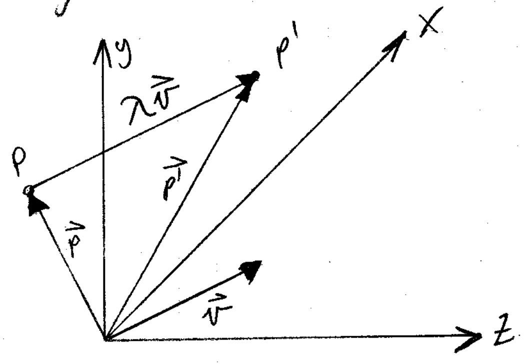
Vetítések, párhuzamos, centrális, axonometria

Tér leképzése a síkra:

- Általában vetítés alatt n dimenziójú koordináta-rendszer pontjait vetítjük n-nél kisebb dimenziójú koordináta-rendszer pontjaiba
- A számítógépes grafikában leggyakrabban 3 dimenziós térből képezünk le 2 dimenziós síkra
- A vetítéshez meg kell adnunk a vetítés centrumát, és azt a síkot, amire vetítünk (képsík)
- A centrumból indított, a térbeli objektum pontjain áthaladó egyenesek képsíkkal való metszéspontjai (döféspontjai) lesznek az objektum vetített képpontjai

Párhuzamos vetítés:

- Itt a vetítés centruma egy végtelen távoli pont (homogén koordinátája 0)
- A centrumra illeszkedő vetítősugarak párhuzamosak egymással, ezért szokás csak a vetítés irányvektorát megadni



- képsík: [X,Y]
- vesszük v-vel párhuzamos, P ponton áthaladó egyenest, és ennek az egyenesnek, és a képsíkkal a metszéspontja lesz a P'

P: térbeli pont $\vec{p}$: P pont helyvektora

P': térbeli pont képe $\vec{p}'$: P' pont helyvektora

$\vec{v}$: vetítés irányvektora

$\lambda\vec{v}$: vetítés irányvektorának egy λ skalár-szorosa

- Az ábra alapján P':

  $$P' = P + \lambda \cdot \vec{v}$$

  koordinátákra bontva:

  $$x' = x + \lambda \cdot vx$$

  $$y' = y + \lambda \cdot vy$$

  $$z' = z + \lambda \cdot vz$$

- A $[x, y]$ sík minden z koordinátája 0, tehát:

  $z' = z + \lambda \cdot vz = 0$ // ebből λ-t kifejezve:

  $$\lambda = -\frac{z}{vz}$$

- visszahelyettesítve:

  $$x' = x + \left(-\frac{z}{vz}\right) \cdot vx = x - z \cdot \frac{vx}{vz}$$

  $$y' = y + \left(-\frac{z}{vz}\right) \cdot vy = y - z \cdot \frac{vy}{vz}$$

  $$z' = 0$$

- Mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{vx}{vz} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{vy}{vz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \cdot \frac{vx}{vz} \\ y - z \cdot \frac{vy}{vz} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mivel a mátrix 3. sora csupa 0, a párhuzamos vetítés dimenzió-vesztő transzformáció.

Merőleges vetítés:

- a párhuzamos vetítés speciális esete: a vetítés iránya ($\vec{v}$) merőleges a képsíkra. $\vec{v} = (0, 0, vz)$
  - ezt behelyettesítve a fenti egyenletrendszerbe:

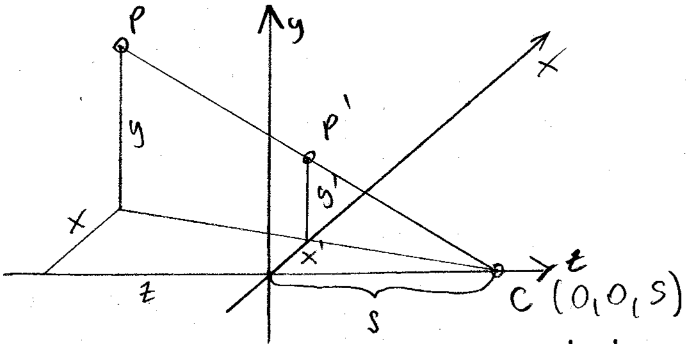
    $x' = x$

    $y' = y$ tehát egyszerüen elhagyjuk a z koordinátát.

