

# Sajátérték, sajátvektor közelítése

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$  sajátérték,  $v \neq 0$  a  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektor ha:

$$Av = \lambda v$$

Átrendezve:  $(A - \lambda E)v = 0$ ,

ez adott  $\lambda$  esetén  $v$ -re homogén lin. egy.rendszer

$\implies$  olyan  $\lambda$  esetén van  $v \neq 0$  megoldás, melyre

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

(Karakterisztikus egyenlet)

## Példa

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 3 \\ -4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)(5 - \lambda) + 12$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$$

Két különböző valós gyök.

## Példa

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2$$

Egy valós gyök kétszeres multiplicitással.

## Példa

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -5 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda)(3 - \lambda) + 5$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i$$

Két komplex gyök (egymás konjugáltjai).

## Problémák:

- ▶ A karakterisztikus egyenlet megoldása = egy  $n$ -edfokú polinom gyökeinek meghatározása.
- ▶ a polinom gyökei gyengén függenek a polinom együtthatóitól, pl.

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{20} (\lambda - j)$$

gyökei  $\lambda_j = j$ , de a

$$p_{\epsilon}(\lambda) = \prod_{i=1}^{20} (\lambda - j) - 2^{-23} \lambda^{19}$$

esetén pl  $\lambda_{16,17} \approx 16.73 \pm 2.81\sqrt{-1}$ , azaz  $2^{-23} \approx 1.2 \cdot 10^{-7}$  hiba egy együtthatóban  $\rightarrow$  kb 2.9 hiba a gyökben.

# A sajátértékek lokalizációja

**Állítás.** Az  $A$  mátrix sajátértékei az origó középpontú  $\|A\|$  sugarú körben helyezkednek el a komplex számsíkon (a norma tetszőleges indukált mátrixnorma):

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

**Biz.**  $|\lambda| \cdot \|v\| = \|\lambda v\| = \|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\| \implies |\lambda| \leq \|A\|$

**Gersgorin tétel.** Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix sajátértékei az

$$a_{ii} \text{ középpontú, } \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \text{ sugarú, } i = 1, \dots, n,$$

körök uniójában helyezkednek el a komplex számsíkon.

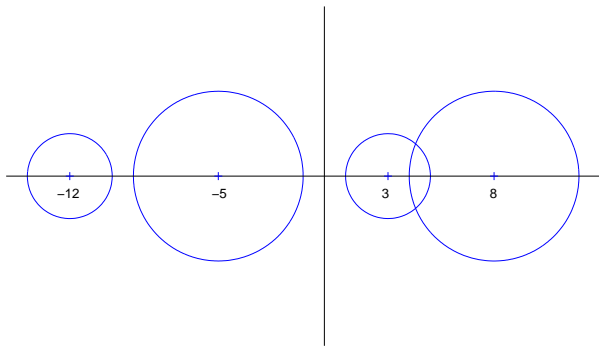
## Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

A mátrix sajátértékei a

3	középpontú	2	sugarú,
-5	középpontú	4	sugarú,
8	középpontú	4	sugarú,
-12	középpontú	2	sugarú

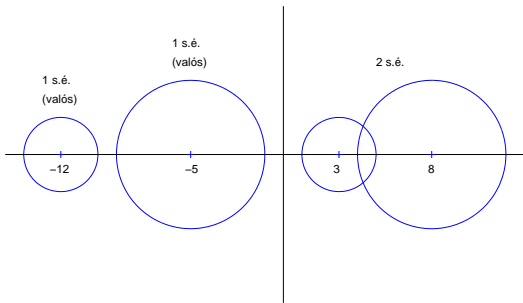
körök uniójában helyezkednek el.



A 0 egyik körben sincs benne, így biztosan nem sajátértéke  $A$ -nak  
 $\implies A$  reguláris



**A tétel egy erősebb változata.** Ha a Gersgorin körök közül  $k$  darabnak az uniója diszjunkt a többitől, akkor ezen  $k$  kör uniójában pontosan  $k$  darab sajátérték van.



# Hatvány-módszer.

Az  $A$  mátrix abszolútértékben legnagyobb sajátértékének és a hozzá tartozó sajátvektornak a közelítésére.

