Debreceni Egyetem

Természettudományi és Technológiai Kar

Kalkulus II.

Gselmann Eszter

Debrecen, 2012

„Azoknak, akik nem ismerik a matematikát, nehézséget okoz keresztüljutni a szépség valódi érzéséhez, a legmélyebb szépséghez, a természethez...
Ha a természetről akarsz tanulni, méltányolni akarod a természetet, ahhoz szükség van arra, hogy értsd a nyelvét, amin szól hozzád.”

(Richard Feynman)

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Határozatlan integrál

1.1. Alapfogalmak

1.1.1. Definíció. *Legyen* $]a,b[\subset \mathbb{R}$ *nemüres, nyílt intervallum,* $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ *függvény. Az* $F:]a,b[\to \mathbb{R}$ *függvényt az* f *függvény* ***primitív függvény****ének vagy* ***határozatlan integrál****jának nevezzük, ha az* F *függvény differenciálható az* $]a,b[$ *intervallumon és*

$$F'(x)=f(x)$$

teljesül minden $x\in]a,b[$ *esetén. Az* F *függvényre a továbbiakban az* $\int f$ *vagy az* $\int f(x)dx$ *jelölést használjuk.*

1.1.1. Tétel. *Ha* $f,F:]a,b[\to\mathbb{R}$ *és* $F'=f$*, akkor* $G:]a,b[\to\mathbb{R}$ ***pontosan akkor*** *primitív függvénye* f*-nek, ha létezik olyan* $C\in\mathbb{R}$*, hogy*

$$F(x)=G(x)+C \qquad (x\in]a,b[)$$

1.2. Alapintegrálok

1.
$$\int e^x\,dx=e^x$$

2.
$$\int a^x\,dx=\frac{1}{\ln a}a^x$$

3.
$$\int \ln(x)\,dx=x\ln(x)-x$$

4.
$$\int \log_a(x)\,dx=\frac{1}{\ln a}(x\ln(x)-x)$$

5.
$$\int x^\alpha\,dx=\begin{cases}\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} & \text{ha}\,\alpha\neq -1,\\ \ln|x| & \text{ha}\,\alpha=-1\,,\end{cases}$$

6.
$$\int \cos(x)\,dx=\sin(x)$$

7.
$$\int \sin(x)\,dx=-\cos(x)$$

8.
$$\int \mathrm{tg}(x)\,dx=-\ln|\cos(x)|$$

9.
$$\int \mathrm{ctg}(x)\,dx=\ln|\sin(x)|$$

10.
$$\int \arccos(x)\,dx=x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$$

11.
$$\int \arcsin(x)\,dx=x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$$

12.
$$\int \mathrm{arctg}(x)\,dx=x\,\mathrm{arctg}(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

13.
$$\int \mathrm{arcctg}(x)\,dx=x\,\mathrm{arcctg}(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

14.
$$\int \cosh(x)\,dx=\sinh(x)$$

15.
$$\int \sinh(x)\,dx=\cosh(x)$$

16.
$$\int \tanh(x)\,dx=\ln|\cosh(x)|$$

17.
$$\int \coth(x)\,dx = \ln|\sinh(x)|$$

18.
$$\int \operatorname{arcosh}(x)\,dx = x\operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2+1}$$

19.
$$\int \operatorname{arsinh}(x)\,dx = x\operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$$

20.
$$\int \operatorname{artanh}(x)\,dx = x\operatorname{artanh}(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}\ln|1-x^2|$$

21.
$$\int \operatorname{arcoth}(x)\,dx = x\operatorname{arcoth}(x) + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|$$

22.
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}(x)$$

23.
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}(x)$$

24.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)$$

25.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos(x)$$

26.
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$$

27.
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg}(x)$$

28.
$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh(x)$$

29.
$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth(x)$$

30.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}(x)$$

31.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x)$$

32.
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{artanh}(x)$$

33.
$$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{arcoth}(x)$$

1.3. Integrálási szabályok

1.3.1. Tétel (A határozatlan integrál linearitása). *Legyenek $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyekre létezik $\int f$ és $\int g$, legyenek továbbá $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok. Ekkor létezik $\int \alpha \cdot f + \beta \cdot g$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\int \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx + C.$$

1.3.1. Példa.

$$\begin{aligned}\int 3x + 4x^2 + 5x^3 + 2\sinh(x)dx \\ &= 3\int x dx + 4\int x^2 dx + 5\int x^3 dx + 2\int \sinh(x)dx \\ &= 3\frac{x^2}{2} + 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^4}{4} + 2\cosh(x) + C\end{aligned}$$

1.3.2. Tétel (A parciális integrálás tétele). *Ha az $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak $]a, b[$-n, és létezik $\int f' \cdot g$, akkor létezik $\int f \cdot g'$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx + C. \quad (x \in]a, b[)$$

1.3.2. Példa.

$$\int xe^x dx = ?$$

Legyen

$$f(x) = x \quad \textit{és} \quad g'(x) = e^x.$$

Ekkor

$$f'(x) = 1 \quad \textit{és} \quad g(x) = e^x.$$

Így, a parciális integrálás tétele miatt

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

1.3.3. Példa.

$$\int \ln(x) dx = ?$$

Legyen

$$f(x) = \ln(x) \quad \textit{és} \quad g'(x) = 1.$$

Ekkor

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{és} \quad g(x) = x.$$

Így, a parciális integrálás tétele miatt

$$\int 1 \cdot \ln(x) dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln(x) - \int 1 dx = x\ln(x) - x + C.$$

1.3.4. Példa.

$$\int x^2 \sinh(x) dx = ?$$

Alkamazzuk a parciális integrálás tételét az

$$f(x) = x^2 \quad \textit{és} \quad g'(x) = \sinh(x).$$

választással. Ekkor

$$f'(x) = 2x \quad \textit{és} \quad g(x) = \cosh(x),$$

így

$$\begin{aligned}\int x^2 \sinh(x) dx &= x^2 \cosh(x) - \int 2x \cdot \cosh(x) dx \\ &= x^2\cosh(x) - \left[2x\sinh(x) - \int 2 \cdot \sinh(x) dx\right] \\ &= x^2\cosh(x) - 2x\sinh(x) + 2\cosh(x) + C.\end{aligned}$$

1.3.3. Tétel (A helyettesítéses integrálás tétele). *Ha* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $g :]c,d[\to]a,b[$ *olyan függvények, melyek esetén létezik* $g' :]c,d[\to \mathbb{R}$ *és létezik* $\int f$ *is, akkor létezik* $\int (f \circ g) \cdot g'$ *is, és van olyan* $C \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \left(\left(\int f\right) \circ g\right)(x) + C = \int f(t) dt \Big|_{t=g(x)} + C. \quad (x \in]c,d[)$$

1.3.5. Példa.

$$\int \sinh(2 - 7x) dx = ?$$

Legyen $t = 2 - 7x$*, azaz,* $x = \dfrac{-t-2}{7}$,

$$g(t) = \frac{-t-2}{7} \quad \textit{és} \quad g'(t) = -\frac{1}{7}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\int \sinh(2-7x) dx &= \int \underbrace{\sinh(t)}_{=f(g(t))} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{7}\right)}_{=g'(t)} dt \Bigg|_{t=2-7x} \\ &= -\frac{1}{7} \int \sinh(t) dt \Big|_{t=2-7x} = \frac{-\cosh(t)}{7} + C \Big|_{t-2-7x} = \frac{-\cosh(2-7x)}{7} + C\end{aligned}$$

1.3.4. Tétel. *Legyen* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *differenciálható* $]a, b[$*-n,* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$*, ekkor* $f^\alpha \cdot f'$ *függvénynek létezik a primitív függvénye* $]a, b[$*-n és*

$$\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha + 1} + C,$$

teljesül valamely $C \in \mathbb{R}$ *konstanssal.*

1.3.6. Példa.

$$\int (\mathrm{tg}(x) + \mathrm{ctg}(x))^3 \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)} \right) dx = ?$$

A fenti tétel jelöléseivel,

$$f(x) = \mathrm{tg}(x) + \mathrm{ctg}(x), \; f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)}, \; \alpha = 3,$$

így,

$$\int (\mathrm{tg}(x) + \mathrm{ctg}(x))^3 \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\sin^2(x)} \right) dx = \frac{(\mathrm{tg}(x) + \mathrm{ctg}(x))^4}{4} + C.$$

1.3.5. Tétel. *Ha* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a, b]$*-n,* $f(x) \neq 0$ $(x \in [a, b])$*,* f *differenciálható* $]a, b[$*-n, akkor az* $\frac{f'}{f}$ *függvénynek létezik a primitív függvénye, és létezik olyan* $C \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C.$$

1.3.7. Példa.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} dx = ?$$

A fenti tétel jelöléseivel

$$f(x) = e^{2x} + 3 \quad \text{és} \quad f'(x) = 2e^{2x},$$

így

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 3} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\left|e^{2x} + 3\right|\right) + C.$$

1.3.6. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \neq 0$ *tetszőlegesek. Ha létezik* $\int f$*, akkor létezik* $\int f(\alpha x + \beta)\, dx$ *is, és létezik olyan* $C \in \mathbb{R}$ *konstans, hogy*

$$\int f(\alpha x + \beta)\, dx = \frac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C, \quad (x \in \mathbb{R})$$

ahol F jelöli az f függvény primitív függvényét.

