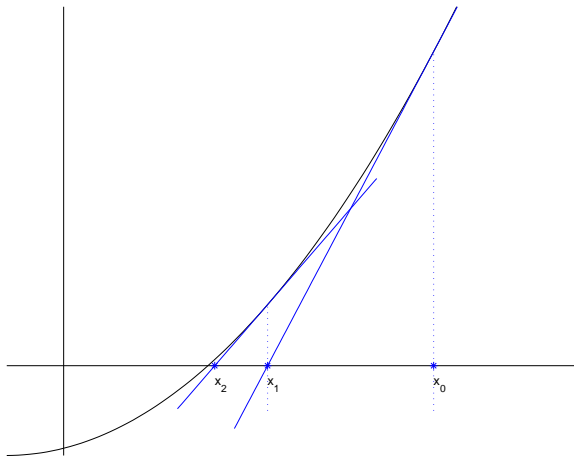
$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_j}{f(x_k) - f(x_j)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

ahol j a legnagyobb olyan k -nál kisebb index, melyre $f(x_j) \cdot f(x_k) < 0$.

- a képlet jól definiált
- az eljárás minden folytonos f esetén konvergál f egy gyökéhez
- csak páratlan multiplicitású gyök közelítésére
- két pontra támaszkodó iteráció

3. Newton-módszer

Az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet gyökét keressük.



Az algoritmus:

x_0 a gyök egy kezdeti közelítése,

x_{k+1} meghatározása:

Az f függvény x_k -beli érintője (Hermite-interpoláció):

$$\begin{array}{cc} x_k & f(x_k) \\ & f'(x_k) \\ x_k & f(x_k) \end{array}$$

$$y(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

Ott metszi az x -tengelyt, ahol $y(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

A Newton-iteráció:

x_0 kezdőpont,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- nem feltétlenül definiált
- egy pontra támaszkodó iteráció

Tétel. Legyen x^* az f egy gyöke. Ha

- f kétszer folytonosan diff.ható,
- $|f'(x)| \geq m_1 > 0$,
- $|f''(x)| \leq M_2$,
- $|x_0 - x^*| < \frac{2m_1}{M_2}$,

akkor a Newton-iteráció jól definiált, $x_k \rightarrow x^*$, ha $k \rightarrow \infty$, továbbá

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^2$$

4. Szelőmódszer

A Newton-iteráció minden lépésében szükséges a derivált értéke.

$$f'(x_k) \approx f[x_{k-1}, x_k]$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_{k-1}, x_k]} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Szelőmódszer:

x_0, x_1 kezdőpontok,

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(Húrmódszer $j = k - 1$ választással)

- a képlet nem feltétlenül definiált ($f(x_k) = f(x_{k-1})$ lehet)
- 2 pontra támaszkodó

Konvergencia feltételek ugyanazok, mint a Newton-iterációnál, csak még $|x_1 - x^*| < \frac{2m_1}{M_2}$ is kell.

A konvergenciarend alacsonyabb, mint a Newton-iterációnál:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^p,$$

ahol $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

(Húrmódszernél $p = 1$, Newton-módszernél $p = 2$.)

Példák.

1. Közelítse \sqrt{a} , ($a > 0$) értékét Newton-módszerrel!

$f(x) = x^2 - a$ és $f'(x) = 2x$. Ekkor

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right)$$

$a = 5$, $x_0 = 2$ esetén:

$$x_1 = 2.\underline{25}$$

$$x_2 = 2.\underline{236}1111111111$$

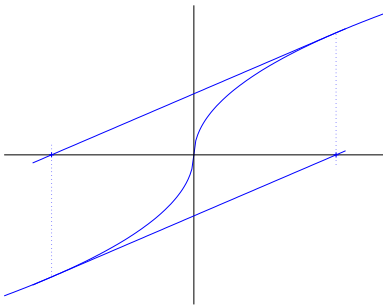
$$x_3 = 2.\underline{236067977}91580$$

$$x_4 = 2.\underline{23606797749979}$$

2. Vizsgáljuk meg a Newton-módszer viselkedését az

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{ha } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvény esetén.



5. Fixpont-iteráció.

$g(x) = x$ gyökét keressük, ahol $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Az algoritmus:

x_0 kezdőpont, $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$

Tétel. Ha $g([a, b]) \subseteq [a, b]$, és $\exists \quad 0 \leq q < 1$:

$$|g(x) - g(y)| \leq q \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b], \quad (1)$$

akkor egyértelműen létezik olyan $x^* \in [a, b]$, hogy $g(x^*) = x^*$, továbbá $\forall x_0 \in [a, b]$ esetén az $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$ sorozat tart x^* -hoz.

Megj. Ha $|g'(x)| \leq q < 1$, akkor (1) teljesül.

Példa

Közelítse a $\cos x = 3x$ egyenlet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumbeli gyökét fixpont-iterációval! Mit mondhatunk a módszer konvergenciájáról?

$$\underbrace{\frac{1}{3} \cos x}_{g(x) :=} = x.$$

Az iteráció: x_0 kezdőpont,

$$x_{k+1} = \frac{1}{3} \cos(x_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

A konvergencia vizsgálata:

1. Teljesül-e $g\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} \cos x \leq \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$$

2. $g'(x) = -\frac{1}{3} \sin x$, így

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{3} < 1.$$

Az egyenletnek egyetlen gyöke van az adott intervallumban, és az eljárás tetszőleges $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén konvergál ehhez a gyökhöz.