**A hatványmódszer.** Legyen adott az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix és az  $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  kezdővektor ( $y^{(0)} \neq 0$ ).

$$y^{(k+1)} := Ay^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

A túlcsordulás elkerülése miatt:

$$x := Ay^{(k)}, \quad y^{(k+1)} = \frac{x}{\|x\|}, \quad k = 0, 1, \dots$$

**Tétel.** Ha

1.  $A$  diagonalizálható
2. az  $A$  sajátértékeire teljesül

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|$$

3.  $(y^{(0)}, v_n) \neq 0$ , ahol  $v_n$  a  $\lambda_n$ -hez tartozó sajátvektor,

akkor az előbb definiált  $y^{(k)}$  sorozat  $k \rightarrow \infty$  esetén tart a  $\lambda_n$ -hez (az abszolútértékben legnagyobb sajátértékhez) tartozó sajátvektorhoz.

A konvergencia sebessége  $\left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right|$  nagyságától függ.

## A sajátérték közelítése.

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ .

Olyan  $\lambda \in \mathbb{R}$ -t keresünk, melyre

$$J(\lambda) = \|Av - \lambda v\|_2^2 = \sum_{i=1}^n ((Av)_i - \lambda v_i)^2$$

minimális.

$$\frac{dJ}{d\lambda} = -2 \sum_{i=1}^n ((Av)_i - \lambda v_i) v_i = 0,$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n (Av)_i \cdot v_i}_{(Av, v)} = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^n v_i^2}_{(v, v)}$$

$$\lambda = \frac{(Av, v)}{(v, v)},$$

és ez valóban minimumhely, mert  $\frac{d^2 J}{d\lambda^2} = (v, v) > 0$ .

**Def.** Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . A  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$  vektorhoz tartozó Rayleigh-hányados:

$$\lambda = \frac{(Av, v)}{(v, v)},$$

## Hatvány-módszer esetén a sajátérték közelítése.

Minden  $y^{(k)}$  esetén előállítjuk az  $y^{(k)}$ -hoz tartozó Rayleigh-hányadost:

$$\lambda^{(k)} := \frac{(Ay^{(k)}, y^{(k)})}{(y^{(k)}, y^{(k)})}$$

Ha a konvergenciatétel feltételei teljesülnek, akkor  $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda_n$ , ha  $k \rightarrow \infty$ .

Ha az  $y^{(k)}$  normált, azaz  $\|y^{(k)}\|_2 = 1$ , akkor

$$\lambda^{(k)} := (Ay^{(k)}, y^{(k)}).$$

Mikor fejezzük be az iterációt?

Ha

$$|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| \leq \varepsilon(1 + |\lambda^{(0)}|),$$

ahol  $\varepsilon$  adott.

Valóban sajátérték, sajátvektor pár környékén sikerült megállni?

Ha

$$\|Ay^{(k)} - \lambda^{(k)}y^{(k)}\|_2^2 \leq \varepsilon,$$

ahol  $y^{(k)}$  normált, akkor az iteráció sikeres volt.

## 1. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^{(0)} = \frac{(Ay^{(0)}, y^{(0)})}{(y^{(0)}, y^{(0)})} = \frac{(y^{(1)}, y^{(0)})}{(y^{(0)}, y^{(0)})} = 2,$$

$$y^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda^{(1)} = \frac{(y^{(2)}, y^{(1)})}{(y^{(1)}, y^{(1)})} = \frac{5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{2^2 + 1^2 + 1^2} = 3,$$



$k$	$y^{(k)} = Ay^{(k-1)}$	$y^{(k)} := y^{(k)} / \ y^{(k)}\ _2$	$\lambda^{(k)}$
1	$(2, 1, 1)^T$	$(0.8165, 0.4082, 0.4082)^T$	3
2	$(5, 4, 4)^T$	$(0.6623, 0.5298, 0.5298)^T$	3.0526
3	$(14, 13, 13)^T$	$(0.6058, 0.5626, 0.5626)^T$	3.0225
4	$(41, 40, 40)^T$	$(0.5869, 0.5725, 0.5725)^T$	3.0080
5	$(122, 121, 121)^T$	$(0.5805, 0.5758, 0.5758)^T$	3.0027
6	$(365, 364, 364)^T$	$(0.5784, 0.5768, 0.5768)^T$	3.0009

$$\|Ay^{(6)} - \lambda^{(6)}y^{(6)}\|_2^2 = 6.7026 \cdot 10^{-6}.$$

(A mátrix sajátértékei:  $-2, 1, 3$ , a 3-hoz tartozó sajátvektor:  $(0.5774, 0.5774, 0.5774)^T$ .)

