- Formális nyelv:

Egy adott ábécé feletti szavak halmaza, ahol
- az ábécé egy véges, nemüres T (vagy V) halmaz.

betű: $a \in T$ $\quad T^+ = T^* \setminus \{\lambda\}$
szó: $p \in L$
nyelv: $L \subseteq T^*$ $\quad T^* = T^+ \cup \{\lambda\}$

Az ábécé elemei a betűk, amelyeket kis írott betűkkel jelölünk, azaz $a \in T$.
Ha $T = \{a, b, *\}$, akkor például $a*a$ egy szó a T ábécé felett.
Az ábécé betűiből végtelen sok szó rakható ki, mert az ábécé legalább 1 elemű.

A nyelv a szavak egy halmaza, amelyet L betűvel jelölünk, azaz $L \subseteq T^*$, ahol
- T^*: az ábécé összes szavát tartalmazza.
- $\emptyset$: üres halmaz, amely bármely ábécé részhalmaza. ($\{\}$ jelölés is használatos)

- Speciális üres szó:

λ: lambda

- Szavak konkatenációja:

Legyen $p = bab$, $q = baba$, $r = abba$

$p \cdot q = babbaba$
$(p \cdot q) \cdot r = babbabaabba$ } asszociatív
$p \cdot (q \cdot r) = babbabaabba$
$q \cdot b = bababab \neq b \cdot q$ } nem kommutatív

$\lambda \cdot p = p \cdot \lambda = p$
$\lambda \cdot \lambda = \lambda$ } λ az egységelem
$|\lambda| = 0$

Egy szó hosszúsága: $|u| = n$, ahol $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Legyen $u, v \in T^*$
Ha $u: \mathbb{N}_n \to T$ és $v: \mathbb{N}_m \to T$, akkor:
- $u \cdot v$ = u és v konkatenációja
- $u \cdot v$ = $\mathbb{N}_{n+m} \to T$

$$uv(x) = \begin{cases} u(x), & \text{ha } x \leq n \\ v(x-n), & \text{ha } x > n \end{cases}$$

A konkatenált szó egy adott pozíciójú betűje

- Műveletek nyelvek között:

Két nyelvnek azonos ábécé felett kell lennie, különben ki kell bővíteni egymás betűkészleteit.
- Únió: $L_1 \cup L_2$
- Metszet: $L_1 \cap L_2$ } ahol $L_1, L_2 \subset T^*$
- Különbség: $L_1 \setminus L_2$
- komplementer: $\overline{L_1} = T^* \setminus L_1$
- konkatenáció: $L_1 \cdot L_2 = \{u \cdot v \mid u \in L_1, v \in L_2\}$

- egységelemek:
  - Únió: $\emptyset$
  - Metszet: T^*
  - konkatenáció: $\{\lambda\}$, azaz: $L_1 \cdot \{\lambda\}$
- zéruselemek:
  - különbség: $\emptyset$, azaz $L_1 \setminus \emptyset = \emptyset$
  - konkatenáció: $\emptyset$, azaz $L_1 \cdot \emptyset = \emptyset$

- Formális rendszerek:

Legyen T egy ábécé, H pedig a helyettesítési szabályok halmaza.
(T, H), $T = \{a, b, c\}$, $H = \{a \to c, cc \to bab\}$ } tehát: $ac \Rightarrow cc \Rightarrow bab$
$u \to v$ $\quad u, v \in T^*$ (rendezett pár)

Levezetési lépés

- Legyen u prefixe w-nek, akkor $\exists v: w = u \cdot v$

Ha $w = u$, akkor $v = \lambda$.

- Legyen u suffixe w-nek, akkor $\exists v: w = v \cdot u$

u részszava w-nek, ha $\exists v_1, v_2: w = v_1 u v_2$

- Asszociatív kalkulus:

Minden szabály esetén, ha például $u \to v \in H$, akkor $v \to u \in H$.

- Markov-féle normál algoritmus:

(T, H, H_1)
- Záró helyettesítések ($H_1 \subset H$)
- Rendezett szabályhalmaz ($\{1.\ u_1 \to v_1,\ 2.\ u_2 \to v_2, \dots\}$)

Először mindig az első előfordulásnál kell alkalmazni a helyettesítési szabályt.
- Például: $H = \{aba \to bb\}$

$\underline{bab}aba \Rightarrow bbb\underline{aba} \Rightarrow \underline{bbbbb}$

Ha az aktuális helyettesítésre nincs lehetőség, akkor a következő szabályra ugrunk.

- Generatív rendszer:

(V, Ax, H), ahol $Ax \subset V^*$

$L = \{ w \mid \exists u \in Ax,\ u \Rightarrow^* w \}$ (generált nyelv)

$u \Rightarrow^* v$, ha $u \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n$
vagy $u = v$ (reflexív)

- példa: $(\{a, b, e\}, \{aa, b\}, \{a \to eb,\ bb \to \lambda,\ b \to aa,\ b \to ea,\ e \to a\})$

$\underline{a}a \Rightarrow \underline{e}ba \Rightarrow \underline{a}ba \Rightarrow \underline{ebb}a \Rightarrow ea$

Tehát $aa \Rightarrow^* ea$.

- Nyelvműveletek:

$L^2 = L \cdot L$

$L^{i+1} = L^i \cdot L$, $i \in \mathbb{N}$ és $i \geq 1$

$L^0 = \{\lambda\}$

$\left.\begin{array}{l} \emptyset^0 = \{\lambda\} \\ \emptyset \cdot L = \emptyset \end{array}\right\}$ Nem ugyanaz!

- Kleene-iterált:

$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$

$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$

$T = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$T^* = \{\lambda \cup T \cup T^2 \cup \dots\}$

- Generatív-nyelvtan:

(N, T, S, H), ahol
N: nem terminális ábécé
T: terminális ábécé
S: nem terminális mondatszimbólum
H: szabályok halmaza

(V, Ax, H)
$\Downarrow$
$N \cup T = V$
$N \cap T = \emptyset$

$H \in ((N \cup T)^* \cdot N \cdot (N \cup T)^* \times (N \cup T)^*)$

- Legalább egy nemterminális elemnek lennie kell a szabály bal oldalán!

Legyen $L_G = \{ w \mid w \in T^* \text{ és } \underbrace{S \Rightarrow^* w} \}$

$u \Rightarrow v$, ha $\exists u_1, u_2, u_3, v_2 \in (N \cup T)^*$,
hogy: $u = u_1 u_2 u_3$
és $v = u_1 v_2 u_3$ és $u_2 \to v_2 \in H$.