1.4. Integrálási módszerek

1.4.1. Racionális törtfüggvények integrálása

Egyszerűbb speciális típusok

1.4.1. Állítás. *Legyenek* $A, a, b \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$ *tetszőlegesek, ekkor*

$$\int \frac{A}{ax + b} dx = \frac{A}{a} \ln(|ax + b|) + C.$$

1.4.2. Állítás. *Legyenek* $A, a, b \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$ *és* $n \in \mathbb{N}, n \neq 1$ *tetszőlegesek, ekkor*

$$\int \frac{A}{(ax + b)^n} dx = \frac{A}{a(1 - n)} \frac{1}{(ax + b)^{n-1}} + C.$$

1.4.3. Állítás. *Legyenek $A, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ tetszőlegesek, ekkor*

$$\int \frac{Ax}{(ax+b)^n} dx = \frac{A}{a^2} \frac{(ax+b)^{2-n}}{2-n} - \frac{Ab}{a^2} \frac{(ax+b)^{1-n}}{1-n} + C.$$

1.4.4. Állítás. *Legyenek $A, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tetszőlegesek és $D = b^2 - 4ac$. Ekkor, ha*

— *$D < 0$, akkor*

$$\int \frac{A}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{b}\right) + C;$$

— *$D = 0$, akkor*

$$\int \frac{A}{ax^2 + bx + c} dx = -\frac{A}{a} \frac{1}{x + \frac{b}{a}} + C;$$

— *$D > 0$, akkor*

$$\int \frac{A}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{\sqrt{D^3}}{8a^2} \operatorname{artanh}\left(\frac{2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{D}}\right) + C.$$

1.4.5. Állítás. *Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges, és*

$$I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor,

$$I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

teljesül.

A parciális törtekre bontás módszere

1.4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f valós függvény **racionális törtfüggvény**, ha léteznek olyan P és Q valós polinomok, hogy*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}, Q(x) \neq 0)$$

teljesül.

1.4.1. Megjegyzés. *A továbbiakban az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy f úgynevezett **valódi racionális törtfüggvény**, azaz, ha*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

akkor $\deg(P) < \deg(Q)$ teljesül. Ellenkező esetben ugyanis (az osztás elvégzése után) f felírható egy polinom és egy valódi racionális törtfüggvény összegeként. Feltehető továbbá az is, hogy a nevezőben szereplő Q polinom egy főegyütthatójú.

1.4.1. Tétel. *Legyen f egy racionális törtfüggvény. Ekkor az f függvénynek létezik F primitív függvény, továbbá ez az F függvény elemi függvény.*

A továbbiakban a Q polinom gyökeitől függően három különböző esetet kell megkülönböztetnünk.
I. eset Ha a Q polinomnak csak **egyszeres** multiplicitású, **valós** gyökei vannak, azaz

$$Q(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_1) \cdots (x - x_n)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

ahol az $A_1, \ldots, A_n$ együtthatók egyértelműen meg vannak határozva. Ezeket a konkrét feladatokban az együtthatók egyeztetésével lehet meghatározni.

1.4.1. Példa. *Tekintsük az*
$$\int \frac{1}{(x-2)(x+4)}dx$$
határozatlan integrált. Az előzőek szerint, keresendőek azok A és B valós számok, melyekre
$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$$
teljesül. Közös nevezőre hozva,
$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A(x+4)+B(x-2)}{(x-2)(x+4)},$$
azaz,
$$1 = A(x+4) + B(x-2)$$
kell, hogy teljesüljön, minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -4\}$ esetén. Ez csak úgy lehetséges, ha A és B megoldása az alábbi egyenletrendszernek,
$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 4A - 2B = 0 \end{cases}$$
Ennek az egyenlet megoldása $A = \frac{1}{6}$ és $B = -\frac{1}{6}$, ezért
$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{1}{6}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+4}.$$
Mindebből,
$$\int \frac{1}{(x-2)(x+4)}dx = \int \frac{1}{6}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+4}dx = \frac{1}{6}\ln(|x-2|) - \frac{1}{6}\ln(|x+4|) + C$$
adódik.

II. eset Ha a Q polinomnak csak **valós** gyökei vannak, de a gyökök között vannak **többszörös multiplicitás**úak is, azaz, a Q polinom
$$Q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k},$$
alakú, ahol $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$. Ebben az esetben
$$\begin{aligned} f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{P(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}} \\ & = \frac{A_{11}}{(x-x_1)} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} \\ & + \frac{A_{21}}{(x-x_2)} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}} \\ & \qquad + \cdots + \frac{A_{k1}}{(x-x_k)} + \frac{A_{k2}}{(x-x_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x-x_k)^{\alpha_k}}. \end{aligned}$$
Az előállításban szerepl $A_{i\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, k$ valós számokat ebben az esetben is az együtthatók egyeztetésével tudjuk meghatározni.

1.4.2. Példa. *Tekintsük az*
$$\int \frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3}dx$$
határozatlan integrált. A fentiek szerint
$$\frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^2},$$

az együtthatók egyeztetése után az A, B és C számokra az alábbi egyenletrendszert kapjuk,

$$\begin{cases} A &= 3 \\ 4A + B &= 4 \\ 4A + 2B + C &= -6 \end{cases}$$

Vagyis, $A = 3$, $B = -8$ és $C = -2$. Midezekből,

$$\int \frac{3x^2 + 4x - 6}{(x+2)^3} dx = \int \frac{3}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2} - \frac{2}{(x+2)^3} dx = 3\ln(|x+2|) + \frac{8}{x+2} + \frac{1}{x+2} + C.$$

III. eset Ha a Q polinomnak van **komplex gyök**e is. Ekkor, ha például $z \in \mathbb{C}$ gyke a Q polinomnak, akkor $\overline{z}$ is gyöke Q-nak, vagyis a komplex gyökök a konjugáltjaikkal együtt lépnek fel. Ezen az eseten belül még további két esetet kell megkülönböztetnünk.
III. a) eset Ha a Q polinomnak **többszörös valós** és **egyszeres komplex** gyöktényezői vannak, azaz,

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k}(x^2 + b_1 x + c_1) \cdots (x^2 + b_s x + c_s),$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^i} + \cdots + \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{A_{rj}}{(x - x_r)^j} + \sum_{k=1}^{s} \frac{B_k x + C_k}{x^2 + b_k x + c_k}.$$

III. b) eset Ha a Q polinomnak **többszörös valós** és **többszörös komplex** gyöktényezői vannak, azaz,

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k}(x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_s x + c_s)^{\beta_s},$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^i} + \cdots + \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{A_{rj}}{(x - x_r)^j} + \sum_{k=1}^{\beta_1} \frac{B_{1k} x + C_{1k}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^k} + \cdots + \sum_{l=1}^{\beta_s} \frac{B_{sl} x + C_{sl}}{(x^2 + b_s x + c_s)^l}$$

1.4.2. Trigonometrikus függvények racionális kifejezéseinek integrálása

Egyszerűbb speciális típusok

Az $\int \sin^{2n+1}(x)\cos^k(x)dx$ alakú integrálok
Mivel

$$\sin^{2n+1}(x) = \sin(x)\sin^{2n}(x) = \sin(x)\left(1 - \cos^2(x)\right)^n,$$

ezért az integrandus alakja

$$\int \sin^{2n+1}(x)\cos^k(x)dx = \int \sin(x)\left(1 - \cos^2(x)\right)^n \cos^k(x).$$

ami szorzások és az n-edik hatványra emelés után olyan összegre vezet, melynek (legfeljebb egy kivétellel) mindegyik tagja $f^n(x)f'(x)$ alakú.

1.4.3. Példa.

$$\int \sin^3(x)dx = \int \sin(x)\sin^2(x)dx = \int \sin(x)(1 - \cos^2(x))dx$$
$$= \int \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x)dx = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{x} + C$$

Az $\int \cos^{2n+1}(x)\sin^k(x)dx$ alakú integrálok
Hasonlóan az elősző esethez,

$$\cos^{2n+1}(x)\sin^k(x) = \cos(x)\cos^{2n}(x)\sin^k(x) = \cos(x)(1 - \sin^2(x))^n \sin^k(x),$$

ami szorzások és az n-edik hatványra emelés után olyan összegre vezet, melynek (legfeljebb egy kivétellel) mindegyik tagja $f^n(x)f'(x)$ alakú.

Az $\int \cos^{2n+1}(x)\sin^{2k+1}(x)dx$ alakú integrálok
Ha az integrandus mind a sinus, mind a cosinus függvény páratlan hatványon tartalmazza, akkor teljesen mindegy, hogy melyiket alakítjuk át, de a fent ismeretett átalakítások valamelyikét célszerű alkalmazni.
Az $\int \cos^{2n}(x)\sin^{2k}(x)dx$ alakú integrálok
Ebben az esetben a

$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(x) &= \frac{1}{2}\sin(2x)\\ \sin^2(x) &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\\ \cos^2(x) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\end{aligned}$$

trigonometrikus azonosságok közül a megfelelőt használva az integrandus már olyan alakú lesz, melyet a korábban ismeretett módszerek valamelyikével kezelni tudunk.

1.4.4. Példa.

$$\int \sin^2(x)dx = \int \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)dx = \frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}+C.$$

1.4.3. Az $\int R(\sin(x),\cos(x))dx$ alakú integrálok

A sinus és cosinus függvények tetszőleges $R(\sin(x),\cos(x))$ racionális kifejezése esetén a

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

helyettesítés mindig célravezető. Ezen helyettesítés elvégzése után ugyanis,

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{és} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

amiből azt látjuk, hogy ezzel a helyettesítéssel az integrandus egy racionális törtfüggvénybe megy át.

1.4.5. Példa.

$$\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx \underset{t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int 1dt = t+C = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

1.4.4. Az $\int R(e^x)dx$ alakú integrálok

Abban az esetben, ha az integrandus az exponenciális függvény egy racionális törtfüggvény, a

$$t = e^x \qquad dx = \frac{1}{t}dt$$

helyettesítéssel az integrandus t-nek racionális törtfüggvényébe megy át.