## 2. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^{(0)} = \frac{(Ay^{(0)}, y^{(0)})}{(y^{(0)}, y^{(0)})} = \frac{(y^{(1)}, y^{(0)})}{(y^{(0)}, y^{(0)})} = 2,$$

$$y^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda^{(1)} = \frac{(y^{(2)}, y^{(1)})}{(y^{(1)}, y^{(1)})} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{2^2 + 1^2} = 2.$$

Az algoritmus leáll, mert  $|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}| = 0$ , de a 2 nem sajátértéke  $A$ -nak. ( $A$  sajátértékei:  $2 \pm i$ .)

Legyen  $y^{(1)} := y^{(1)} / \|y^{(1)}\|_2$ , ekkor

$$\|Ay^{(1)} - \lambda^{(1)}y^{(1)}\|_2 = 1.$$

## Az eltolás.

**Állítás.** Ha az  $A$  mátrix sajátértékei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , akkor az  $A - cE$  ( $c \in \mathbb{C}$ ) mátrix sajátértékei  $\lambda_1 - c, \dots, \lambda_n - c$ . A sajátvektorok nem változnak.

**Biz.**

$$Av = \lambda v \quad / - c \cdot v$$

$$(A - cE)v = (\lambda - c)v$$

# Inverz-iteráció.

A hatvány-módszert az  $A^{-1}$  mátrixra alkalmazzuk.

$y^{(0)} \neq 0$  kezdővektor,

$$y^{(k+1)} = A^{-1}y^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

**Állítás.** Ha az invertálható  $A$  mátrix sajátértékei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , akkor az  $A^{-1}$  mátrix sajátértékei:  $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ . A sajátvektorok nem változnak.

$\implies$  az  $A^{-1}$  mátrix absz. értékben legnagyobb sajátértéke az  $A$  mátrix absz. értékben legkisebb sajátértékének reciproka. A két sajátértékhez ugyanaz a sajátvektor tartozik.

$\implies$  Inverz-iterációval az  $A$  mátrix absz.értékben legkisebb sajátértékéhez tartozó sajátvektorát közelíthetjük.

**Tétel.** Ha

1.  $A$  diagonalizálható
2. az  $A$  sajátértékeire teljesül

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_{n-1}| \leq |\lambda_n|$$

3.  $(y^{(0)}, v_1) \neq 0$ , ahol  $v_1$  a  $\lambda_1$ -hez tartozó sajátvektor,

akkor az előbb definiált  $y^{(k)}$  sorozat  $k \rightarrow \infty$  esetén tart a  $\lambda_1$ -hez (az abszolútértékben legkisebb sajátértékhez) tartozó sajátvektorhoz.

A konvergencia sebessége  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$  nagyságától függ.

A gyakorlatban nem az  $y^{(k+1)} = A^{-1}y^{(k)}$  iterációt alkalmazzuk (a mátrixinvertálás költséges).

Helyette minden  $k$ -ra az

$$Ay^{(k+1)} = y^{(k)}$$

lineáris egyenletrendszert oldjuk meg.

Mivel az egy.rendszerrek mátrixa minden  $k$ -ra ugyanaz, ezért az  $A$  mátrix LU-felbontását egyetlen egyszer, az algoritmus elején kell elvégezni.

## Az algoritmus.

$y^{(0)}$  kezdővektor,

elkészítjük az  $A$  mátrix LU-felbontását:  $A = LU$ ,

az algoritmus  $k$ -adik lépésében:

1.  $Lz = y^{(k-1)} \implies$  meghatározzuk  $z$ -t,
2.  $Uy^{(k)} = z \implies$  meghatározzuk  $y^{(k)}$ -t,

a sajátérték közelítése:

$$\lambda^{(k)} := \frac{(Ay^{(k)}, y^{(k)})}{(y^{(k)}, y^{(k)})}$$

A túlcsordulás elkerülése miatt itt is érdemes az  $y^{(k)}$ -t normálni.



### **Inverz-iteráció + eltolás.**

Az inverz-iterációt  $A$  helyett az  $A - cE$  mátrixra alkalmazva esélyünk lehet az összes sajátérték közelítésére.

Ekkor az iteráció előtt az  $A - cE$  mátrix LU-felbontását készítjük el.

Mivel az  $A$  és az  $A - cE$  mátrix sajátvektorai megegyeznek, ezért a Rayleigh-hányadosban az  $A$  mátrixszal érdemes számolni.

A konvergenciafeltételek teljesülése esetén az algoritmus a  $c$ -hez legközelebbi sajátértékét találja meg  $A$ -nak.