- Nyelvtanok típusai:

- 0. típusú: Mondatszerkezetű grammatika (RE)
  - Más szóval rekurzív felsorolható grammatika
- 1.a: Monoton grammatika
  $u \to v$: $|u| \leq |v|$
  kivéve, ha $S \to \lambda$, akkor S nem szerepelhet egyik szabály jobb oldalán sem.
  ↳ Szóhosszcsökkentésre nem lehet használni!
- 1.b: Környezetfüggő grammatika (CS)
  $uAv \to uwv$, ahol $u, v \in (N \cup T)^*$
  $A \in N$
  $w \in (N \cup T)^+$; $(N \cup T)^* \setminus \{\lambda\}$
  Kivéve $S \to \lambda$, ekkor S nem szerepelhet ~~semelyik~~ szabály jobb oldalán.
- 2. típusú: Környezetfüggetlen grammatika (CF)
  - Minden szabály $A \to v$ alakú, ahol $A \in N$, $v \in (N \cup T)^*$
- 2,5: Lineáris grammatika:
  $A \to uBv$, $A, B \in N$
  $A \to u$, $v, u \in T^*$
- 3. típusú: Reguláris grammatika
  - Minden szabály $A \to uB$, $A, B \in N$
  vagy $A \to u$, $u \in T^*$
  alakú.

- Chomsky-hierarchia:

Mondatszerkezetű g.
Környezetfüggő g.
Környezetfüggetlen g.
Lineáris g.
Reguláris g.
Véges g.

Egy L nyelv 0. típusú, ha van olyan G, 0. típusú nyelvtan, ami az L nyelvet generálja.
// 0 lehet: 1, 2, 3 is.

Két nyelv ekvivalens, ha G_1, G_2 esetén $L_{G_1} \setminus \{\lambda\} = L_{G_2} \setminus \{\lambda\}$.

- Véges nyelv:

$\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, $w_i \in T^*$, $1 \leq i \leq n$

$(\{S\}, T, S, \{S \to w_1, S \to w_2, \dots, S \to w_n\})$

- **Üresszó-lemma:**

Minden környezetfüggetlen nyelv egyben környezetfüggő is.

- bizonyítás:

Legyen $H' = \{A \to v \mid A \to w \in H$ és v előáll w-ből úgy, hogy csak U-beli elemeket törölhetünk$\}$

$\uparrow$ $v \neq \lambda$

$U_1 = \{A \mid A \to \lambda \in H\}$

$U_{i+1} = \{A \mid A \to V \in H,\ V \in U_i^*\} \cup U_i$

Ekkor van olyan i, hogy $U_i = U_{i+1}$.

- Ha $S \in U$:

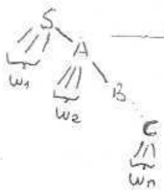
$\Rightarrow G'(N \cup \{S'\}, T, S', H' \cup \{S' \to S, S' \to \lambda\},\quad S' \notin N$

- Ha $S \notin U$:

$\Rightarrow G'(N, T, S, H')$

- **Reguláris nyelvek:**

- szabályok alakjai: $A \to wB$, $A, B \in N$; $A \to w$, $w \in T^*$, $|w| \geq 2$

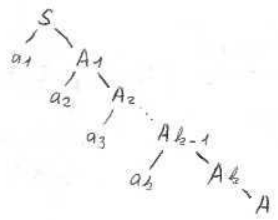


$S \to w_1 A$
$A \to w_2 B$
$C \to w_n$

- Normálforma:

$A \to aB$, $A \to B$, $A \to a$, $A \to \lambda$ $\quad A, B \in N$, $a \in T$

$S \to a_1 A_1$
$A_1 \to a_2 A_2$
$\vdots$



- zártsági probléma:

$G_1(N_1, T, S_1, H_1)$
$G_2(N_2, T, S_2, H_2)$

$N_1 \cap N_2 = \emptyset$ (diszjunktak)

$G_1 \cup G_2 = G_u(N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T, S, \{S \to S_1, S \to S_2\} \cup H_1 \cup H_2)$

$\uparrow$ megtartjuk a régi szabályokat és felveszünk még kettőt.

$S \notin N_1 \cup N_2$

$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow^* w \in L(G_1)$
$S \Rightarrow S_2 \Rightarrow^* w \in L(G_2)$

$L(G_\cdot) = L(G_1) \cdot L(G_2)$

$G_\cdot(N_1 \cup N_2, T, S_1, H_2 \cup \{A_1 \to uB_1 \in H_1,$ ahol $A, B \in N_1,\ u \in T^*\}$
$\cup \{A_1 \to uS_2,$ ahol $u \in T^*$ és $A_1 \to u \in H_1\})$

- **Reguláris kifejezések:** ($T, \lambda, \emptyset$ mind azok)

Ha p és q reguláris kifejezések, akkor $(p+q)$, $(p \cdot q)$ és p^* is reguláris kifejezés lesz (zártsági tulajdonság).
Minden reguláris kifejezés előáll az előbb felsorolt elemek és műveletek véges sok lépéséből.

$(p+q) = L_p \cup L_q$ (a p, illetve q által reprezentált nyelv uniója)
$(p\, q) = L_p \cdot L_q$
$p^* = L_p^*$

- **Reguláris műveletek:** $(\cup, \cdot, *)$

$(p+q) \equiv (q+p)$
$((p+q)+r) \equiv (p+(q+r))$

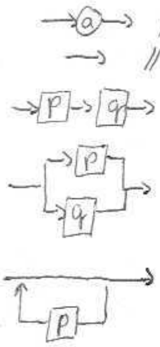
- disztributivitás:

$(p+q) \cdot r = pr + qr$
$p(q+r) = pq + pr$
$(p+q)^* = (p^* q^*)^*$

- Precedencia:

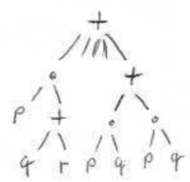
$*$: legerősebb
$\cdot$: $a+bc \equiv a+(bc)$
$+$: leggyengébb

- **Szintaxis-gráf:**



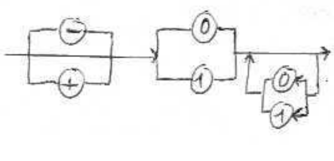
// a
// λ
// konkatenáció
// alternatíva
// iteráció

- Véges sok kifejezés (uniómentesek) uniója:



$p \cdot (q+r) = pq + pr$

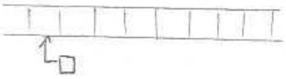
- Integer definiálása szintaxisban:



$\{-, +, 0, 1\}$

// Bár ez a gép elfogadja a (-000)-t is.