    $z = 0$

Centrális vetítés:

- A vetítés centruma valós pont (homogén koordinátája 0-tól különböző)
- vetítő sugarak illeszkednek a centrumra, nem párhuzamosak
- z tengelyre helyezzük a centrumot, s távolságra:



- a térbeli és vetített koordináták aránya a hasonló háromszögek összefüggései alapján:

$$\frac{x'}{x} = \frac{s}{s-z} \Rightarrow x' = x \cdot \frac{s}{s-z}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{s}{s-z} \Rightarrow y' = y \cdot \frac{s}{s-z}$$

$z' = 0$ (mivel a képsík a $[x, y]$ sík)

- Mátrix alakban, homogén koordinátákkal:

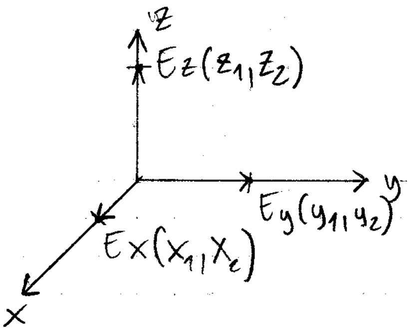
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{s} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1-\frac{1}{s} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{leosztva a homogén koordinátával:}} \begin{bmatrix} x \cdot \frac{s}{s-z} \\ y \cdot \frac{s}{s-z} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$z \neq s$

mivel a mátrix 3. sora csupa 0, a centrális vetítés dimenzió-vesztő transzformáció.

Axonometria:

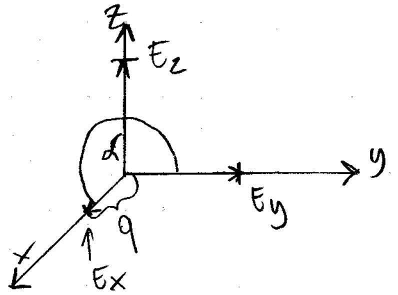
- meg kell adni a képsík koordináta-rendszerében (u,v) a térbeli derékszögű koordináta-rendszer képét.



$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_x & E_y & E_z & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x + y_1 \cdot y + z_1 \cdot z \\ x_2 \cdot x + y_2 \cdot y + z_2 \cdot z \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

KAVALIER - Axonometria:

- az egyik koordinátasík a képsíkkal párhuzamos $([y,z])$
- két paraméterrel határozhatjuk meg:
  - q: rövidülés x-tengelyen
  - α: x tengely képének y tengely képével bezárt szöge



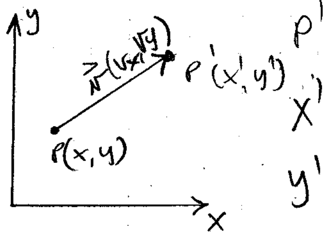
$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_x & E_y & E_z & \end{array} \\ \begin{bmatrix} q\cos\alpha & 1 & 0 & 0 \\ q\sin\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \cdot \cos\alpha \cdot x + y \\ q\sin\alpha \cdot x + z \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

TRANSZFORMÁCIÓK

- Pont transzformációk rendszerezése:
  - Affin transzformáció: párhuzamos egyenesek képe is párhuzamos (párhuzamosság-tartó) (skálázás, nyírás)
  - Hasonlósági transzformáció: megtartja a szakaszok arányát és az egyenesek hajlásszögeit (egységes skálázás az origóra)
  - Egybevágósági transzformáció: bármely szakasz képe ugyanolyan hosszúságú (elforgatás, eltolás, tükrözés)

2D Transzformációk:

- Eltolás:



$$P' = P + \vec{v}$$
$$\Downarrow$$
$$x' = x + v_x$$
$$y' = y + v_y$$

Mátrix alakban:

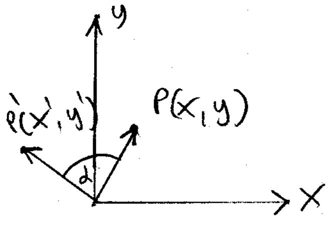
inhomogén:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + v_x \\ y + v_y \end{bmatrix}$$

homogén:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & v_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- elforgatás origó körül:



$$x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$$
$$y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

Mátrix alakban:

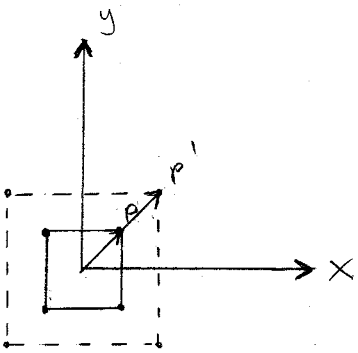
inhomogén:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

homogén:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- origó középpontú skálázás:



$P' = \lambda \cdot P$

$x' = \lambda_x \, x$

$y' = \lambda_y \, y$

ha $\lambda < 1$: kicsinyítés

$\lambda > 1$: nagyítás

$\lambda = 0$: identitás

Ha $\lambda_x = \lambda_y$: hasonlóság (uniform scale)

Ha $\lambda_x \neq \lambda_y$: affinitás (non-uniform scale)