1.4.6. Példa.

$$\int \frac{3}{e^x+e^{-x}}dx \underset{t=e^x}{=} \int \frac{3}{t+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{3}{1+t^2}dt = 3\operatorname{arctg}(t)+C = 3\operatorname{arctg}(e^x)+C.$$

1.4.5. Az $\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx$ alakú integrálok

Ha az integrandus x-nek és $\sqrt[n]{ax+b}$-nek racionális törtfüggvénye, akkor az

$$x = \frac{t^n-b}{a} \qquad \text{és} \qquad dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$$

helyettesítéssel az integrandus racionális törtfüggvénnyé alakítható.

1.4.7. Példa. *Az* $\int x\sqrt{5x+3}dx$ *integrál kiszámításához végezzük el az*

$$x = \frac{t^2-3}{5} \qquad \text{és} \qquad dx = \frac{2t}{5}dt$$

helyettesítéseket. Ekkor

$$\int x\sqrt{5x+3}dx = \int \frac{t^2-3}{5}\cdot t\cdot \frac{2t}{5}dt = \frac{2}{25}\int t^4-3t^2dt = \frac{2}{125}t^5-\frac{2}{25}t^3+C$$
$$= \frac{2}{125}\left(\sqrt{5x+3}\right)^5-\frac{2}{25}\left(\sqrt{5x+3}\right)^3+C$$

2. fejezet

Riemann-integrál

2.1. A Riemann-integrálhatóság fogalma

A továbbiakban legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény.

2.1.1. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$. A*

$$P = \{x_i \,|\, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b\}$$

*halmazt az $[a, b]$ **intervallum egy felosztásá**nak nevezzük.*

*Az x_i pontokat a P felosztás **osztópontjai**nak hívjuk, míg az $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ intervallumokat a **felosztás részintervallumai**nak mondjuk.*

Továbbá, a

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

jelölés bevezetése mellett a

$$\|P\| = \sup\{\Delta x_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$$

*számot a **felosztás finomságá**nak nevezzük.*

2.1.2. Definíció. *Felosztások egy $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatát **normális felosztássorozat**nak mondjuk, hogy*

$$\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0.$$

2.1.3. Definíció. *Legyen P_1, illetve P_2 az $[a, b]$ intervallum felosztásai. Abban az esetben, ha*

$$P_1 \subset P_2$$

*teljesül, azt mondjuk, hogy a P_2 felosztás **finomítás**a a P_1 felosztásnak.*

2.1.4. Definíció. *Legyen P az $[a, b]$ intervallum egy felosztása és*

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{és} \qquad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

2.1.1. Megjegyzés. *Az f függvény korlátossága miatt minden $i = 1, \ldots, n$ esetén léteznek és végesek.*

2.1.5. Definíció. *A fenti jelölések megtartása mellett legyenek*

$$\sigma(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$$

$$\Sigma(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$$

és

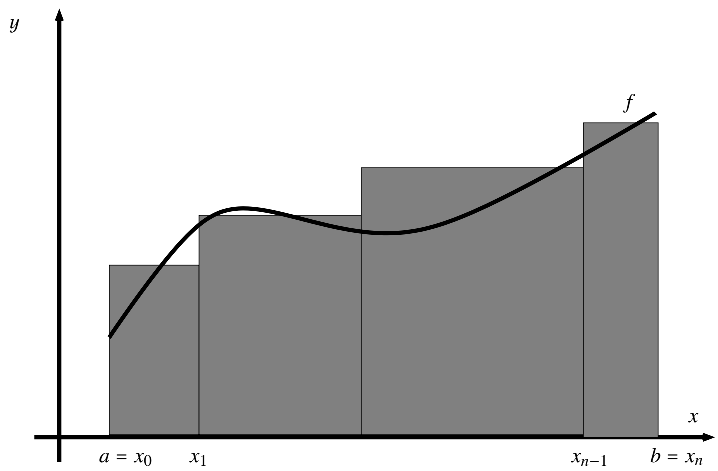
$$\mathcal{O}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta_i.$$

*Ezeket a mennyiségeket rendre az f függvény P felosztásához tartozó **alsó, felső**, illetve **oszcillációs összeg**ének nevezzük.*

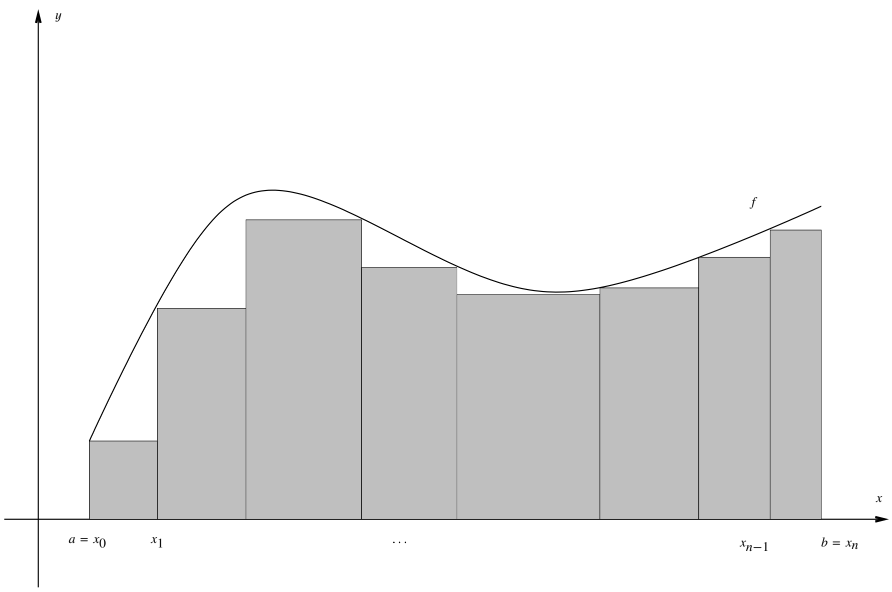
2.1.6. Definíció. *Továbbá, ha minden $i = 1, \dots, n$ esetén $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, akkor az*

$$\mathcal{I}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

számot az f függvény P felosztásához és a $\xi_1, \dots, \xi_n$ pontokhoz tartozó ***integrálközelítő összegé****nek mondjuk.*



2.1. ábra. Integrálközelítő összeg



2.2. ábra. Alsó integrálközelítő összeg

2.1.1. Állítás. — *Az $[a, b]$ intervallum tetszőleges P felosztása és tetszőleges $\xi_1, \dots, \xi_n \in [a, b]$ pontok esetén*

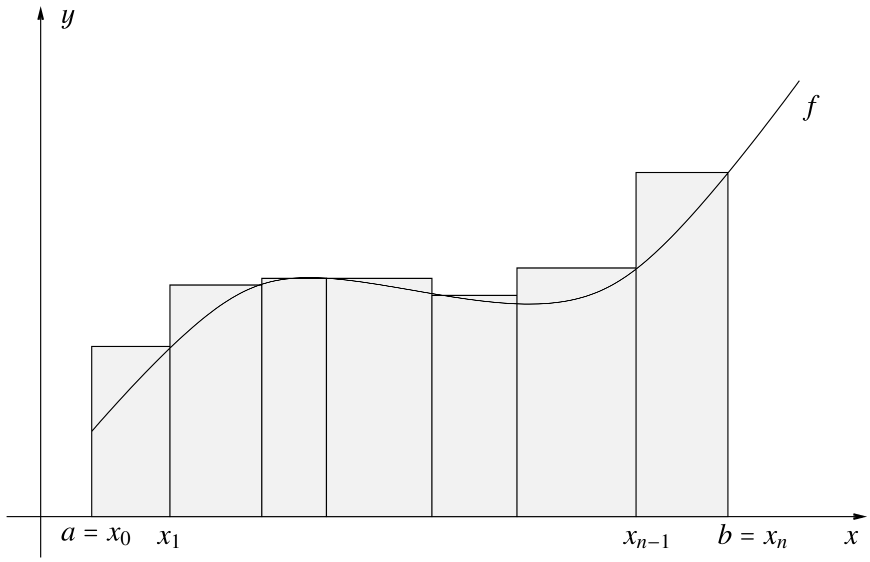
$$\sigma(f, P) \leq \mathcal{I}(f, P) \leq \Sigma(f, P).$$

— *Ha P_1 és P_2 olyan felosztásai az $[a, b]$ intervallumnak, hogy $P_1 \subset P_2$, akkor*

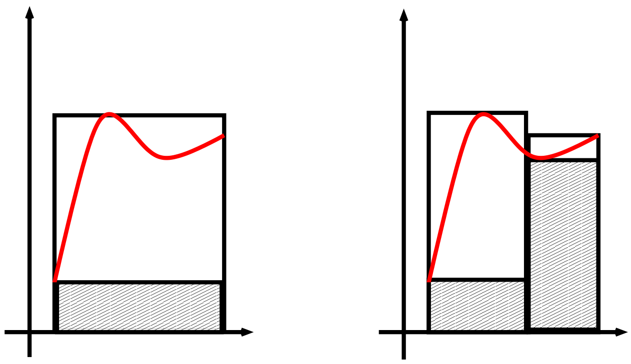
$$\sigma(f, P_1) \leq \sigma(f, P_2) \quad \textit{és} \quad \Sigma(f, P_2) \leq \Sigma(f, P_1).$$

— *Az $[a, b]$ intervallum tetszőleges P_1 és P_2 felosztásai esetén*

$$\sigma(f, P_1) \leq \Sigma(f, P_2).$$



2.3. ábra. Felső integrálközelítő összeg



2.1.7. Definíció. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ekkor az*

$$\underline{\mathcal{I}}(f) = \sup\{\sigma(f,P) \mid P \text{ az } [a,b] \text{ felosztása}\},$$

illetve az

$$\overline{\mathcal{I}}(f) = \inf\{\Sigma(f,P) \mid P \text{ az } [a,b] \text{ felosztása}\},$$

*számokat az f függvény $[a,b]$ intervallum feletti **alsó**, illetve **felső Darboux-integrál**jának nevezzük.*

2.1.2. Állítás. *Tetszőleges $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ esetén az $\underline{\mathcal{I}}(f)$, illetve az $\overline{\mathcal{I}}(f)$ Darboux-integrálok léteznek és végesek, valamint*

$$\underline{\mathcal{I}}(f) \le \overline{\mathcal{I}}(f)$$

teljesül.