• Véges automaták:



(Q, T, q_0, Q_f, δ), ahol
Q: állapothalmaz
T: bemenő ábécé
q_0: kezdőállapot $(q_0 \in Q)$
Q_f: végállapotok halmaza $(Q_f \subset Q)$
δ: állapot-átmenet függvény

$\delta : Q \times (T \cup \{\lambda\}) \to 2^Q$

(1) üresszavas nemdeterminisztikus véges automata

(2) - Üresszó nélküli nemdeterminisztikus véges automata:

$\delta : Q \times T \to 2^Q$

(3) - Üresszó nélküli determinisztikus véges automata:

$\delta : Q \times T \to Q$ (maximum 1 eleme lehet Q-nak)

(4) - Teljesen definiált determinisztikus véges automata:

$\delta : Q \times T \to Q$ (mindenhol pontosan 1 eleme van)

Egy véges automata akkor fogad el egy input szót, ha az utasításssorozat végére érve az automata végállapotba kerül.

Automata által elfogadott nyelv: L_A

q_0
$q' \in \delta(q, a)$, ahol $a \in T \cup \{\lambda\}$ (L_A)

$(N, T, S, H) \xrightarrow{\text{átgenerál}} (N \cup \{q_f\}, T, S, \{q_f\}, \delta)$

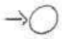
$A \to aB$, $A, B \in N$
$A \to a$, $a \in T$
$A \to B$
$A \to \lambda$

végállapot $q_f \notin N$

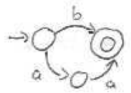
$A \xrightarrow{a} B$
$A \xrightarrow{a} q_f$
$A \xrightarrow{\lambda} B$
$A \xrightarrow{\lambda} q_f$

- a nemterminálisok lesznek az állapotok
- $q \xrightarrow{a} q'$

- Grafikus ábrázolás:

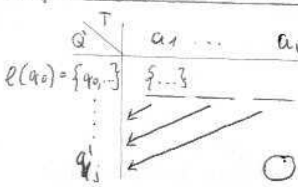
 kezdő állapot

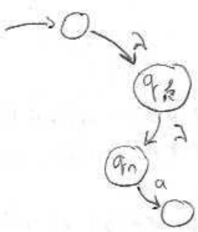
 végállapot



Állapotátmenet

• Véges automaták determinizálása:



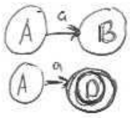


$\bigcirc \; \{q_k \mid \exists q_n, q_r : q_k \in \ell(q_n)$
$q_n \in \delta(q_r, a_i)$
és $q_r \in q'_j\}$

- λ-lezárt: Az összes olyan halmaz, ahova λ-val el lehet jutni.

$\ell_0(q_i) = \{q_j \mid q_j \in \delta(q_i, \lambda)\} \cup \{q_i\}$
$\ell_{z+1}(q_i) = \{q_j \mid q_j \in \delta(q_k, \lambda), q_k \in \ell_z(q_i)\}$

$q'_j \in Q'_f \iff \exists q_i \in Q_f$ és $q_i \in q'_j$



(Q, T, q_0, Q_f, δ)
$\quad \parallel \quad \parallel$
(N, T, S, H)

$A \to aB$
$A \to aD$
$A \to a$

• Determinisztikus automaták minimalizálása: (Aufenkamp-Hohn)

- 0. lépés: A felesleges állapotokat kiszedjük
- 1. lépés:

$\swarrow \quad \searrow$
$Q_f \quad Q \setminus Q_f \quad a_1 \dots a_n$
$Q_{f1} \quad Q_{n1}$
Q_{fn}
$\uparrow \uparrow \uparrow \quad \uparrow \uparrow$
I. II. III. IV. V. ...

A tétel a determinisztikus VÉGES automatákra vonatkozik!

- 2. lépés: Ahány féle állapot van, annyi halmazt hozunk létre. Azokat az állapotokat, amelyek ugyanúgy viselkednek egy állapotra minimalizáljuk.

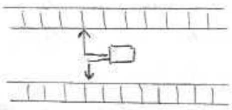
• Myhill - Nerode

Legyen adott egy L nyelv és $x, y \in T^*$.
$x \sim y \iff \forall w \in T^*: xw \in L \iff yw \in L$.

• Kimenőjellel ellátott véges automaták

- Mealy-automata:

$\circ \xrightarrow{a \backslash x} \circ$



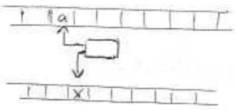
Q \ T	$a_1 \dots$	a_i
q_1	(q_1, x_1)	
q_2		
$\vdots$		(q_j, x_k)

$(Q, T, \Sigma, \delta, \varrho)$, ahol T: bemenő ábécé
Σ: kimenő ábécé
ϱ: kimenőjel függvény
δ: bemenő állapot függvény

$\varrho : Q \times T \to \Sigma$

$T^* \to \Sigma^*$

- Moore-automata:



	Q \ T	$a_1 \dots$	a_i
x_1	q_1	q	
x_2	q_2		
$\vdots$	$\vdots$		

$(Q, T, \Sigma, \delta, \mu)$ $\quad \delta : Q \times T \to Q$

$\varrho : Q \times T \to \Sigma$

$\mu : Q \to \Sigma$

• Automata leképezések:

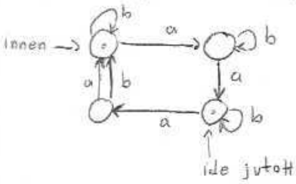
Egy $\mathcal{V}: T^* \to \Sigma^*$ leképezés automata, ha:

- szóhossztartó: $\forall u \in T^*, v \in \Sigma^*$ esetén, ha $\mathcal{V}(u) = v$, akkor $|u| = |v|$
- kezdőszelettartó: $\forall u_1, u_2 \in T^*$ esetén $\exists v_2 \in \Sigma^*$, hogy $\mathcal{V}(u_1 u_2) = \mathcal{V}(u_1) \cdot v_2$

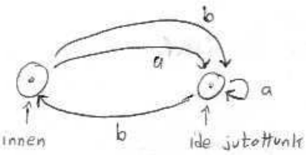
Két állapot akkor tartozik egy csoportba, ha minden egyes bemenő jelre ugyanúgy reagálnak.

• Irányítható automaták:

- Olyan véges automata, amelynek nincs kezdőállapota.



ababababab hatására.



a hatására.

a most irányító szó, hiszen hatására ugyanabba az állapotba kerülünk.

- Jan Černy: n állapot esetén $(n-1)^2$ hosszúságú szónak kell legalább lennie az irányító szónak. Ez csak sejtés!
   - $\frac{n^3-n}{6}$ viszont be van bizonyítva!

• Reguláris nyelvek:

A reguláris nyelvek halmaza zárt a metszet és a komplementer képzésre is.