Nemlineáris egyenletrendszerek.

$f(x) = 0$, ahol $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Másképpen:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Példa: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$x_1^2 + x_1 x_2 - 3x_2 + 3 = 0$$

$$-3x_1^2 + x_2^2 - x_1 = 0$$

Newton-módszer.

$x^{(0)}$ kezdővektor,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(J(x^{(k)}) \right)^{-1} \cdot f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

ahol J a Jacobi-mátrix:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

A mátrixinvertálás helyett: a

$$J(x^{(k)}) \cdot \underbrace{(x^{(k+1)} - x^{(k)})}_{\delta x} = -f(x^{(k)})$$

lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. Ezután

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta x,$$

illetve csillapított módszer esetén

$$y = x^{(k)} + t \cdot \delta x,$$

és ha y jobb, mint $x^{(k)}$, azaz

$$\|f(y)\|_{\infty} < \|f(x^{(k)})\|_{\infty}$$

akkor legyen $x^{(k+1)} = y$.

Fixpont-iteráció.

A $g(x) = x$ gyökét keressük, ahol $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T \subseteq \mathbb{R}^n$.

Példa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \cos(2x_1 - x_2) - \frac{3}{4} &= x_1 \\ \frac{1}{3} \sin(x_1) &= \frac{2}{3} = x_2\end{aligned}$$

Az algoritmus:

$x^{(0)}$ kezdővektor, $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots$

Tétel. Ha T konvex, $g(T) \subseteq T$, és g diff.ható, továbbá $\|J(x)\| \leq q < 1$ minden $x \in T$ -re, akkor az egyenletrendszer egyértelműen megoldható, és $\forall x^{(0)} \in T$ esetén az $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots$ sorozat tart a megoldáshoz.

Gauss-Newton módszer.

Adottak a t_1, \dots, t_m időpillanatokban az f_1, \dots, f_m mért értékek.

Egy $F(x, t)$ modellt szeretnénk illeszteni, $x = (x_1, \dots, x_n)$, ahol F az x_1, \dots, x_n paraméterek nem lineáris függvénye.

Példa.

t_i	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
f_i	-1.7	0.1	5.2	10.3	15.8	18.9	21.1	20.3	16.1	10.2	4.2	0.5

A modell:

$$F(t) = x_1 + x_2 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t - x_3}{365}\right)$$

Itt $m = 12$ (adatok száma), $n = 3$ (paraméterek száma).

Azt szeretnénk, hogy

$$G(x) := \begin{pmatrix} F(x, t_1) \\ F(x, t_2) \\ \vdots \\ F(x, t_m) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

teljesüljön. Általában $n < m$.

A $G(x) = f$ egyenletrendszer

- nem lineáris
- n ismeretlen, m egyenlet
- általában túlhatározott

A példánkban: $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{12}$

$$G(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t_1 - x_3}{365}\right) \\ x_1 + x_2 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t_2 - x_3}{365}\right) \\ \vdots \\ x_1 + x_2 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t_{12} - x_3}{365}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{12} \end{pmatrix}$$

3 ismeretlen, 12 egyenlet

a G függvény az x_1, x_2, x_3 paraméterek nemlineáris függvénye

Egy $x^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, sorozatot definiálunk.

Tfh. $x^{(k)}$ már adott, $x^{(k)}$ környezetében linearizáljuk a feladatot:

$$G(x^{(k)}) + J_k \cdot \delta x = f,$$

ahol J_k a G függvény $x^{(k)}$ -beli Jacobi-mátrixa, $\delta x = x^{(k+1)} - x^{(k)}$.

$$J_k \cdot \delta x = f - G(x^{(k)}),$$

ez már egy lin. egyenletrendszer δx -re, de általában túlhatározott
→ legkisebb négyzetes feladat.

A Gauss-féle normálegyenlet:

$$(J_k^T J_k) \cdot \delta x = J_k^T (f - G(x^{(k)}))$$

A normálegyenletet LDL^T -felbontással oldjuk meg
→ megkaptuk δx -et.

$x^{(k+1)} := x^{(k)} + \delta x$ kellene, helyette

$$y := x^{(k)} + s \cdot \delta x \quad (\text{csillapítás})$$

Mikor fogadjuk el y -t köv. közelítő vektornak?

Először ($k = 0$ esetén) $s = 1$.

- ▶ Ha y „jobb”, mint $x^{(k)}$, azaz

$$\|f - G(y)\|_2 < \|f - G(x^{(k)})\|_2,$$

akkor $x^{(k+1)} := y$.

- ▶ Ha nem „jobb”, akkor legyen $s = 0.7s$, és újra
 $y := x^{(k)} + s \cdot \delta x$.

Maximum 5 próbálkozást teszünk $x^{(k+1)}$ meghatározására.

Ha 5 próbálkozásra sem sikerül jó $x^{(k+1)}$ -et találni \rightarrow kilépés.

Ha első próbálkozásra sikerült, akkor s -et növeljük:

$$s = \max\{1.2s; 1\}$$

(k köv. értékénél ezzel az s -sel kezdi a “próbálkozást”)

Leállási feltétel:

$$\|f - G(x^{(k)})\|_2 < \varepsilon \left(1 + \|f - G(x^{(0)})\|_2\right).$$

Az iterációt legfeljebb *maxit* lépésig folytatjuk.