Mátrix alakban:

inhomogén:

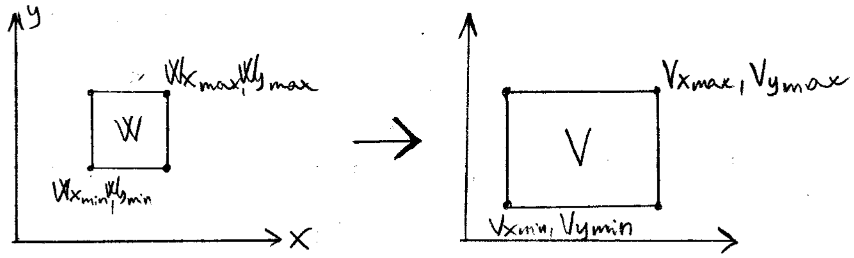
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

homogén:

$$\begin{bmatrix} x \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

WINDOW-TO-VIEWPORT

- a világ-koordináta-rendszer leképezése egy rajzolási területre.
- lépések: · window (világ-koordináta-beli rajzterület) eltolása az origóba // T_1
  - skálázás a két rajzterület megfelelő élei aránya szerint // S
  - visszatolás az eredeti pozícióba // T_2



jelölés: (Ablakok szélesség
magassá

$dWX = W_{xmax} - W_{xmin}$

$dWy = W_{ymax} - W_{ymin}$

$dVX = V_{xmax} - V_{xmin}$

$dVy = V_{ymax} - V_{ymin}$

$$\overset{T_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -W_{xmin} \\ 0 & 1 & -W_{ymin} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{S}{\begin{bmatrix} \frac{dVx}{dWx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dVy}{dWy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{T_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & V_{xmin} \\ 0 & 1 & V_{ymin} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_x}{dW_x} & 0 & -W_{xmin} \cdot \frac{dV_x}{dW_y} + V_{xmin} \\ 0 & \frac{dV_y}{dW_y} & -W_{ymin} \cdot \frac{dV_y}{dW_y} + V_{ymin} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

3D transzformációk:

Eltolás: $\vec{d}(dx, dy, dz)$ vektorral.

$$p' = p + \vec{d}$$

$$x' = x + dx$$
$$y' = y + dy$$
$$z' = x + dz$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

forgatás tengelyek körül:

- x tengely: α szöggel

$$x' = x$$
$$y' = y \cdot \cos\alpha - z \cdot \sin\alpha$$
$$z' = y \cdot \sin\alpha + z \cdot \cos\alpha$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- y tengely: α szöggel

$$x' = x \cdot \cos\alpha + z \cdot \sin\alpha$$
$$y' = y$$
$$z' = -x \cdot \sin\alpha + z \cdot \cos\alpha$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- z tengely: α szöggel

$$x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$$
$$y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$
$$z' = z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Skálázás: $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ skalárokkal

$$x' = \lambda_x \cdot x$$
$$y' = \lambda_y \cdot y$$
$$z' = \lambda_z \cdot z$$

$\lambda > 1$: nagyít

$\lambda < 1$: kicsinyít

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ha $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$: hasonlóság

Ha $\lambda_x \neq \lambda_y \neq \lambda_z$: affinitás

- Tükrözés $[x,y]$ síkra:

$$x' = x \qquad y' = y \qquad z' = -z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- nyírás:
  - adott egy origón átmenő sík n normálvektora
  - a síkkal párhuzamos $\vec{t}$ irányvektor
  - $\lambda > 0$ skalár

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\lambda t_x n_x & \lambda t_x n_y & \lambda t_x n_z & 0 \\ \lambda t_y n_x & 1+\lambda t_y n_y & \lambda t_y n_z & 0 \\ \lambda t_z n_x & \lambda t_z n_y & 1+\lambda t_z n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Koordináta-transzformáció:

- egyik koordináta-rendszerből áttérés egy másikba
- komputergrafikában gyakori probléma a világ (World) koordináta-rendsz
  és nézeti (view) koordináta-rendszerek közötti nézet-váltás
- Legyenek:
  - az eredeti-rendszer bázis vektorai: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
  - az új rendszer bázis vektorai: $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$
  - egy $\vec{d}$ vektor, ami az eredeti rendszer origójából az új rendszer origójába mutat
- az eredeti koordináták:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = T_1 \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' & \vec{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i'_x & j'_x & k'_x & d_x \\ i'_y & j'_y & k'_y & d_y \\ i'_z & j'_z & k'_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- az új koordináták: (gyakoribb probléma)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = T_2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = T_1^{-1} = \begin{bmatrix} i'_x & i'_y & i'_z & -d_x \cdot \vec{i}' \\ j'_x & j'_y & j'_z & -d_y \cdot \vec{j}' \\ k'_x & k'_y & k'_z & -d_z \cdot \vec{k}' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mivel a T_1 felső mino
mátrixa ortonormált: inverze
= transzponáltja, az elto
mátrix részén pedig egysze
vesszük az eltolás vektor ell
tettjét, így állítható elő
könnyen.