$(Q_i, T, q_{i0}, Q_{if}, \delta_i)$

$L_1 \cap L_2 = (Q_1 \times Q_2, T, (q_{10}, q_{20}), Q_f, \delta)$

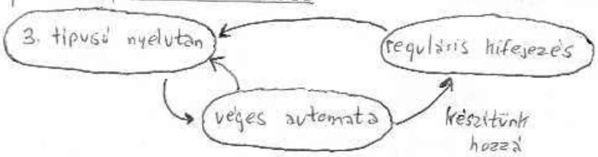
$\Downarrow$

$(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$ és $q_1 \in Q_{1f}$
$q_2 \in Q_{2f}$

Akkor fogad el egy adott nyelvet, ha mindkét automata végigment és elfogadta.

$\delta : \delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$

• Reguláris nyelvek áttekintése:



(Q, T, q_0, Q_f, δ)

$r^0_{i,j} = \{ a \mid \delta(q_i, a) = q_j \}$, ha $i \neq j$

$r^0_{i,j} = \{ a \mid \delta(q_i, a) = q_j \} \cup \{ \lambda \}$, ha $i = j$

$r^k_{i,j} = r^{k-1}_{i,k} (r^{k-1}_{k,k})^* r^{k-1}_{k,j} + r^{k-1}_{i,j}$, $\quad 1 \le k \le n$

$\bigcup_{q_j \in Q_f} r^n_{0j}$ ← kezdő i,j páros

- Pump-Lemma:

Legyen L egy reguláris nyelv.
Ekkor $\exists n \in \mathbb{N}$, $w \in L$ hogy ~~$|w| \ge n$~~,
ebben az esetben
$\exists u, v, q \in T^*$: $w = u \cdot v \cdot q$
és $u \cdot q \in L$,
$u \cdot v^i \cdot q \in L$, $\forall i \in \mathbb{N}$
továbbá $|u| \le n$
$1 \le |v| \le n$

Reguláris nyelveknél a szóprobléma lineáris időben megoldható.
Mindezt determinisztikus véges automata segítségével.

- *Lineáris nyelvek:*

$\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$(\{S\}, \{a,b\}, S, \{S \to aSb,\ S \to \lambda\})$

$A \to uBv$, $u,v \in T^*$
$A \to u$, $A,B \in N$

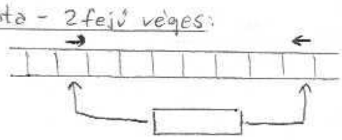
$A \to aB$
$A \to Ba$
$A \to a$
$A \to \lambda$
} Normálforma

I.		II.
$A \to uB$ $A \to u$	$\sim$	$A \to Bu$ $A \to u$

I. : jobb-lineáris ~ reguláris
II. : bal-lineáris ~ Vn bal oldalt áll.

A különbség a jobboldali szabály elemeinek sorrendjében van.

- *Automata - 2fejű véges:*



Ha összeér a 2 fej, akkor derül ki, hogy elolvasta.

(Q, T, q_0, Q_f, δ)
$q_0 \in Q$
$Q_f \subseteq Q$

$\delta: Q \times (T \cup \{\lambda\}) \times (T \cup \{\lambda\}) \to 2^Q$

$\underbrace{q \to aq'b}_{\sim}$

kezdeti konfiguráció: (q_0, w)

$(q, awb) \vdash (q', w)$, ha $\delta(q, a, b) \ni q'$, $a,b \in T \cup \{\lambda\}$, $q, q' \in Q$

konfigurációk halmaza: (u, q), ahol $u \in T^*$, $q \in Q$

A kétfejű automata elfogad egy input szót, ha $(q_0, w) \vdash^* (q, \lambda)$, $q \in Q_f$.

- *Tétel:*

A 2fejű automata a lineáris nyelvet írja le.

(Q, T, q_0, Q_f, δ)
$\uparrow$
T: szalagábécé

- *bizonyítás:*

(N, T, S, H) Lineáris nyelvtan normál formában.
$(N \cup \{q_f\}, T, S, \{q_f\}, \delta)$
$q_f \notin N$
$\downarrow$

$A \to aB$, $B \in \delta(A, a, \lambda)$
$A \to Ba$, $B \in \delta(A, \lambda, a)$
$A \to a$, $q_f \in \delta(A, a, \lambda)$
$A \to \lambda$, $q_f \in \delta(A, \lambda, \lambda)$

(Q, T, q_0, Q_f, δ)
(N, T, S, H)

$Q \cong N$, $q_0 \cong S$, $a,b \in T \cup \{\lambda\}$
$q' \in \delta(q, a, b)$, $q, q' \in Q$
$\tilde{q} \to a\tilde{q}'b$
$\forall q \in Q_f: \tilde{q} \to \lambda$

- *Zártsági tulajdonságok:*

$\{a^n b a^n\} \cup \{a^n b a^{3n}\}$ (Únióra zárt)

$S \to aSa$ $S_2 \to aS_2aaa$ $S' \to S$
$S \to b$ $S_2 \to b$ $S' \to S_2$

konkatenációra, cleene csillagra, metszetre és komplementerképzésre azonban nem zárt.

(Pumping-Lemma)

Legyen L egy lineáris nyelv, akkor:

$\exists n \in \mathbb{N}$: $w \in L$ hogy $|w| \geq n$: $\exists p, q, u, v, r \in T^*$
hogy: $w = pquvr$ és
- $|qv| > 0$
- $|pqvr| \leq n$
- $pq^iuv^ir \in L$, $\forall i \in \mathbb{N}$

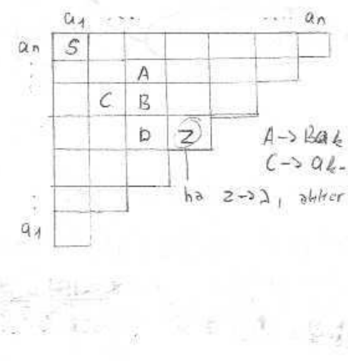
Egy nyelvtan k fokú lineáris nyelvtan, ha lineáris és
$\underset{\sim\sim}{\exists k \in \mathbb{Q}}$: $A \to uBv$, $A \to u$ $\to$ $\frac{|v|}{|u|} = k$

$k = 0$ esetén reguláris
$k = 1$ esetén páros lineáris

Lineáris
 2detlin
  k lineáris
   Reguláris

- *Szóprobléma:*

b)



$A \to Ba_k$
$C \to a_{k-2}D$

ha $Z \to \lambda$, akkor benne van!

- ~~Környezetfüggetlen~~ Környezetfüggetlen nyelvek:

- normálformák:

  $A \to u$, $A \in N$, $u \in (N \cup T)^*$

- chomsky-féle normálforma:

  $A \to BC$, $a \in T$
  $A \to a$, $A, B, C \in N$

- láncszabály probléma:

  $A \to B$
  $B \to C$
  $C \to A$

- üresszó-lemma: (lambda-mentesítés)

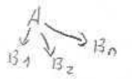
  $S \to \lambda$
  $S \to S_1$ ← bevezetünk egy új nemterminálist!
  $S_1 \Rightarrow^* w$

- chomsky-féle normálformára hozás:
  - 0. lépés: λ-mentesítés: (N, T, S, H)
  - 1. lépés: $A \to a$ alakú szabályok: $(N \cup \{X_a \mid a \in T\}, T, S, H')$, $X_a \notin N$ egyik $a \in T$-re sem.