2.1.1. Következmény. *Tetszőleges $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és az $[a,b]$ intervallum tetszőleges P felosztása esetén*

$$\sigma(f,P) \le \underline{\mathcal{I}}(f) \le \overline{\mathcal{I}}(f) \le \Sigma(f,P),$$

így,

$$0 \le \overline{\mathcal{I}}(f) - \underline{\mathcal{I}}(f) \le \mathcal{O}(f,P)$$

teljesül.

2.1.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény **Riemann-integrálható**, ha*

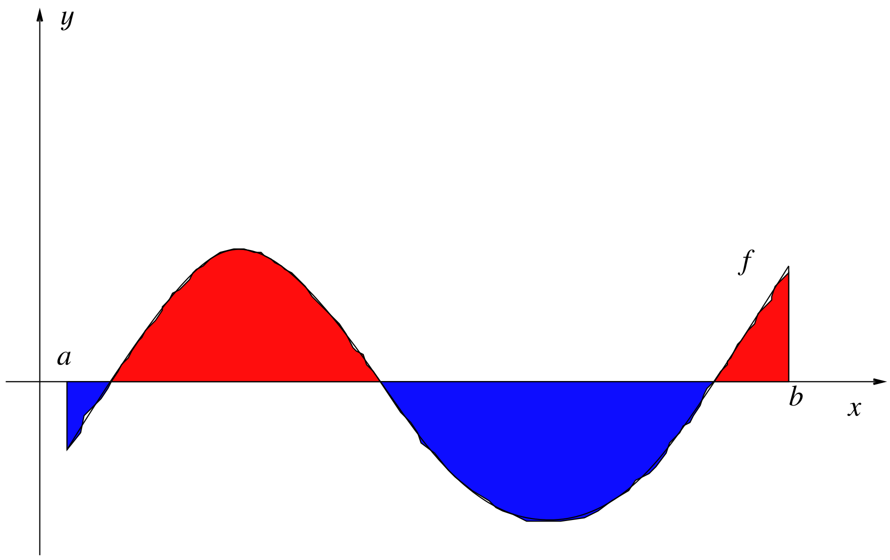
$$\underline{\mathcal{I}}(f) = \overline{\mathcal{I}}(f)$$

*teljesül. Ezt a közös értéket az f függvény $[a,b]$ intervallum feletti **Riemann-integrál**jának mondjuk és rá az*

$$\int_a^b f(x)dx$$

jelölést használjuk.

2.1.2. Megjegyzés (A Riemann-integrál geometriai jelentése). *Az $\int_a^b f(x)dx$ Riemann-integrál annak a tartománynak az **előjeles területe** , melyet az $y = f(x)$ görbe, az x-tengely, valamint az $x = a$ és $y = b$ egyenletű egyenes határol.*



2.4. ábra. A Riemann-integrál geometriai jelentése

2.1.1. Tétel (Darboux). *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$ úgy, hogy ha P olyan felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre $\|P\| < \delta$, akkor*

$$\left|\Sigma(f,P) - \overline{\mathfrak{I}}(f)\right| < \varepsilon \quad \text{és} \quad \left|\sigma(f,P) - \underline{\mathfrak{I}}(f)\right| < \varepsilon$$

teljesül.

2.1.2. Következmény. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor az $[a,b]$ intervallum tetszőleges $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ normális felosztássorozata esetén*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(f,P_k) = \underline{\mathfrak{I}}(f), \; \lim_{k\to\infty} \Sigma(f,P_k) = \overline{\mathfrak{I}}(f) \text{ és } \lim_{k\to\infty} \mathcal{O}(f,P_k) = \overline{\mathfrak{I}}(f) - \underline{\mathfrak{I}}(f)$$

teljesül.

2.1.1. Példa. *Az*

$$f(x) = x^2 \qquad (x \in [0,1])$$

függvény Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon.

Az előző következmény szerint az alsó és a felső Darboux-integrálok kiszámításához elegendő az alsó- és a felső-integrálközelítő összegeket normális felosztássorozatra meghatározni. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és tekintsük a

$$P_n = \left\{ \frac{i}{n} \mid i = 0,1,\ldots,n \right\}$$

felosztásokat. Ekkor

$$\|P_n\| = \frac{1}{n}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, vagyis a $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat normális. Továbbá, ha $n \in \mathbb{N}$ rögzített, akkor

$$M_i = \sup_{x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]} x^2 = \frac{i^2}{n^2} \quad \text{és} \quad m_i = \inf_{x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]} x^2 = \frac{(i-1)^2}{n^2} \qquad (i = 1,\ldots,n).$$

Ezért

$$\Sigma(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

és

$$\sigma(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

Mindezekből

$$\overline{\mathfrak{I}}(f) = \lim_{n\to\infty} \Sigma(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

és

$$\underline{\mathfrak{I}}(f) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

adódik, vagyis

$$\overline{\mathfrak{I}}(f) = \underline{\mathfrak{I}}(f) = \frac{1}{3},$$

ami azt jelenti, hogy az f függvény Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon és

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

2.1.2. Példa. *Az*

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvény nem Riemann-integrálható a $[0,1]$ *intervallumon.*

Az előző következmény szerint az alsó és a felső Darboux-integrálok kiszámításához elegendő az alsó- és a felső-integrálközelítő összegeket normális felosztássorozatra meghatározni. Legyen $n \in \mathbb{N}$ *és tekintsük a*

$$P_n = \left\{ \frac{i}{n} \mid i = 0, 1, \ldots, n \right\}$$

felosztásokat. Ekkor

$$\|P_n\| = \frac{1}{n}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ *esetén, vagyis a* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *felosztássorozat normális. Továbbá, ha* $n \in \mathbb{N}$ *rögzített, akkor*

$$M_i = \sup_{x\in\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1 \quad \text{és} \quad m_i = \inf_{x\in\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ezért

$$\Sigma(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\sigma(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \frac{1}{n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Mindezekből

$$\overline{\mathfrak{I}}(f) = \lim_{n\to\infty} \Sigma(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

és

$$\underline{\mathfrak{I}}(f) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

adódik, vagyis

$$\overline{\mathfrak{I}}(f) = 1 \neq 0 = \underline{\mathfrak{I}}(f)$$

ami azt jelenti, hogy az f függvény nem Riemann-integrálható a $[0,1]$ *intervallumon.*

2.2. A Riemann-integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

2.2.1. Tétel (Oszcillációs kritérium). *Legyen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *korlátos függvény. Az f függvény* ***akkor, és csakis akkor*** *Riemann-integrálható, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén van olyan P felosztása az* $[a,b]$ *intervallumnak, melyre*

$$\mathcal{O}(f, P) < \varepsilon$$

teljesül.

2.2.2. Tétel. *Legyen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *korlátos függvény. Az f függvény* ***akkor, és csakis akkor*** *Riemann-integrálható, ha van olyan I valós szám, hogy bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén van olyan P felosztása az* $[a,b]$ *intervallumnak, melyhez tartozó* $\mathfrak{I}(f, P)$ *integrálközelítő összegre*

$$|\mathfrak{I}(f, P) - I| < \varepsilon$$

teljesül. Továbbá, ebben az esetben

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

2.2.3. Tétel. *Legyen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény. Ekkor f Riemann-integrálható.*

2.2.4. Tétel. *Legyen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monoton függvény. Ekkor f Riemann-integrálható.*

2.2.5. Tétel. *Legyen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, mely legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok* $[a,b]$*-beli pontban nem folytonos. Ekkor f Riemann-integrálható.*

2.3. A Riemann-integrál tulajdonságai

2.3.1. Tétel (Riemann-integrál és műveletek). *Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor*

— *az $f+g$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

— *a $\lambda \cdot f$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx;$$

— *ha minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) \le g(x)$ teljesül, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx;$$

— *ha $[c,d] \subset [a,b]$, akkor az f függvény Riemann-integrálható a $[c,d]$ intervallumon is;*

— *ha $c \in]a,b[$, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

— *ha $K \ge 0$ olyan, hogy*

$$|f(x)| \le K \qquad (x \in [a,b]),$$

akkor

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le K(b-a).$$

2.3.1. Megjegyzés. *Az előző tételben szereplő első és második állítást együttesen a Riemann-integrál* ***linearitásá****nak, a harmadikat a Riemann-integrál* ***monotonitásá****nak, míg az ötödiket a Riemann-integrál* ***intervallum-additivitásá****nak mondjuk.*

2.3.2. Tétel (Középértéktétel). *Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények. Tegyük fel továbbá, hogy az f függvény folytonos, a g függvény pedig nemnegatív. Ekkor van olyan $\xi \in]a,b[$, melyre*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

teljesül.