GÖRBÉK

- paraméteres vektor-függvény segítségével határozzuk meg a görbék pontjait.
- $t \to r(t)$ $t \in [a,b]$, r egy olyan függvény, ami minden t értékhez pontosan egy olyan helyvektort állít elő, ami a görbe egy pontjára mutat.
- Interpoláló görbe: a görbe a megadott pontokon átmegy
- Approximáló görbe: a görbe közelíti a megadott pontokat, valamilyen módon hatnak a görbe alakjára.
- Az r függvény értékkészletének végtelen sok eleme helyett csak a polinomokat vesszük figyelembe. A polinomok fokszáma egyenesen arányos a függvényértékek kiszámításához szükséges műveletigénnyel.
- leggyakrabban harmadfokú polinomokat használunk, mert ezekkel térbeli görbéket és felületeket is modellezhetünk.

HARMADRENDŰ GÖRBÉK

- általános alak:

$$r(t) = \vec{a}\cdot t^3 + \vec{b}\cdot t^2 + \vec{c}\cdot t + \vec{d}, \quad t \in \mathbb{R}$$

azaz a görbét az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ \vec{d}$ vektorok t skalár hatványaival vett lineáris kombinációjaként tudjuk kiszámolni.

- Használjuk az alábbi jelöléseket:

$$r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \qquad r(t) = C\cdot T$$

- célunk általában a C mátrix meghatározása

$C = G\cdot M$, ahol a G geometriai adatokból (pont, érintő) álló oszlop mátrix $G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & G_4 \end{bmatrix}$

M egy 4X4 valós elemű mátrix

$r(t) = G\cdot M\cdot T$

$M\cdot T = B(t)$ vektor elemei, a 3-adfokú polinomok a súlyfüggvény

- a görbe egy pontjában vett érintőt egyszerűen a T vektor elemeinek deriváltjaiból képzett vektorral származtathatjuk.

$$r'(t) = G \cdot M \cdot T' = G \cdot M \cdot \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matematikai folytonosságok:

- C0: a kezdő görbe végpontja megegyezik a második görbe első pontjával.
- C1: a közös pontban vett érintőjük (első deriváltjuk) is megegyezik
- C2: a közös pontban a görbület (második derivált) is megegyezik.
- G1: a csatlakozási pontban vett érintők egyenesei megegyeznek, de a derivált vektorok különbözhetnek.

HERMITE - ÍV:

- 4 geometriai adat (pont, érintő)

  $G = [G_1\ G_2\ G_3\ G_4]$ és $t_1\ t_2\ t_3\ t_4$ paraméterek (skalárok)

- keressük M 4×4-es négyzetes mátrixot

  $G = G \cdot M \cdot T$ ahol T mátrix $T_1\ T_2\ T_3\ T_4$ oszlopvektorokból a

  értékük pont esetén : $\begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$ érintő esetén : $\begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

  $t = t_1 | t_2 | t_3 | t_4$, a megfelelő geometriai adathoz tartozó paraméter

- Ha $G = G \cdot M \cdot T$, akkor

  $M \cdot T = E$ (egységmátrix), tehát M-nek T inverzével kell egyenlőnek lennie: $M = T^{-1}$ $(T^{-1} T = E)$

Pl.: 3 ponton átmenő, első pontban érintő adott hermite-ív: $t_1=-1$ $t_2=0$ t

$$r(t) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & R_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \\ G \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T'_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 & 3t_1^2 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^3 & 2t_1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ M = T^{-1} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \\ T_i,\ i \in (1,2,3,4) \end{array}$$

Bézier-görbe:

- approximáló görbe, a kontroll-pontjait nem érinti (nem mindegyiket)

előállítása:

- Bernstein - polinommal:

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^{i} \cdot P_i \qquad t \in [0,1]$$

Pl.: $n=3$ (görbe fokszáma), Pontok száma: $n+1=4$

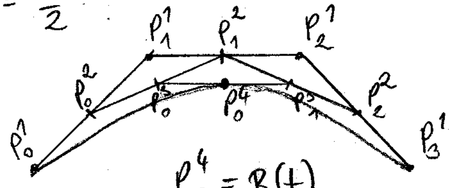
$$\binom{3}{0}(1-t)^3 P_0 + \binom{3}{1}(1-t)^2 \cdot t \cdot P_1 + \binom{3}{2}(1-t)t^2 P_2 + \binom{3}{3} t^3 P_3 = \quad t \in [0,1]$$

$$= (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 \cdot t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 \cdot P_3$$