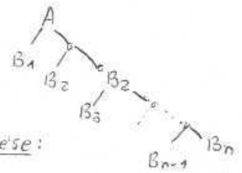
    ↳ A szabályokban szereplő terminálisokat (ha nem $A \to a$ alakúak) kicseréljük a neki megfelelő nemterminálisokra!

    $a := X_a$ és ehhez a halmazhoz hozzárendeljük úgy, hogy $X_a \to a$, $\forall a \in T$.
  - 2. lépés: Hosszú szabályok kiküszöbölése:

    $A \to u$, $|u| > 2$
    $A \to B_1 B_2 \dots B_n$



    $A \to B_1 Y_1$
    $Y_1 \to B_2 Y_2$, $Y_1 \to B_2 B_3$
    $Y_2 \to B_3 Y_3$, $Y_2 \to B_3 B_4$
    $Y_{n-2} \to B_{n-1} B_{n-2}$



    - Példa: $A \to BCDEF$ esetén:

      $A \to B X_1$
      $X_1 \to C X_2$
      $X_2 \to D X_3$
      $X_3 \to EF$
  - 3. lépés: $A \to B$ láncszabály elkerülése:
    - Létrehozunk U halmazokat azokhoz a nemterminálisokhoz, amelyek a láncszabályban a jobb oldalt helyezkednek el, a következő definíció szerint:

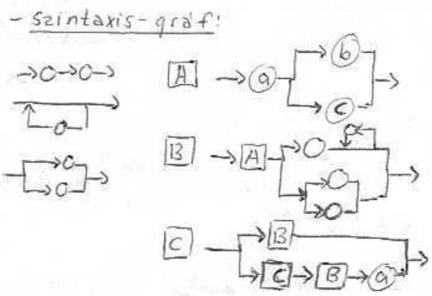
      $U_B = \{A \mid A \Rightarrow^* B,\ A, B \in N\}$
    - Ha felírtuk az U halmazokat, akkor kiegészítjük H'-t:
      - azon szabályokat, amelyek jobb oldalán megtalálható B, leírjuk ismét úgy, hogy az egyes U_B-beli elemekkel kicseréljük.
    - Kitöröljük H'-ből az $A \to B$ alakú szabályokat.

- Greibach-féle normálforma:

  $A \to AB$ Előfordulhat a végtelen rekurzió.

  $A \to aw$, ahol $A \in N$, $a \in T$, $w \in N^*$

- Szintaxis-gráf:



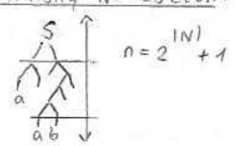
- Pumping-Lemma: (Bar-Hillel)

  Legyen L egy környezetfüggetlen nyelv, ekkor:

  $\exists n \in \mathbb{N}: \forall p \in L$ esetén, ha $|p| > n$:

  $\exists u, v, w, x, y \in T^*: p = uvwxy$,
  ahol $|vx| > 0$,
  $|vwx| \le n$
  és $uv^iwx^iy \in L,\ \forall i \in \mathbb{N}$

- chomsky NF esetén:



  $n = 2^{|N|} + 1$

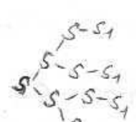
$\{a^m b^m c^m \mid m \in \mathbb{N}\}$

n (lemma szerint 5 részre bontható)

Tegyük fel, hogy környezetfüggetlen: $\exists n: a^{2n} b^{2n} c^{2n}$ $uvwxy \le n$

$a \dots ab \dots bc \dots c$ ⇒ Nem lehet környezetfüggetlen nyelvtannal generálni!

- zártsági tulajdonságok:
  - Unió: (N_1, T, S_1, H_1) és (N_2, T, S_2, H_2) esetén $(N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T, S, H_1 \cup H_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\})$, $S \notin (N_1 \cup N_2)$
  - Metszet: $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ (nem zárt!)
  - Konkatenáció: $(N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T, S, H_1 \cup H_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}) \Rightarrow S \begin{smallmatrix} S_1 - u \\ S_2 - v \end{smallmatrix}$
  - Kleene $*$: (N_1, T, S, H), $S \notin N_1$ esetén $(N_1 \cup \{S\}, T, S, H \cup \{S \to \lambda, S \to S_1, S \to SS\}) \Rightarrow$



  - komplementer: nem zárt!

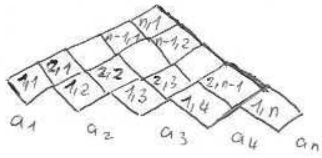
    $\neg(A \vee B)$ $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $A \to aAb \mid \lambda$
    $\overline{L_A} \cup \overline{L_B} \sim L_A \cap L_B$ $B \to cB \mid \lambda$

    (mivel a metszet nem zárt, ez se!)

- Szóprobléma környezetfüggetlen nyelvek esetén:

◦ CYK (Cook-Younger-Kasumi)

- 1. lépés: (1,i) párok kitöltése
  $\{A \mid A \to a_i \in H\}$
- 2. lépés: (i,j) párok kitöltése, i>1 esetén
  $\{A \mid A \to BC \in H$, hogy $\exists k$, $k<i$
  - $B \in (k,j)$
  - $C \in (i-k, j+k)$



- 3. lépés: Ha a piramis csúcsában szerepel S mondatszimbólum, akkor a szó benne van a nyelvben.

- Lemma:

$A \in (i,j) \Leftrightarrow A \Rightarrow^* a_j \dots a_{i+j-1}$

- bizonyítás: (indukcióval)

$i=1$: $A \in (1,j) \Leftrightarrow A \to a_j$
$\Updownarrow$
$A \Rightarrow^* a_j$

Tegyük fel, hogy $i-1$-re igaz, $i>1$

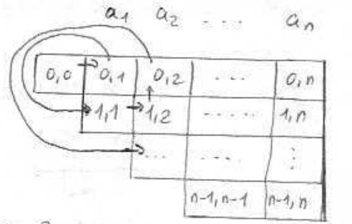
$A \in (i,j) \Leftrightarrow A \Rightarrow^* a_j \dots a_{i+j-1}$
$\Downarrow$
$B \in (k,j) \Leftrightarrow B \Rightarrow^* a_j \dots a_{j+k-1}$
$C \in (i-k, j+k) \Leftrightarrow C \Rightarrow^* a_{j+k} \dots a_{i-k+j+k-1} = a_{j+k} \dots a_{i+j-1}$
$A \to BC \in H \Leftrightarrow A \to BC \Rightarrow^* a_j \underline{a_{j+i-1}}, \dots a_{j+k} \underline{a_{i+j-1}}$, $i>1$ esetén

$A \in (n,1) \Leftrightarrow A \Rightarrow^* a_1 \dots a_{n+1-1}$
$\Downarrow$
S $\qquad a_1 \dots a_n$

Az algoritmus a feladatot szó_hossza * $O(n^3)$ időben oldja meg.

