

Normák, kondíciószámok

Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

egy.rendszer megoldása:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$$

egy.rendszer megoldása:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normák, kondíciószámok

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$

az $Ax = b$ lin. egyenletrendszer megoldását keressük.

Tfh b hibával terhelt ismert: b helyett $b + \delta b$ adott.

Ekkor a lin. egy.rendszer:

$$Ay = b + \delta b$$

A kérdés: mekkora lehet $y - x$?

vektorokat kell mérnünk \rightarrow normák

Def.: Legyen X egy lineáris tér \mathbb{R} (vagy \mathbb{C}) felett. Az $d : X \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés **norma**, ha

1. $d(x) \geq 0$ minden $x \in X$ esetén
2. $d(x) = 0 \iff x = 0$
3. $d(\lambda x) = |\lambda|d(x)$, minden $\lambda \in \mathbb{R}$ (vagy $\lambda \in \mathbb{C}$) és $x \in X$ esetén
4. $d(x + y) \leq d(x) + d(y)$ minden $x, y \in X$ esetén
(háromszög-egyenlőtlenség)

A továbbiakban $d(x)$ helyett $\|x\|$

Példák:

Legyen $X = \mathbb{R}^n$ vagy $X = \mathbb{C}^n$

1. Az 1-norma, vagy oktaéder norma:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

2. A 2-norma, vagy euklideszi norma:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

3. A ∞ -norma, vagy maximum norma:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Általánosán:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

ahol $p \geq 1$.

Példa. Ha

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

akkor

$$\|x\|_1 = |-3| + |0| + |1| = 4$$

$$\|x\|_2 = (|-3|^2 + |0|^2 + |1|^2)^{1/2} = \sqrt{10}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|-3|, |0|, |1|\} = 3$$

Indukált mátrixnorma

Legyen $\|\cdot\|$ egy vektornorma \mathbb{R}^n -en és $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy mátrix. Ekkor

$$d(A) := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

a **vektornorma által indukált mátrixnorma**.

Ez tényleg normát definiál $\mathbb{R}^{n \times n}$ -en:

1. $d(A) \geq 0$ minden $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -re
2. $d(A) = 0 \iff \|Ax\| = 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\iff A = 0$
3. $d(\lambda A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{|\lambda| \cdot \|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| d(A)$
4. $d(A+B) = \max_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax+Bx\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} \leq$
 $\leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \max_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = d(A) + d(B)$

A továbbiakban $d(A)$ helyett $\|A\|$

Tulajdonságok:

$$1. \|E\| = 1$$

$$2. \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \text{ minden } x \in \mathbb{R}^n \text{ esetén}$$

$$3. \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \text{ minden } A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ esetén}$$

Megjegyzés:

Az indukált mátrixnormát definiálhattuk volna úgy is, hogy a legkisebb olyan M szám, melyre

$$\|Ax\| \leq M \cdot \|x\| \quad \text{minden } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{esetén}$$

teljesül.

Milyen mátrixnormát indukálnak az általunk megismert vektornormák?

Állítás

1. Az 1-vektornorma által indukált mátrixnorma:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{oszlopnorma})$$

2. A ∞ -vektornorma által indukált mátrixnorma:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{sornorma})$$

3. A 2-vektornorma által indukált mátrixnorma:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \quad (\text{spektrálnorma})$$

ahol $\lambda_{\max}(A^T A)$ az $A^T A$ mátrix legnagyobb sajátértéke

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_1 = ? \quad \|A\|_\infty = ?$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 7 \\ \leftarrow 4 \\ \leftarrow 5 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 6 & 2 & 8 \end{matrix}$$

$$\|A\|_1 = 8 \text{ és } \|A\|_\infty = 7$$

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_2 = ?$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

az $A^T A$ mátrix sajátértékei:

$$\begin{vmatrix} 13 - \lambda & -7 \\ -7 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (13 - \lambda)(5 - \lambda) - 49 = \lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 64}}{2} = 9 \pm \sqrt{65}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{9 + \sqrt{65}} \approx 4.13$$

A kondíciósám

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$
az $Ax = b$ lin. egyenletrendszer megoldását keressük.

Tfh b hibával terhelten ismert: b helyett $b + \delta b$ adott. Ekkor a lin. egy.rendszer:

$$Ay = b + \delta b$$

vagy

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\underline{Ax} + A \cdot \delta x = \underline{b} + \delta b$$

$$A \cdot \delta x = \delta b$$

$$\delta x = A^{-1} \delta b$$

$$\|\delta x\| = \|A^{-1} \delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

Másrészt: $Ax = b$

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \frac{1}{\|b\|}$$

Így

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{\text{cond}(A):=} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Def.: Legyen A egy invertálható mátrix. A

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

számot a mátrix **kondíciószámának** nevezzük.

Tulajdonságok:

1. függ a mátrixnormától

2. $\text{cond}(A) \geq 1$

3. ha $A = Q$ ortogonális mátrix (azaz $Q^T Q = E$), akkor $\text{cond}_2(A) = 1$

4.

$$\left| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right| \leq \text{cond}(A)$$

ahol λ_{\max} és λ_{\min} az A absz.értékben legnagyobb és legkisebb sajátértéke

A kondíciós szám megadja, hogy hibás jobboldallal adott lin. egy.rendszer esetén a megoldás relatív hibája mekkora lehet.

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}$$

Ekkor $\det(A) = 10^{-4}$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10001 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_{\infty} = 2.0001$ és $\|A^{-1}\|_{\infty} = 20001$, azaz

$\text{cond}_{\infty}(A) = 2.0001 \cdot 20001 \approx 40000$.

Az A mátrix a jobboldal relatív hibájának kb 40000-szeresére tudja növelni a megoldás relatív hibáját.

Megj.: A kondíciós szám nem függ a determinánstól.

Legyen $0 \neq c \in \mathbb{R}$. Ekkor $\det(cA) = c^n \det(A)$, ugyanakkor

$$\begin{aligned} \text{cond}(cA) &= \|cA\| \cdot \|(cA)^{-1}\| = \|cA\| \cdot \left\| \frac{1}{c} A^{-1} \right\| \\ &= |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A) \end{aligned}$$

Megj.: Ha az A egy 2×2 -es mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ekkor:

$$\text{cond}_1(A) = \max\{|a| + |c|, |b| + |d|\} \cdot \frac{\max\{|a| + |b|, |c| + |d|\}}{|\det(A)|}$$

$$\text{cond}_1(A) = \frac{\|A\|_1 \cdot \|A\|_\infty}{|\det(A)|} = \text{cond}_\infty(A)$$

Csak 2×2 -es esetben!!!

Példa:

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & & & & \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

$$\text{cond}_2(H_5) \approx 10^5, \text{cond}_2(H_{10}) \approx 10^{13}$$

Hibás mátrixú lin. egyenletrendszer

Az $Ax = b$ rendszert akarjuk megoldani, ahol A reguláris
Tfh A hibával terheltén adott: A helyett $B = A + \delta A$ ismert.

1. kérdés: B invertálható?

$$B = A + \delta A = A(E + A^{-1}\delta A)$$

Perturbációs lemma: Legyen $S = E + R$, ahol $\|R\| = q < 1$
(valamely indukált mátrixnormában). Ekkor S invertálható és

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q}$$

Ha $\|\delta A\| < 1/\|A^{-1}\|$, akkor $\|A^{-1}\delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$, így a perturbációs lemma miatt B invertálható.

Ekkor $Ax = b$ helyett $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ megoldásával a megoldás relatív hibája

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$