2.3.1. Következmény (Középértéktétel II.). *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, Riemann-integrálható függvény. Ekkor van olyan $\xi \in]a,b[$, melyre*

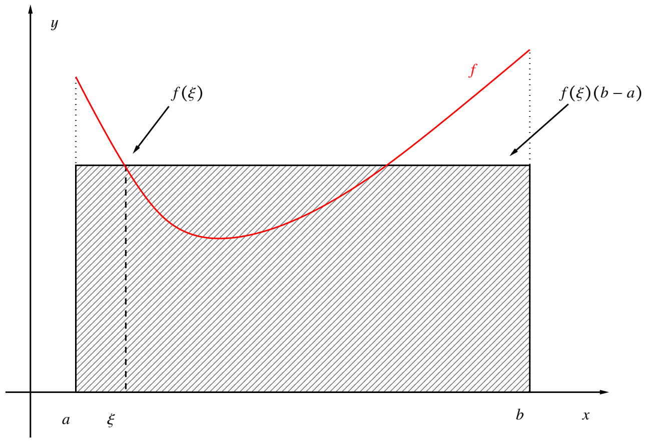
$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

teljesül.

2.3.3. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az $|f|$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

teljesül.



2.5. ábra. A Középértéktétel geometriai jelentése

2.4. A Newton–Leibniz-formula

2.4.1. Definíció. *Legyen* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a,b])$$

módon megadott $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvényt az* f *függvény* ***felsőhatárfüggvény****ének vagy* ***integrálfüggvény****ének hívjuk.*

2.4.1. Tétel. *Legyen* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az* f *függvény felsőhatárfüggvénye folytonos az* $[a,b]$ *intervallumon.*

2.4.2. Tétel. *Legyen* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *egy Riemann-integrálható függvény. Ha az* f *függvény folytonos az* $]a,b[$ *intervallum valamely* x^* *pontjában, akkor ebben a pontban az* f *függvény* F *felsőhatárfüggvénye differenciálható és*

$$F'(x^*) = f(x^*).$$

2.4.3. Tétel (Newton–Leibniz). *Legyen* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *egy folytonos függvény és jelölje* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *az* f *függvény egy primitív függvényét. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

2.4.1. Példa. *Számítsuk ki az*

$$\int_e^{e^2} \frac{2}{x} dx$$

integrált.

A Newton–Leibniz formula jelöléseivel

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad F(x) = 2\ln|x| \quad \text{és} \quad a = e, \quad b = e^2,$$

így

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = [2\ln|x|]_e^{e^2} = \ln|e^2| - \ln|e| = 4 - 2 = 2.$$

2.4.4. Tétel (Parciális integrálás tétele). *Legyenek* $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *olyan differenciálható függvények, melyek deriváltjai Riemann-integrálhatóak. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

2.4.2. Példa.

$$\int_0^2 xe^x = ?$$

Az integrál kiszámításához alkalmazzuk az előző tételt az

$$f(x) = x \quad \textit{és} \quad g'(x) = e^x$$

választással, ekkor

$$f'(x) = 1 \quad \textit{és} \quad g(x) = e^x,$$

így

$$\int_0^2 xe^x dx = [xe^x]_0^2 - \int_0^2 1 \cdot e^x dx = [xe^x]_0^2 - [e^x]_0^2 = \left(2e^2 - 0\right) - \left(e^2 - 1\right) = e^2 + 1.$$

2.4.5. Tétel (Helyettesítéses integrálás tétele). *Legyen $\varphi\colon [a,b] \to [A,B]$ egy olyan szigorúan monoton növekedő, folytonosan differenciálható függvény, melyre $\varphi(a) = A$ és $\varphi(b) = B$. Ha az $f\colon [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor*

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt.$$

2.4.3. Példa.

$$\int\limits_1^2 (3x+4)^3 dx = ?$$

Alkalmazzuk az előző tételt a

$$\varphi(t) = \frac{t-4}{3}$$

választással, ekkor

$$\varphi'(t) = \frac{1}{3}, \quad \textit{és} \quad \varphi^{-1}(t) = 3t + 4,$$

továbbá

$$\varphi(a) = 1 \quad \textit{és} \quad \varphi(b) = 2,$$

ezért $a = 7$ és $b = 10$, így

$$\int\limits_1^2 (3x+4)^3 dx = \int\limits_7^{10} t^3 \cdot \frac{1}{3} dt = \left[\frac{t^4}{12}\right] = \frac{10^4 - 7^4}{12}.$$

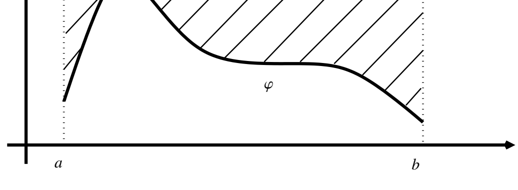
A Riemann-integrál néhány alkalmazása

Területszámítás

Legyenek $\varphi, \psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, melyekre

$$\varphi(x) \le \psi(x) \qquad (x \in [a,b])$$

teljesül és jelölje S annak a síkidomnak a területét, melyet az $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ görbék valamint az $x = a$ és $x = b$ egyenesek határolnak.



Ekkor az S síkidom területe

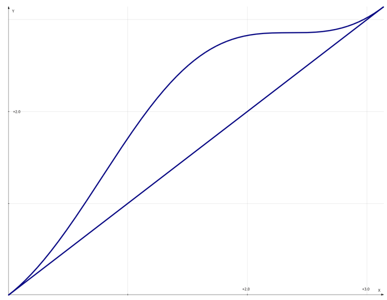
$$A(S) = \int_a^b \psi(x) - \varphi(x) dx.$$

2.4.4. Példa. *Legyenek*

$$\varphi(x) = x \qquad \textit{és} \qquad \psi(x) = x + \sin^2(x) \qquad (x \in [0, \pi]).$$

Ekkor $\varphi(x) \leq \psi(x)$ *teljesül minden* $x \in [0, \pi]$ *esetén, így a* φ, ψ *görbék, illetve az* $x = 0$ *és* $x = \pi$ *egyenesek által meghatározott tartomány területe*

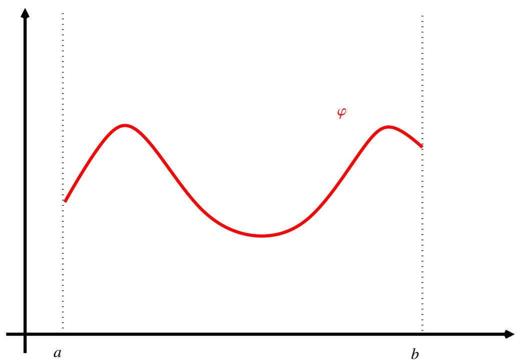
$$T(S) = \int_0^\pi (x + \sin^2(x)) - x dx = \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$



Görbék ívhossza

Legyen $\varphi \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható függvény, ekkor a φ függvény által meghatározott görbedarab ívhossza,

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx.$$

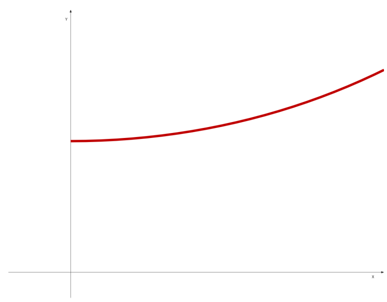


2.4.5. Példa. *Legyen* $\alpha > 0$ *rögzített és*

$$\varphi(x) = \alpha \cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right) \qquad (x \in [0, \alpha]).$$

Ekkor a $\varphi \colon [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ *folytonosan differenciálható függvény által meghatározott görbedarab hossza,*

$$L(\varphi) = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (\varphi'(x)^2)} dx = \int_0^\alpha \sqrt{1 + \left(\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)} dx = \int_0^\alpha \cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \left[\alpha \sinh\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]_0^\alpha = \alpha \cdot \sinh(1).$$



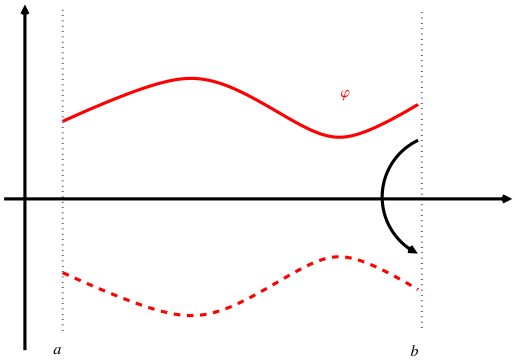
Forgástestek térfogata

Legyen $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és forgassuk meg az x tengely körül az

$$a \le x \le b \qquad 0 \le y \le \varphi(x)$$

tartományt. A forgás során súrolt pontok egy S forgástestet alkotnak, melynek térfogata

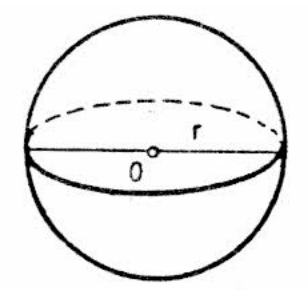
$$V(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(x)dx.$$



2.4.6. Példa. *Legyen $r > 0$ adott és*

$$\varphi(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (x \in [-r,r]).$$

Ekkor a φ függvény x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest éppen az origó középpontú r sugarú gömb.