- de Casteljau - algoritmus:

$$P_i^r(t) = (1-t)\, P_i^{r-1}(t) + t \cdot P_{i+1}^{r-1}(t) \qquad r = 1 \dots n, \quad i = 0 \dots n-r$$

Pl $t = \frac{1}{2}$:



$P_0^4 = B(t)$

- Bezier-görbe érintője:

$b'(0) = n(P_1 - P_0)$ $\quad$ n = görbe fokszáma

$b'(1) = n(P_n - P_{n-1})$ $\quad$ $t \in [0,1]$

- Hermite - görbével megegyező Bézier-görbe kontrollpontjai:

$b_0 = h_0, \quad b_1 = h_0 + \frac{1}{n}\overrightarrow{he_0}, \quad b_2 = h_1 - \frac{1}{n}\overrightarrow{he_1}, \quad b_3 = h_1$

ahol h_0, h_1 a Hermite-ív 2 végpontja, és

$\overrightarrow{he_0}, \overrightarrow{he_1}$ a 2 érintővektorja a végpontokban

- tulajdonságok:
  - kontroll pontjai affin transzformációira invariáns: elég transzformálni a kontroll pontokat, a görbe automatikusan transzformálódni fog
  - első és utolsó pontján áthalad (interpolálja)
  - szimmetrikus: a pontok bejárási sorrendje mindegy
  - Ha $t \in [0,1]$, akkor a görbe kontrollpontjainak konvex burkán belül van.

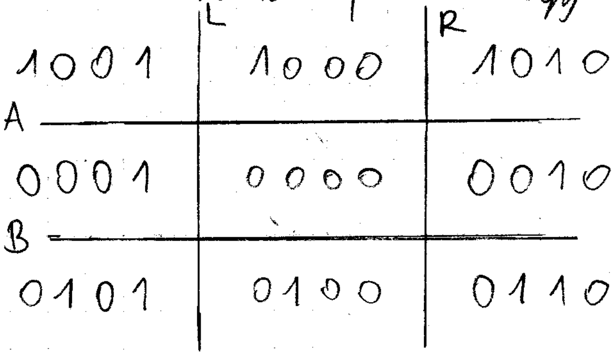
VÁGÓ ALGORITMUSOK

- **Cohen-Sutherland:** szakasz vágása téglalap tartományra

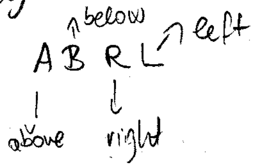
· Az egyik leghatékonyabb

· A síkot 9 részre osztja, a középső a látható terület.

· Minden ponthoz egy 4 jegyű bináris kódot rendel



1001	1000	1010
0001	0000	0010
0101	0100	0110



A: 1, ha a pont felette van
0, ha nem

B: 1, ha alatta van B-
0, ha nem

R: 1, ha jobbra van R-től
0, ha nem

L: 1, ha balra van L-t
0, ha nem

Triviális esetek:

- mindkét végpont kódja csupa 0: a szakasz belül van, nem kell vágni
- a két végpont kódjait ÉS-elve 0-tól különböző értéket kapun
  a képernyőn kívül esik, így eldobható.

vágási eset:

- a két végpont kódjából az egyik 0-tól különböző, de a 2 kódot ÉS-elve 0-t kapunk: a szakasz egy része a képernyőn van, vágni kell
- az 1-es bit helyiértékének megfelelő éllel metsszük a szakaszt, és az új metszéspontra módosítani a szakasz végpontját, majd az ehhez rendelt kódal újból ÉS-eljük
- ezt a folyamatot addig ismételjük, míg a kódok csupa 0-k nem lesznek.

Előnye: - hatékony
- nagy valószínűséggel kívül esnek a szakaszok
- 3D-ben is jól általánosítható

Hátránya:

- csak téglalap alakú ablakra működik.

- Szakasz vágása konvex poligonra:
- a vágandó egyenes egyenletébe behelyettesítjük a poligon csúcsait, az eredmények előjelét tároljuk.
- ha mindenhol azonosak az előjelek, az egyenes a poligonon kívülre esik.
- Ha 2 egymást követő pontban különbözőek az előjelek, akkor azt a 2 pontot tartalmazó él metszi az egyenest
- kiszámoljuk a metszéspontokat, majd a szakasz eredeti végpontjaival együtt sorba rendezzük egy nem 0 koordináta szerint és a 2-3.-at kötjük össze
- Szakasz vágása konkáv poligonra:
- konvex esettől annyiban tér el, hogy a metszéspontokat x (ha függőleges a szakasz, y) koordináták alapján rendezzük, majd az eredeti 2 végpontot beszúrjuk a rendezett listába, majd egyik végponttól a másikig a páros és páratlan metszéspontok közötti szakaszokat rajzoljuk ki.