◦ Early-algoritmus

- $w \in T^*$ az elemezendő szó
- $A \to u.v$ (pontozott szabály)
- $U = \{A \mid A \Rightarrow^* \lambda\}$



a_1		a_n
$S \to .ABC$ $A \to .B$ $A \to .a$ $B \to .a$	....	$S \to u.$

$u \in (N \cup T)^*$

$A \to u.Bv$
$A \to uB.v$ } ha $B \in U$

- 1. lépés: $S \to .u$ ($\in [0,0]$ minden $S \to u \in H$ esetén)
- 2. lépés: Főátló kitöltése:
  Ha $B \to u \in H$ és van olyan $k \le j$, hogy $A \to v.Bw \in [k,j]$
  $v,w \in (N \cup T)^*$
  akkor legyen $B \to .u \in [i,j]$

Ha van az oszlopban olyan szabály, hogy a pont után V_N áll, akkor leírjuk azokat a szabályokat, amelyek belőle vezethetőek le (közvetlenül).

- 3. lépés: Jobbra lépés:
  $[i,j] \to [i,j+1]$ lesz az aktuális.
- 4. lépés: Pont mozgatása:
  Legyen $A \to Va_j.u \in [i,j]$ ...
  ... Ha $A \to V.a_j u \in [i,j-1]$, $V,u \in (N \cup T)^*$

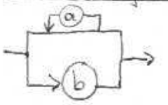
Ha az oszlophoz tartozó betű (a_j) pont után szerepel az előző oszlopban akkor leírjuk az aktuális cellába úgy, hogy a pontot mögé írjuk át.

- 5. lépés: Legyen $A \to uB.v \in [i,j]$, ha $\exists k$; $0 \le k < j$
  és $\exists A \to u.Bv \in [i,k]$
  és $B \to u. \in [k,j]$
  } $a, u, v \in (N \cup T)^*$

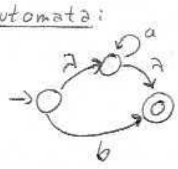
hiszen ekkor még nincs kitöltve a főátló!

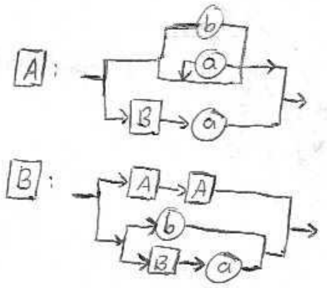
- 6. lépés: Ha nem legfelül voltunk => felfelé lépünk és a 4. pontra ugrunk vissza.
  Ha legfelül voltunk => főátlóba lépünk és a 2. pontra ugrunk vissza.
- 7. lépés: Ha (0,n)-ben $S \to u.$ szerepel, akkor benne van a szó a nyelvben, azaz $u \in (N \cup T)^*$

- Szintaxis gráf automata:



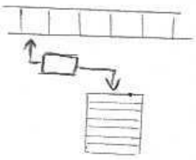
$a^* + b$





```
function A(u,s,t,v)      // Hanoi tornyai
{
   if (u>0)
   {
      A(n-1, s, u, t)
      move(s,t)
      A(n-1, u, t, s)
   }
}
```

- Verem-automata:



$A: (Q, T, Z, \delta, q_0, z_0, Q_f)$, ahol Q, T, Z véges és nem üres, továbbá
- δ: verem ábécé
- $q_0 \in Q$
- $z_0 \in Z$
- $Q_f \subseteq Q$

- nem determinisztikus:
$\delta : (Q \times (T \cup \{\lambda\}) \times Z) \to 2^{Q \times Z^*}$

- konfigurációja:

(q_0, w, z_0) $\quad Q \times T^* \times Z^*$ ← kezdeti konfiguráció

$(q_0, au, zs) \vdash (q', u, rs)$

ha $(q', r) \in \delta(q, a, z)$, $z \in Z$, $a \in T \cup \{\lambda\}$, $r \in Z^*$

Ha a kezdő konfigurációból elérjük $\vdash^* (q, \lambda, s)$-t, akkor az automata elfogadja a szót.

Tehát $(q_0, w, z_0) \vdash^* (q, \lambda, s)$ esetén.

Azok a nyelvek, amelyekre igaz, hogy $\{w \mid (q_0, w, z_0) \vdash^* (q, \lambda, s)\}$, azok az automata által elfogadottak, ahol $s \in Z^*$.

Üres veremmel elfogadott nyelv: $\{w \mid (q_0, w, z_0) \vdash^* (q, \lambda, \lambda)\}$, ahol $q \in Q$

⇒ w-t akkor üres veremmel elfogadja.

⇒ ∃ olyan nyelv, amit az üres automata elfogad.

Verem automatákkal üres veremmel elfogadott nyelvek halmaza $\sim$ Verem automatákkal végállapotokat elfogadó nyelvek halmaza

Végállapottal elfogadó → üres veremmel elfogadó

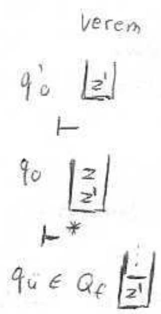
$(Q \cup \{q_ü, q_0'\}, T, Z \cup \{z'\}, \delta', q_0', z', \emptyset)$

$\delta'(q_0', \lambda, z') = \{(q_0, z_0 z')\}$

$\delta \to \delta'$

$\delta'(q_0, \lambda, z) \ni (q_ü, \lambda)$, $\quad z \in Z \cup \{z'\}$, $q_ü \in Q_f$

$\delta'(q_ü, \lambda, z) = \{(q_ü, \lambda)\}$, $\quad z \in Z \cup \{z'\}$



Üres veremmel elfogadó → végállapottal elfogadó

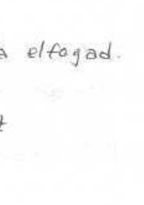
$(Q, T, Z, \delta, q_0, z_0, \emptyset)$

$(Q \cup \{q_0', q_f\}, T, Z \cup \{z'\}, \delta', q_0', z', \{q_f\})$, ahol $q_0' \notin Q$, $q_f \notin Q$, $z' \notin Z$

δ': $\delta'(q_0', \lambda, z') = \{(q_0, z_0 z')\}$

$\delta' \to \delta$

$\delta'(q, \lambda, z') = \{(q_f, \lambda)\}$, ahol $q \in Q$



- Tétel: A nem determinisztikus verem automatával elfogadott nyelvek osztálya megegyezik a környezetfüggetlen nyelvek osztályával.