A fentiek szerint ennek a forgástestnek a térfogata

$$V(S) = \pi \int_{-r}^{r} \varphi^2(x)dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

2.5. Improprius integrálok

2.5.1. Definíció. *Legyen a valós, b pedig bővített valós szám, úgy, hogy $a < b$ teljesül. Legyen továbbá $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely minden $x \in [a,b[$ esetén Riemann-integrálható az $[a,x]$ intervallumon. Értelmezzük az $F\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ függvényt az*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a,b[)$$

formulával. Ha az F függvénynek a b pontban létezik és véges a baloldali határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ ***improprius integrál konvergens*** *és ebben az esetben*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b-} F(x).$$

2.5.2. Definíció. *Legyen a bővített valós, b pedig valós szám, úgy, hogy $a < b$ teljesül. Legyen továbbá $f\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely minden $x \in]a, b]$ esetén Riemann-integrálható az $[x, b]$ intervallumon. Értelmezzük az $F\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt az*

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt \qquad (x \in]a, b])$$

formulával. Ha az F függvénynek az a pontban létezik és véges a jobboldali határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ ***improprius integrál konvergens*** *és ebben az esetben*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a+} F(x).$$

2.5.3. Definíció. *Legyenek a, b bővített valós számok úgy, hogy $a < b$. Legyen továbbá $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely az $]a, b[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálható. Tegyük fel, hogy van olyan $c \in]a, b[$, mely esetén az*

$$\int_a^c f(x)dx \qquad \text{és az} \qquad \int_c^b f(x)dx$$

improprius integrálok konvergensek. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ improprius integrál is konvergens és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2.5.1. Tétel (Összehasonlító kritérium I.). *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\varphi, \Phi\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek az $[a, +\infty[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálhatóak. Tegyük fel továbbá, hogy*

$$|\varphi(x)| \leq \Phi(x) \qquad (x \in [a, +\infty[)\,.$$

Ekkor, ha az $\int_a^{+\infty} \Phi(x)dx$ improprius integrál konvergens, akkor az $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ improprius integrál abszolút konvergens.

2.5.2. Tétel (Összehasonlító kritérium II.). *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\varphi, \psi\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek az $[a, +\infty[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálhatóak. Tegyük fel továbbá, hogy $\psi(x) > 0$ teljesül minden $x \in [a, +\infty[$ esetén és létezik és nullától különböző a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

határérték. Ebben az esetben az $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ és az $\int_a^{+\infty} \psi(x)dx$ improprius integrálok egyszerre konvergensek, illetve divergensek.

2.5.3. Tétel. *Legyenek $a, p \in \mathbb{R}$ és $\varphi\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely az $[a, +\infty[$ intervallum minden zárt részintervallumán Riemann-integrálható. Tegyük fel továbbá, hogy létezik és nullától különböző a*

$$\lim_{x\to+\infty} x^p \varphi(x)$$

határérték. Ekkor

— *$p > 1$ esetén az $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ improprius integrál konvergens;*

— $p \leq 1$ esetén az $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ improprius integrál divergens.

2.5.4. Tétel. *Legyenek $f, \varphi\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, melyekre*

(i) $x \to +\infty$ *esetén a* φ *függvény monoton csökkenően nullához konvergál;*

(ii) az

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a, +\infty[)$$

módon megadott $F\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ függvény korlátos.

Ekkor az

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

improprius integrál konvergens, azonban abszolút konvergencia általában nem teljesül.

2.5.1. Következmény. *Legyenek $a, \alpha \in]0, +\infty[$ tetszőlegesek. Ekkor az*

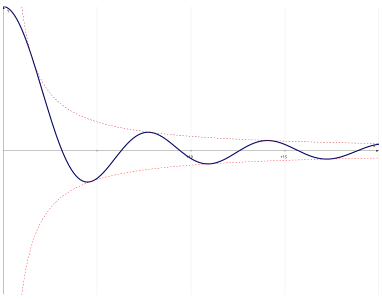
$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} dx \quad \text{és az} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$$

integrálok konvergensek.

2.5.1. Példa. *Az előző következmény alkalmazásával azonnal adódik, hogy az*

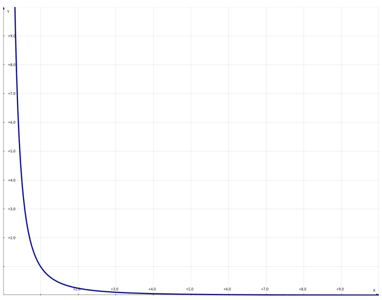
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

improprius integrál konvergens.



2.5.2. Példa.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1,$$



ugyanis tetszőleges $x \in [1, +\infty[$ esetén az

$$f(t) = \frac{1}{t^2} \qquad (t \in [1, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[1, x]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \left[\frac{1}{t^2}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1 = 1 - \frac{1}{x},$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1,$$

vagyis az $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} = 1.$$

2.5.3. Példa.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty,$$

ugyanis tetszőleges $x \in [1, +\infty[$ *esetén az*

$$f(t) = \frac{1}{t} \qquad (t \in [1, x])$$

függvény Riemann-integrálható az $[1, x]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt = [\ln|x|]_1^x = \ln|x| - \ln|1| = \ln|x|,$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \ln|x| = +\infty,$$

vagyis az $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ *improprius integrál divergens.*

2.5.4. Példa.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = +\infty,$$

ugyanis tetszőleges $x \in [0, 1[$ *esetén az*

$$f(t) = \frac{1}{t} \qquad (t \in [x, 1])$$

függvény Riemann-integrálható az $[x, 1]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_x^1 f(t)dt = \int_x^1 \frac{1}{t}dt = [\ln|t|]_x^1 = \ln|1| - \ln|x| = -\ln|x|$$

ezért

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} (-\ln|x|) = +\infty,$$

vagyis az $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ *improprius integrál divergens.*

2.5.5. Példa.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2,$$

ugyanis tetszőleges $x \in [0,1[$ *esetén az*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad (t \in [x,1])$$

függvény Riemann-integrálható az $[x,1]$ *intervallumon. Továbbá,*

$$F(x) = \int_x^1 f(t)dt = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$$

ezért

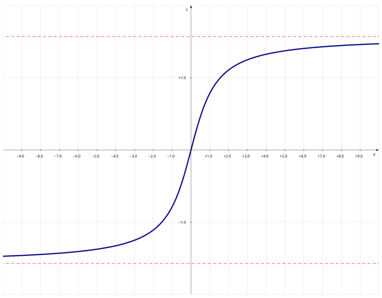
$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} \left(2 - 2\sqrt{x}\right) = 2,$$

vagyis az $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ *improprius integrál konvergens és*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2.$$

2.5.6. Példa.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi,$$



ugyanis tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *esetén az*

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad (t \in [a,b])$$

függvény Riemann-integrálható az $[a,b]$ *intervallumon és*

$$\int_a^b \frac{1}{1+t^2}dt = [\operatorname{arctg}(t)]_a^b = \operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a),$$

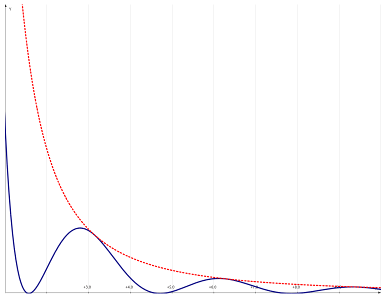
így

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} (\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(a)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

2.5.7. Példa. *Az*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^2}dx$$

improprius integrál abszolút konvergens.



Ugyanis tetszőleges $x \in]0, +\infty[$ *esetén*

$$\left|\frac{\cos^2(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

teljesül, valamint a 2.5.2. Példa szerint

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

2.5.8. Példa. *Az*

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x - e^{-x}} dx$$

improprius integrál divergens, hiszen minden $x \in [3, +\infty[$ *esetén*

$$\frac{1}{x - e^{-x}} > \frac{1}{x}$$

teljesül. Továbbá,

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty,$$

amiből az Összehasonlító kritérium felhasználásával adódik a fenti improprius integrál divergenciája.

2.5.9. Példa. *Az*

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

improprius integrál konvergens, hiszen, ha $x \in]1, +\infty[$, *akkor*

$$e^{-x^2} < e^{-x}.$$

Továbbá, az

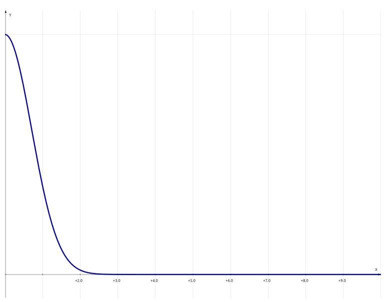
$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$$

improprius integrál konvergens.

2.5.10. Példa. *Az*

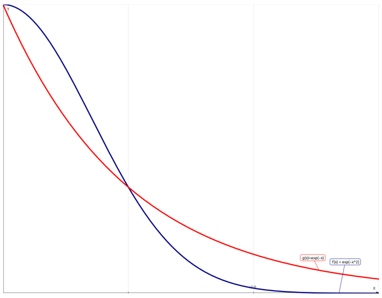
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

improprius integrál konvergens.



Ebben az esetben azonban nem használható az előző gondolatmenet, hiszen, ha $x \in [0, 1]$, *akkor*

$$e^{-x^2} > e^{-x}.$$



Használjuk azt, hogy

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Az előző példa alapján az

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

improprius integrál konvergens. Továbbá, minden $x \in [0, 1]$ *esetén*

$$e^{-x^2} \leq 1,$$

így

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 1 dx = 1,$$

amiből

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty$$

adódik.

3. fejezet

Vektorterek, euklideszi terek

3.1. Vektorterek, euklideszi terek

3.1.1. Definíció. *Legyen X egy nemüres halmaz, melyen értelmezve van egy $+ \subset X \times X$ és egy $\cdot \subset X \times \mathbb{R}$, melyeket rendre összeadásnak, illetve skalárral való szorzásnak nevezünk, úgy, hogy teljesülnek az alábbiak*

(i) minden $x, y \in X$ esetén $x + y = y + x$ (kommutativitás);

(ii) minden $x, y, z \in X$ esetén $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asszociativitás);

(iii) létezik egy olyan 0-val jelölt elem X-ben, melyre minden $x \in X$ esetén $x + 0 = x$ teljesül (zéruselem létezése);

(iv) minden $x \in X$ esetén létezik olyan $-x$-szel jelölt X-beli elem, hogy $x + (-x) = 0$ (inverzelem létezése);

(v) minden $x \in X$ esetén $1 \cdot x = x$;

(vi) tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ konstansok és $x \in X$ esetén $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$;

(vii) tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $x, y \in X$ esetén $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ és $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ teljesül.