Poligon vágása: Sudherland – Hodgman

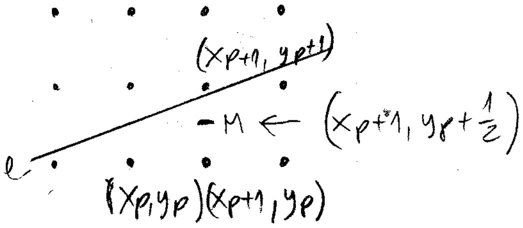
- minden vágó él szerinti vágás után létrehozunk egy új poligont (él-listát), amivel folytatjuk a vágást a többi élre.
- a poligon éleire (AB) 4 eset lehetséges:
  - mind 2 csúcs kívül: nincs output
  - mind 2 csúcs bent: B felkerül a listára (A már rajta volt)
  - A bent, B kint: él és AB metszéspontja kerül a listára
  - A kint, B bent: él és és AB metszéspontja, majd B is felkerül a listára

Konkáv alakzat esetén előfordulhat, hogy 2 poligon lesz a vágás eredménye.

INKREMENTÁLIS ALGORITMUSOK

Midpoint szakaszrajzoló algoritmus:

működése:



ha az egyenes az M pont felett halad, az M feletti pixelt gyújtjuk ki, ellenkező esetben az alatta lévőt.

Az egyenes egyenlete:

$$y = mX + b$$

meredekség　　y tengely metszéspontja

meredekség kiszámítható:

$$m = \frac{dy}{dx}$$

-> y változás
-> x változás

$dx = x_2 - x_1$

$dy = y_2 - y_1$

visszahelyettesítve:

$$y = \frac{dy}{dx} x + b \rightarrow \text{0-ra rendezve: } dy \cdot x - dx \cdot y + b \cdot dx = 0$$

Az egyenes egyenlete kétváltozós lineáris függvényként felírva:

$$F(x,y) = ax + by + c = 0$$

az előző egyenletből:

$$F(x,y) = dy\,x - dx\,y + b.dx = 0$$

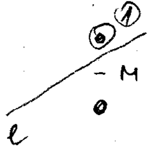
tehát:

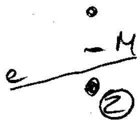
$a = dy$

$b = -dx$

$c = b \cdot dx$

Az M midpoint-ot az egyenletbe helyettesítve 2 eset áll fent:

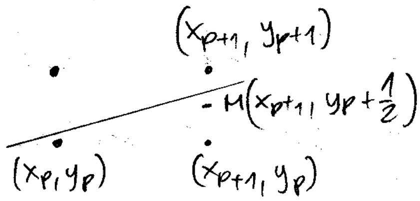




$F(M) > 0$: a felső pixelt választjuk

$F(M) < 0$: alsó pixelt választjuk

Azonban ezzel a módszerrel nem elég hatékony az algoritmus ezért egy inkrementális módszert vezetünk be.



Legyen $d = F(x,y)$

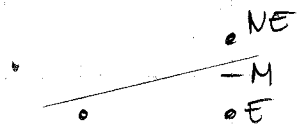
az $M(x_p+1,\ y_p+\frac{1}{2})$ pontnál:

$$d = a(x_p+1) + b(y_p+\frac{1}{2}) + c.$$

a d jelenlegi értékét megjelöljük az előző értéknek:

$d_{old} = d$

d előjelétől függően választjuk az E (east) vagy NE (north-east) pontot



Ha E-t választjuk, megjelöljük az új értéknek:

$d_{new} = F(x_p+2,\ y_p+\frac{1}{2}) =$ azaz X koordinátát inkrementáljuk, y-t nem.

$= a(x_p+2)+b(y_p+\frac{1}{2})+c$

A változást jelöljük Δd-nek:

$$\Delta d = d_{new} - d_{old} = a(x_p+2) + \cancel{b(y_p+\frac{1}{2})} + \cancel{c}$$

$$- a(x_p+1) - \cancel{b(y_p+\frac{1}{2})} - \cancel{c} =$$

$$\cancel{a \cdot x_p} + \cancel{2}a - \cancel{a x_p} - \cancel{a} = \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{dy}}$$

Tehát E esetén a változás: $\underline{\underline{dy}}$.

Ha NE-t választjuk, megjelöljük az új értéknek:

$d_{new} = F(x_p+2,\ y_p+\frac{3}{2}) =$ azaz x-et és y-t is inkrementáljuk.