- bizonyítás: Legyen adott (N, T, S, H) és a $S \to \lambda$ szabály. $\begin{bmatrix} A \to a \\ A \to BC \end{bmatrix}$

$(\{q\}, T, N, \delta, q, S, \emptyset)$

Állapot nélküli egy veremautomata, ha csak 1 q van!

$\delta(q, a, A) \Rightarrow (q, \lambda) \iff A \to a \in H$ $\quad$ illetve $\quad \delta(q, \lambda, A) \Rightarrow (q, BC) \iff \exists A \to BC \in H$

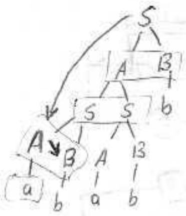
$\delta(q, \lambda, S) \Rightarrow (q, \lambda) \iff S \to \lambda \in H$

- *példa:*

$S \to AB$
$A \to SS$
$A \to a$
$B \to b$

- *bemenet:*	$\sqsupset$
ababb	S
ababb	AB
ababb	SSB
ababb	ABSB
babb	BSB
abb	SB
abb	ABB
bb	BB
b	B
λ	$\emptyset$

// $A \to a$



// legbaloldalabbi levezetés

- *bizonyítás:*

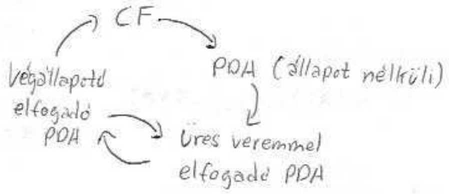
$(Q, T, Z, \delta, q_0, z_0, Q_f)$

$\Updownarrow$

(N, T, S, H)

$\{[p,z,q] \mid p,q \in Q,\ z \in Z\} \cup \{S\}$

1. $S \to [q_0, z_0, q]$, $\forall q \in Q$-ra
2. $[p,z,q] \to a[q_1,z_1,q_2][q_2,z_2,q_3]\ldots[q_n,z_n,q]$
   $\delta(p,a,z) \Rightarrow (q_1, z_1 \ldots z_n)$, $\forall q_2 \ldots q_n, q \in Q$ $(n \geq 1)$
3. $[p,z,q] \to a$
   $\delta(p,a,z) \Rightarrow (q,\lambda)$



Speciális veremautomata $\Rightarrow$ determinisztikus végállapotú automata

determinisztikus CF $\subsetneq$ CF

$\{a^n b^n\} \cup \{a^{3n} b^n\}$

Egy fordulás veremautomata $\Rightarrow$ Lineáris CNF

Determinisztikus lineáris $\Rightarrow$ Determinisztikus egy fordulás

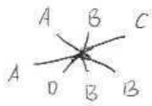
- *Környezetfüggő nyelvek:*

$u_1 A u_2 \to u_1 V u_2$
$u_1, u_2, V \in (N \cup T)^*$
$A \in N$

lehet $S \to \lambda$ és akkor S nem lehet jobboldalt.

- *monoton:* $u \to v$ $|u| \leq |v|$
  $S \to \lambda$, de S nem lehet jobb oldalt akkor.

- *monoton NF:*



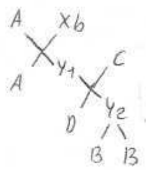
$ABC \to ADBB$

$A \to a$, $\forall a \in T$-re $\leftarrow$ Ha egy szabály ilyen alakú, akkor

Legyen X_a új nemterminális bevezetve és minden H-beli szabályban a-t helyettesítjük X_a-val és vegyük fel az $X_a \to a$ szabályt.

- *kuroda NF:*

$B \to A$
$C \to AB$
$CD \to AB$



$A_1 A_2 \ldots A_n \to B_1 B_2 \ldots B_m$ $(m \geq n)$
$A_1 A_2 \to B_1 Y_1$
$Y_1 A_3 \to B_2 Y_2$
$Y_{n-2} A_n \to B_{n-1} B_n$, ha $n = m$

$Y_{n-2} A_n \to B_{n-1} Y_{n-1}$, ha $m > n$
$Y_{n-1} \to B_n Y_n$
$Y_{n-2} \to B_{m-1} B_m$

Minden λ-mentes monotonhoz létezik kuroda normálforma.

$AB \to CD$ // Monoton és CF egybeesik

$AB \to A'B$
$A'B \to A'B'$
$A'B' \to CB'$
$CB' \to CD$

} Révész-féle trükk

$a^n(bc)^n$

$S \to ASBC$
$S \to ABC$
$CB \to BC$ } Monoton nyelvtan, ami CF nyelvet generál

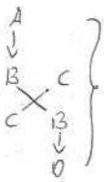
$A \to a$
$aB \to ab$
$bB \to bb$
$bC \to bc$
$cC \to cc$ } $a^n b^n c^n$ nyelvet generálja

- Révész-féle egyoldalú normál-forma:

$A \to a$
$A \to B$
$A \to BC$
$AB \to AC$
$AB \to BA$ (ebben különbözik csak)

- Permutációs nyelvek:

$A \to a$
$A \to B$
$A \to BC$
$AB \to BA$ } A szóprobléma egyenlőre megoldatlan!



$A \to B$
$BC \to CB$
$B \to D$ } Permutációs nyelvbeli szabályok

- Cremer-normálforma:

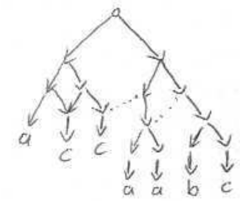
$A \to a$
$A \to BC$
$AB \to CD$

- Pentonnen-normálforma:

$A \to a$
$A \to BC$
$AB \to AC$

(az aláhúzott szabályokban különböznek)

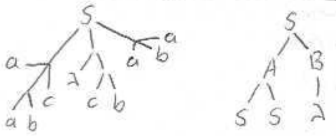
$ABC\underline{E}DA \to ABC\underline{FG}DA$



Levezetési fa (környezetfüggő esetben)

A ...-ok általában nem metszik sem egymást, sem más élt sem. Csak a jobb szomszédos élre mutathatnak.

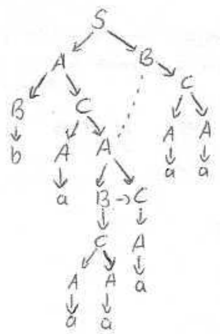
- Környezetfüggetlen esetben:



$S \to AB$
$B \to \lambda$
$A \to SS$

- Környezetfüggő esetben:
  - legbaloldalibb levezetés (ha a legbaloldalabbi szabályt alkalmazzuk, akkor mindig környezetfüggő nyelvet kapunk.)