*Ebben az esetben azt mondjuk, hogy $(X, +, \cdot)$ **vektortér** vagy azt, hogy **lineáris tér** $\mathbb{R}$ felett. Az X halmaz elemeire a továbbiakban a **vektorok**, míg $\mathbb{R}$ elemeire a **skalárok** elnevezést fogjuk használni.*

3.1.2. Definíció. *Legyen X egy vektortér. Azt mondjuk, hogy a $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény **belsőszorzat** vagy **skaláris szorzat** X-en, ha teljesülnek a következők.*

(i) tetszőleges $x, y \in X$ esetén $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

(ii) minden $x, y, z \in X$ esetén $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

(iii) minden $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

(iv) tetszőleges $x \in X$ esetén $\langle x, x \rangle \geq 0$ és $\langle x, x \rangle = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$.

*Azt mondjuk továbbá, hogy az X vektortér **belsőszorzattér** vagy **euklideszi tér**, ha X-en adva van egy belsőszorzat.*

3.1.1. Példa. *Az $X = \mathcal{C}([a, b])$ téren az*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

formula belsőszorzat definiál.

3.1.2. Példa. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, ekkor az $X = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ lineáris téren az*

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A \cdot B) \qquad (A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$$

formula belsőszorzatot ad meg.

3.1.3. Definíció. *Legyen X egy belsőszorzattér, ekkor az $x \in X$ elem **normá**ján az*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

számot értjük.

3.1.1. Állítás (A norma tulajdonságai). *Legyen X egy belsőszorzattér és X elemeinek a normáját értelmezzük az előző definíció szerint. Ekkor*

(i) tetszőleges $x \in X$ esetén $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$;

(ii) minden $x \in X$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

(iii) bármely $x, y \in X$ esetén $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

3.2. Az $\mathbb{R}^n$ tér

3.2.1. Definíció. *Legyen $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ és ha $n \in \mathbb{N}$, akkor legyen*

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

*Az $\mathbb{R}^n$ tér elemeit **rendezett szám** n**-esek**nek nevezzük. Ha $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor az x_i valós számot az x vektor **i-edik koordinátájá**nak mondjuk, $i = 1, \ldots, n$.*

3.2.1. Állítás. *Az $\mathbb{R}^n$ térben értelmezzük a következő két műveletet,*

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

ha $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ és

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

ha $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ lineáris tér.

3.2.2. Állítás. *Ha $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor legyen*

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots x_n y_n.$$

Ekkor $\langle \cdot, \cdot \rangle$ belsőszorzat a $\mathbb{R}^n$ téren.

3.2.2. Definíció. *Legyenek $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, ekkor az*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

*számot az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor **normá**jának hívjuk, hogy a*

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

*mennyiséget az x és az y vektorok **távolság**ának mondjuk.*

3.2.3. Definíció. *Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ és $r > 0$, ekkor a*

$$G(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\},$$

illetve a

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\},$$

*halmazokat rendre az x_0 pont r sugarú **nyílt**, illetve **zárt környezet**einek nevezzük.*

3.2.4. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont **belső pont**ja D-nek, ha van olyan $r > 0$, hogy $G(x_0, r) \subset D$ teljesül. A D halmaz belső pontjainak a halmazára a továbbiakban a D° jelölést fogjuk használni.*

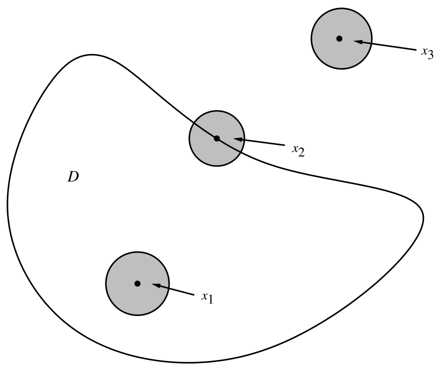
3.2.5. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pont **külső pont**ja D-nek, ha x_0 belső pontja $\mathbb{R}^n \setminus D$-nek.*

3.2.6. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont **határpont**ja D-nek, ha tetszőleges $r > 0$ esetén $G(x_0, r) \cap D \neq \emptyset$ és $G(x_0, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus D) \neq \emptyset$ teljesül. A D halmaz belső pontjainak a halmazára a továbbiakban a ∂D jelölést fogjuk használni.*

3.2.7. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pont **érintkezési pont**ja D-nek, ha tetszőleges $r > 0$ esetén $G(x_0, r) \cap D \neq \emptyset$.*

*Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pont a D halmaznak **torlódási pont**ja, ha minden $r > 0$ esetén $G(x_0, r) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ teljesül. A D halmaz torlódási pontjai halmazára a továbbiakban a D' jelölést fogjuk használni.*

*Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont a D halmaznak **izolált pont**ja, ha van olyan $r > 0$, hogy $G(x_0, r) \cap D = \{x_0\}$ teljesül.*



3.1. ábra. Az x_1 pont belső, az x_2 pont határ-, az x_3 pont pedig külső pontja a D halmaznak

3.2.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $D \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **nyílt**, ha a D halmaz minden pontja belső pont. Azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **zárt**, ha H tartalmazza az összes torlódási pontját.*

3.2.1. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) A D halmaz nyílt.

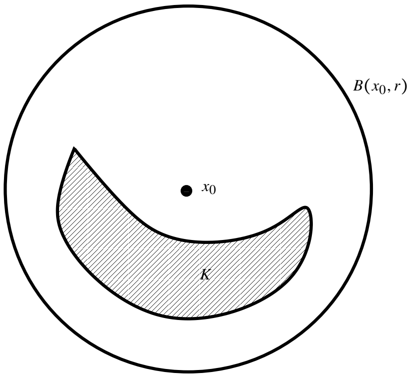
(ii) Az $\mathbb{R}^n \setminus D$ halmaz zárt.

3.2.9. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **korlátos**, ha van olyan $r > 0$ és olyan $x_0 \in \mathbb{R}^n$, hogy $K \subset G(x_0, r)$ teljesül.*

3.2.2. Tétel (Bolzano–Weierstrass). *Az $\mathbb{R}^n$ tér minden korlátos, végtelen halmazának van torlódási pontja.*

3.2.10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $D \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **kompakt**, ha a D halmaz minden, nyílt halmazokból álló lefedéséből kiválasztható véges lefedés.*

3.2.3. Tétel (Heine–Borel). *A $D \subset \mathbb{R}^n$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*



3.2. ábra. Korlátos halmaz

3.3. Sorozatok az $\mathbb{R}^n$ térben

3.3.1. Definíció. *Legyen $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^k$-**beli sorozat**on egy a természetes számok halmazán értelmezett $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ függvényt értünk.*

Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $f(n)$ helyett általában az x_n jelölést használjuk, magára a sorozatra pedig az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jelölést alkalmazzuk. Továbbá, az x_n $\mathbb{R}^k$-beli vektort az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **sorozat n-edik elemé**nek mondjuk.

3.3.2. Definíció. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy sorozat $\mathbb{R}^k$-ban. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **sorozat határértéke (vagy limesze)** $x \in \mathbb{R}^k$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N > 0$ szám, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$, akkor*

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Erre a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ jelölést használjuk.

3.3.3. Definíció. *Egy sorozatot **konvergens**nek nevezünk, ha van olyan $x \in \mathbb{R}$, ami a szóban forgó sorozat limesze. Ellenkező esetben **divergens** sorozatról beszélünk.*

3.3.1. Tétel (A határérték egyértelműsége). *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan sorozat az $\mathbb{R}^k$ térben, mely egyaránt tart az x és y $\mathbb{R}^k$-beli elemekhez. Ekkor $x = y$.*

3.3.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **részsorozat**a, ha létezik egy olyan $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton függvény, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$y_n = x_{\varphi(n)}$$

teljesül.

3.3.2. Tétel. *Legyen $x \in \mathbb{R}^k$ és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan sorozat $\mathbb{R}^k$-ban, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ekkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat tetszőleges $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozata esetén*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x$$

teljesül.

3.3.5. Definíció. *Legyen $k \in \mathbb{N}$, az $\mathbb{R}^k$-beli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot **korlátos**nak nevezzük, ha az*

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^k$$

halmaz korlátos.

3.3.3. Tétel (Konvergencia $\Longrightarrow$ korlátosság). *Bármely konvergens $\mathbb{R}^k$-beli sorozat korlátos.*

3.3.4. Tétel (Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az $\mathbb{R}^k$ tér minden korlátos sorozatának létezik konvergens részsorozata.*

3.3.6. Definíció. *Legyen $k \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat* ***Cauchy-sorozat****, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $N > 0$ szám, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N$, akkor*

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

3.3.5. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium). *Egy $\mathbb{R}^k$-beli sorozat* ***akkor és csakis akkor*** *konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

3.3.6. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

— *az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke x;*

— *minden $i = 1, \ldots, k$ esetén az $(x_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ úgynevezett i-edik koordinátasorozat konvergens és határértéke $x^{(i)}$,*

ahol $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(k)})$ és $x_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(k)})$, $(n \in \mathbb{N})$.