$= a(x_p+2)+b(y_p+\frac{3}{2})+c$

a változás: Δd

$$\Delta d = d_{new} - d_{old} = a(x_p+2) + b(y_p+\frac{3}{2}) + \cancel{c}$$

$$- a(x_p+1) - b(y_p+\frac{1}{2}) - \cancel{c} =$$

$$= \cancel{a x_p} + 2a - \cancel{a x_p} - \cancel{a} + \cancel{b y_p} + \cancel{\frac{3}{2}}b - \cancel{b y_p} - \cancel{\frac{1}{2}b} =$$

$$= \underline{\underline{a+b}} = dy + (-dx) = \underline{\underline{dy-dx}}$$

Tehát ha NE esetén a változás: $\underline{\underline{dy-dx}}$

Válasszunk d-nek egy kezdőértéket!

ha a P kezdőpontunk $P(x_0, y_0)$, az első midpoint-unk koordinátái $M(x_0+1,\ y_0+\frac{1}{2})$ lesz.

behelyettesítve az egyenes egyenletbe:

$$F(x_0+1,\ y_0+\frac{1}{2}) = a(x_0+1)+b(y_0+\frac{1}{2})+c = \text{ //zárójel felbontás}$$

$$= a x_0 + a + b y_0 + \frac{b}{2} + c = \underbrace{a x_0 + b y_0 + c}_{F(x_0, y_0)} + a + \frac{b}{2} =$$

$$= \underline{\underline{F(x_0, y_0) + a + \frac{b}{2}}}$$

behelyettesítés: $a = dy$, $b = -dx$

$\underbrace{F(x_0, y_0)} + dy - \frac{dx}{2}$.

mivel a kezdőpont az egyenesen van, így $F(x_0, y_0) = 0$.

tehát

$$F(x_0+1, y_0+\frac{1}{2}) = \underline{dy - \frac{dx}{\textcircled{2}}}$$

Hogy ne kelljen tört számokkal dolgoznunk, megszorozzuk az egészet 2-vel:

$d_{start} = \underline{2dy - dx}$.

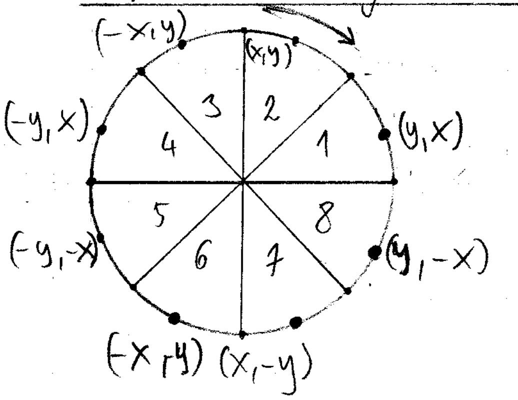
$\Delta d_E = \underline{2dy}$.

$\Delta d_{NE} = \underline{2(dy - dx)}$.

előnyei:

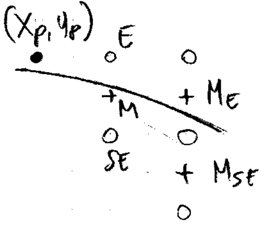
- inkrementális módszer, alacsony szám igény
- csak integer aritmetikát használ
- nincs kerekítési hiba.

Midpoint körrajzoló algoritmus:



Ha egy (X,y) pont rajta van a körön, akko a 8 szimmetria elvét használva, a kör nyolcada könnyen tükrözhetjük az ábrán látható módon. Így ha egy 8-ad összes pontját meghatáro tuk, akkor az egész kört meghatároztuk.

A kör középpontját a 0,0 pontnak tekintjük. Ha máshova kell rajzolnunk a kört, koordináta transzformációt alkalmazunk.



$SE = (X_p+1, y_p-1)$

$E = (X_p+1, y_p)$

$M = (X_p+1, y_p-\frac{1}{2})$

A kör egyenlete: kör sugara

$F(x,y) = X^2 + y^2 - R^2 = 0$

minden pixelhez tartozó M midpoint-ot behelyettesít a kör egyenletébe, és d-nek nevezzük. 2 eset lehet:

① Ha $d = F(M) >= 0$: a pont a körön kívül van, tehát SE-t választjuk.

② Ha $d = F(M) < 0$: a pont a körön belül van, Tehát E-t választjuk.