$S \to AB$
$A \to BC$
$AB \to AC$
$A \to a$
$B \to b$
$C \to AA$
$BC \to BA$

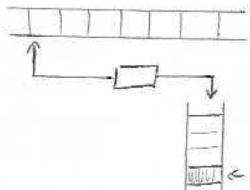


baaaaaa	S
	AB
	BCB
aaaaaa	CB
	AAB
aaaaa	AAB
	ABCAB
	CBCAB
aaaa	AABCAB
aaa	ABCAB
	BCAB
aa	AAB
	AB
	C
a	AA
	A
λ	λ

- Árnyék-verem automata:

$(T, \underbrace{Z \cup \bar{Z}}_{\text{árnyékpár}}, \delta, z_0)$

$\bar{Z} = \{\bar{A} \mid A \in Z\}$



A felette lévőt látja

$\delta: (T \cup \{\lambda\}) \times Z \times (\bar{Z} \cup \{\lambda\}) \to 2^{(\bar{Z} \cup \{\lambda\}) Z^*}$

- kezdeti konfiguráció: (w, z_0), $w \in T^*$, $z_0 \in (Z \cup \bar{Z})^*$

Egy szót elfogad, ha $(w, z_0) \vdash^* (\lambda, \lambda)$

$A \to a$

$\delta(a, A, \lambda) \ni \{\lambda, \bar{A}\}$ (vagy töröljük A-t, vagy helyette az árnyékát írjuk)

$A \to BC$

$\delta(\lambda, A, \lambda) \ni \{BC, BC\bar{A}\}$

$AB \to AC$

$\delta(\lambda, B, \bar{A}) \ni \{C, C\bar{B}, \bar{A}C\bar{B}, \bar{A}C\}$ ← elemei a jobboldalból a bal oldali elemeket törölve kapott szabályi valamint annak kiegészített kombinációi az árnyékelemekkel.

• zártsági tulajdonságok:

- zárt minden reguláris műveletben (metszetre és komplementerre is zárt!)
  - Unió: (N_1, T, S_1, H_1) és (N_2, T, S_2, H_2) esetén, ha $S_1 \to \lambda$ és $S_2 \to \lambda$, akkor $N_1 \cap N_2 = \emptyset$

    $(N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T, S, H_1' \cup H_2' \cup \{S \to S_1, S \to S_2\} \cup \{S \to \lambda$, ha benne szerepel $S_1 \to \lambda$ vagy $S_2 \to \lambda\})$
    - $H_1' = H_1 \setminus \{S_1 \to \lambda\}$
    - $H_2' = H_2 \setminus \{S_2 \to \lambda\}$
  - Konkatenáció: $aAb \to aBBb$

    (N_1, T, S_1, H_1) és (N_2, T, S_2, H_2) esetén $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ (Kuroda normál alakúak)

$(N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T, S, H_1 \cup H_2 \cup \{S \to S_1S_2\}$ $\cup \{S \to \lambda\}$ (ha mindkettő nyelvben benne van λ)
$S \notin (N_1 \cup N_2)$
vagy
$\cup \{S \to S_1\}$ (ha csak a másodikban van benne)
vagy
$\cup \{S \to S_2\})$ (ha az elsőben van benne)

• Szóprobléma:

- eldönthető, ha minden lehetséges módot kipróbálunk, bár nincs rá hatékony algoritmus. } PSPACE probléma

---

Legyen (N_1, T, S_1, H_1) és (N_2, T, S_2, H_2) Kuroda normálformájú.

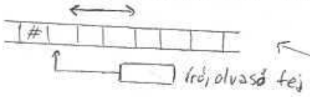
Akkor $(N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T, S, \{S \to \lambda, S \to S_1\} \cup H_1 \cup \{S \to S_1S_2, S \to S_1S_2S', S' \to S_1, S' \to S_1S_2, S' \to S_1S_2S'\} \cup H_2)$

• Turning-gép:

A turning gép akkor fogad el egy szót, ha végállapotba kerül.

Legyen $T \subset \Sigma$.

$(Q, T, \Sigma, \delta, q_0, \#, Q_f)$, ahol #: blank symbol



Potenciálisan végtelen szalag

$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\#\}) \to 2^{Q \times ((\Sigma \cup \{\#\}) \times \{j, b, h\})}$

j: jobbra
b: balra
h: helyben

Q: állapothalmaz
T: input ábécé
Σ: szalag ábécé
q_0: kezdőállapot
#: ~ szóköz
δ: átmenet függvény

- Lineárisan korlátozott automata: (LBA)

  $\delta: Q \times \Sigma \to 2^{Q \times (\Sigma \cup \{\#\}) \times \{b, j, h\}}$

  $\delta: Q \times \{\#\} \to 2^{Q \times \{\#\} \times \{b, j, h\}}$

- Rekurzívan felsorolható nyelvek:
  - Generatív nyelvtanok
  - Minden normálforma, amely CHF-nél működött: ha hozzávesszük az $A \to \lambda$ szabályt, akkor a rekurzívan felsorolható nyelvek egy osztályát kapjuk.

- Például..
  - Pentonnen:

    $A \to \lambda$
    $A \to a$ } $a \in T$
    $A \to BC$ } $A, B, C \in N$
    $AB \to AC$
  - Révész: (0. típusúakra vonatkozik)

    $S \to \lambda$ (ekkor S nem szerepelhet egyik szabály jobb oldalán sem!)

    $A \to a$
    $A \to B$
    $A \to BC$
    $AB \to AC$
    $AB \to CB$
    $AB \to B$

- Geffert-normálforma:

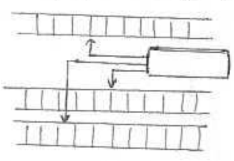
  a, $S \to V$, $AB \to \lambda$, $CD \to \lambda$ } $V \in (N \cup T)^*$

  b, $S \to V$, $AA \to \lambda$, $BBB \to \lambda$

  c, $S \to V$, $ABC \to \lambda$

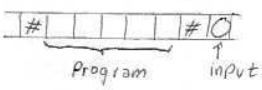
• Turning-gép:

- 2 szalagos, k szalagos változatok



- összehasonlítjuk a szalagokat
- nem tudjuk algoritmussal eldönteni, hogy megáll-e.
- rekurzív nyelvek esetén mindig megáll.

• Univerzális turning-gép:



- zártság:
  - komplementerre és metszetre nem zárt
  - reguláris műveletekre zárt

• Tárhely-tétel: (környezetfüggő nyelvtan esetén, ha felteszünk egy $a' \notin V_T$-t.

$(a')^n \omega \to CS^L$

RE nyelvtan ⇒ CS
T → T
ω → $T \cup \{a'\} = T'$, $a' \notin T$

$P \stackrel{?}{=} NP$
PSPACE: tárhelyi bonyolultság

- Nem polinomiális NP: olyan ND TM, amely polinomiális időben dönt.