① esetben az új midpoint: $M_{new}(M_{oldx}+1, M_{oldy}-1)$

② esetben az új midpont: $M_{new}(M_{oldx}+1, M_{oldy})$

változás SE esetben:

$\underline{\underline{\Delta d_{SE}}} = d_{new} - d_{old} = F(M_{new}) - F(M_{old}) = F(M_{oldx}+1, M_{oldy}-1) -$

behelyettesítés: $\to F(M_{oldx}, M_{oldy})$

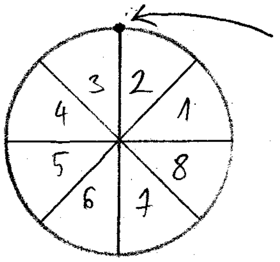
$$F((x+1)+1, (y-\tfrac{1}{2})-1) - F(x+1, y-\tfrac{1}{2}) =$$
$$= F(x+2, y-\tfrac{3}{2}) - F(x+1, y-\tfrac{1}{2}) =$$
$$= (x+2)^2 + (y-\tfrac{3}{2})^2 \cancel{-R^2} - (x+1)^2 - (y-\tfrac{1}{2})^2 \cancel{+R^2} =$$
$$= \cancel{x^2} + 4x + 4 \cancel{+y^2} - 3y + \tfrac{9}{4} \cancel{-x^2} - 2x + 1 \cancel{-y^2} + y - \tfrac{1}{4} =$$
$$\Delta d_{SE} = \underline{2x - 2y + 5} = 2(x-y)+5$$

változás E esetén:

$\underline{\Delta d_E} = d_{new} - d_{old} = F(M_{new}) - F(M_{old}) = F(M_{oldx}+1, M_{oldy}) -$

behelyettesítés: $F(M_{oldx}, M_{oldy})$

$$F((x+1)+1, y-\tfrac{1}{2}) - F(x+1, y-\tfrac{1}{2}) =$$
$$= F(x+2, y-\tfrac{1}{2}) - F(x+1, y-\tfrac{1}{2}) =$$
$$= (x+2)^2 + \cancel{(y-\tfrac{1}{2})^2} \cancel{-R^2} - (x+1)^2 \cancel{-(y-\tfrac{1}{2})^2} \cancel{+R^2} =$$
$$= \cancel{x^2} + 4x + 4 \cancel{-x^2} - 2x - 1 =$$
$$\Delta d_E = \underline{2x+3}$$



kezdőpont: $(0, R)$

dstart $= F(M)$

$$F(x_0+1, y_0-\tfrac{1}{2}) = F(\overbrace{0+1}^{1}, R-\tfrac{1}{2}) =$$
$$= 1^2 + (R-\tfrac{1}{2})^2 - R^2 =$$
$$= 1 \cancel{+R^2} - \cancel{2\cdot\tfrac{1}{2}}R + \tfrac{1}{4} \cancel{-R^2}$$
$$= \underline{\tfrac{5}{4} - R}$$

→ hogy ne kelljen törtekkel számolni, levonunk $\frac{1}{4}$-et az $\frac{5}{4}$-ből:

$\underline{\underline{1-R}}$

algoritmus pszeudokódja:

```
$x = 0$ , $y = R$        $\Delta d_E = 2x+3$
$d = 1-R$                $\Delta d_{SE} = 2(x-y)+5$
while $(y>x)$
    if ( $d<0$ )
        select (E)
        $d = d+\Delta d_E$          // $\Delta d_E = 2x+3$
    else
        select (SE)
        $d = d+\Delta d_{SE}$       // $\Delta d_{SE} = 2(x-y)+5$
        $y = y-1$
    end if
    $x = x+1$
end while
```

Z- BUFFER, BACKFACE CULLING

Z - buffer:

A frame buffer mellett még használunk egy új buffert, ami minden egyes pixel mélységinformációját tartalmazza.

Algoritmus:

- Minden pixel mélységét inicializáljuk z_{max}-ra (végtelen)
- ha egy pixelt az [i,j] pozícióra rajzolunk, előtte vizsgál ha a pixelhez tartozó z-érték KISEBB mint a z-bufferben lévő: kirajzoljuk, majd a z-buffert [i,j] helyen frissítjük az új mélység adattal.
- Ellenkező esetben nem rajzoljuk ki a pixelt

Az objektumok megfelelő pixelein lévő mélység-értékeket oldallapjaik csúcspontjainak mélység-értékei közötti lineáris interpolációval határozhatjuk meg.

- hátsólap-eldobás: (back face-culling)

Ha az objektum oldallapjainak normálvektora 90°-nál nagyobb szöget zár be a nézőpontba mutató vektorral, akkor ezeket az oldallapokat egyszerűen nem rajzoljuk ki.

Hatékony számolási módszere: a 2 vektor belső szorzatának előjel-vizsgálatával dönthetjük el (pozitív: látszik, negatív: nem látszik)

Festő algoritmus:

A kirajzolandó lapokat súlypontjaik Z koordinátái szerint rendezzük, majd sorrendben hátulról előre kirajzoljuk. Gyakran kombinálják hátsólap-eldobással.