4. fejezet

Többváltozós és vektorértékű függvények folytonossága

4.1. Alapfogalmak

4.1.1. Definíció. *Legyenek $k, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^k$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény* ***folytonos az*** *$x_0 \in D$* ***pontban****, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ olyan, hogy $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^k} < \delta$, akkor*

$$\|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

Ha az f függvény a D halmaz minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény ***folytonos a*** *D* ***halmazon****.*

4.1.1. Tétel (Átviteli elv). *Legyenek $k, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^k$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Az f függvény akkor és csakis akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D halmazbeli elemekből álló, x_0-hoz konvergáló sorozat esetén az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $f(x_0)$-hoz konvergál.*

4.1.1. Megjegyzés. *A fenti definíció jelölései és feltételei mellett, az f függvény akkor és csakis akkor nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D halmazbeli elemekből álló, x_0-hoz konvergáló sorozat, melyre az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem $f(x_0)$-hoz konvergál.*

4.1.1. Példa. *Az*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az $\mathbb{R}^2$ halmaz minden pontjában folytonos.

Legyen ugyanis $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges és $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges, olyan $\mathbb{R}^2$-beli sorozat, mely az (x_0, y_0) ponthoz konvergál. Ebben az esetben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

teljesül, ezért

$$f(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2 \xrightarrow{n\to\infty} x_0^2 + y_0^2 = f(x_0, y_0).$$

Így, az Átviteli elv miatt az f függvény folytonos az (x_0, y_0) pontban. Mivel az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pont tetszőleges volt, ezért az f függvény az $\mathbb{R}^2$ halmaz minden pontjában folytonos.

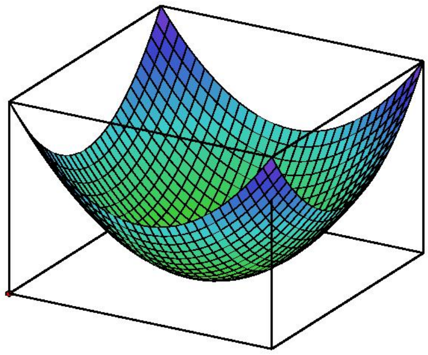
4.1.2. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor f nem folytonos a $(0, 0)$ pontban, azonban az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ halmaz minden pontjában folytonos.

Tekintsük ugyanis az

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$



4.1. ábra. Az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény

sorozatot. Ekkor $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$, *továbbá,*

$$f(x_n, y_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Ez pedig az Átviteli elv értelmében azt jelenti, hogy az f függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

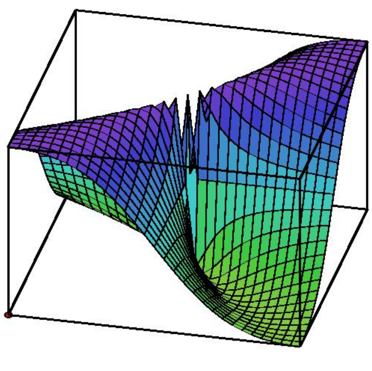
Legyen most $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tetszőleges és $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges, olyan $\mathbb{R}^2$-beli sorozat, mely az (x_0, y_0) ponthoz konvergál. Ebben az esetben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

teljesül továbbá $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével, ezért

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2} = f(x_0, y_0).$$

Így, az Átviteli elv miatt az f függvény folytonos az (x_0, y_0) pontban. Mivel az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pont tetszőleges volt, ezért az f függvény $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ halmaz minden pontjában folytonos.



4.2. ábra. A 4.1.2. Példában szereplő függvény

4.2. Folytonosság és műveletek

4.2.1. Tétel. *Legyenek $k, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^k$ nemüres halmaz. Ha az $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ függvények folytonosak az $x_0 \in D$ pontban, akkor* *(i)* az $f + g$ *függvény is folytonos az* x_0 *pontban;*

(ii) *tetszőleges* $\lambda \in \mathbb{R}$ *esetén a* λf *függvény is folytonos az* x_0 *pontban;*

4.2.2. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). *Legyenek* $n, m, k \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *nemüres halmaz és legyenek* $f : D \to \mathbb{R}^m$ *és* $g : f(D) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *adott függvények. Ha az* f *függvény folytonos az* $x_0 \in D$ *pontban, a* g *pedig az* $f(x_0) \in f(D)$ *pontban, akkor a* $g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ *függvény folytonos az* x_0 *pontban.*

4.3. Folytonosság és topologikus fogalmak

4.3.1. Tétel. *Legyen* $D \subset \mathbb{R}^k$ *nemüres halmaz, ekkor az* $f : D \to \mathbb{R}^m$ *függvény pontosan akkor folytonos a* D *halmazon, ha tetszőleges* $V \subset \mathbb{R}^m$ *nyílt halmaz esetén az* $f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^k$ *halmaz nyílt.*

4.3.2. Tétel. *Legyen* $D \subset \mathbb{R}^k$ *kompakt halmaz,* $f : D \to \mathbb{R}^m$ *folytonos függvény. Ekkor az* $f(D) \subset \mathbb{R}^m$ *halmaz kompakt.*

4.3.1. Definíció. *Legyen* $D \subset \mathbb{R}^k$ *nemüres halmaz,* $f : D \to \mathbb{R}^m$. *Azt mondjuk, hogy az* f *függvény a* D ***halmazon egyenletesen folytonos****, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén van olyan* $\delta > 0$ *úgy, hogy ha* $x, y \in D$ *olyanok, hogy* $\|x - y\|_{\mathbb{R}^k} < \delta$*, akkor*

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

4.3.1. Állítás (Egyenletes folytonosság $\Longrightarrow$ folytonosság). *Legyen* $D \subset \mathbb{R}^k$ *nemüres halmaz,* $f : D \to \mathbb{R}^m$. *Ha az* f *függvény a* D *halmazon egyenletesen folytonos, akkor* f *a* D *halmaz minden pontjában folytonos.*

4.3.3. Tétel. *Legyen* $D \subset \mathbb{R}^k$ *kompakt halmaz,* $f : D \to \mathbb{R}^m$ *folytonos függvény. Ekkor az* f *függvény egyenletesen folytonos a* D *halmazon.*

5. fejezet

Többváltozós és vektorértékű függvények határértéke

5.1. Alapfogalmak

5.1.1. Definíció. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek* **az x_0 pontban a határértéke** *α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$, akkor $\|f(x) - \alpha\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*

5.1.1. Tétel (Átviteli elv). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, illetve $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Ekkor $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ pontosan akkor teljesül, ha tetszőleges $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ D–beli, x_0–hoz konvergáló sorozat esetén $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$ teljesül.*

5.2. Határérték és műveletek

5.2.1. Tétel (Határérték és műveletek). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D'$ $f, g : D \to \mathbb{R}^m$, illetve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$. Ha az f és g függvényeknek létezik a határértéke az x_0 pontban és*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \quad \text{és} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \beta,$$

akkor

(i) az $f + g$ függvénynek is létezik az x_0 pontban a határértéke

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta;$$

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda \cdot f$ függvénynek is létezik az x_0 pontban a határértéke és

$$\lim_{x \to x_0} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \alpha.$$

5.2.2. Tétel (Határérték és folytonosság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ és $x_0 \in D$. Ekkor az f függvény pontosan akkor folytonos az x_0 pontban, ha létezik a $\lim_{x \to x_0} f(x)$ határérték, és*

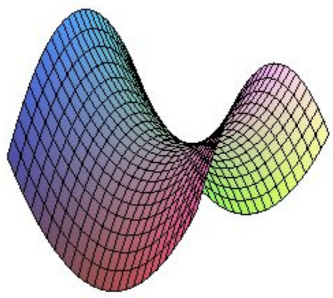
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

5.2.1. Példa.

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0.$$

A határérték kiszámításához az Átviteli elvet fogjuk használni, ezért legyen $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy tetszőleges $\mathbb{R}^2$-beli, a $(0, 0)$ ponthoz konvergáló sorozat. Ekkor

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n^4 - y_n^4}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{(x_n^2 + y_n^2) \cdot (x_n^2 - y_n^2)}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n \to \infty} \left(x_n^2 - y_n^2\right) = 0.$$



5.1. ábra. Az $f(x,y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ függvény

5.2.2. Példa. *Az*

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{xy}\right) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq 0\right)$$

függvénynek nem létezik a $(0,0)$ pontban a határértéke.

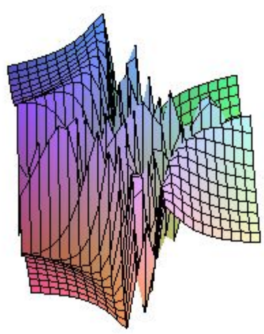
Ehhez tekintsük ugyanis az

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $\mathbb{R}^2$-beli, a $(0,0)$ ponthoz konvergáló sorozatot. Ekkor

$$f(x_n, y_n) = f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = \sin(n) \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Mivel a $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens, ezért azt kaptuk, hogy van olyan $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^2$-beli, a $(0,0)$ ponthoz konvergáló sorozat, melyre a függvényértékekből álló $(f(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens. Így, az Átviteli elv értelmében a fent megadott függvénynek nem létezik a határértéke a $(0,0)$ pontban.



5.2. ábra. Az $f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$ függvény

5.2.3. Példa.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\left(\frac{1}{y}\right) + y\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Legyen $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges $\mathbb{R}^2$-beli, a $(0,0)$ ponthoz konvergáló sorozat. Ekkor

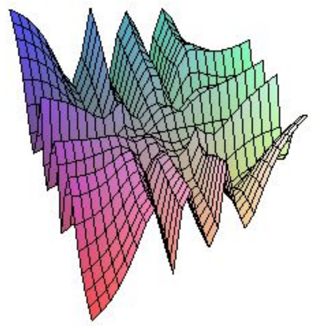
$$f(x_n, y_n) = x_n \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) + y_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel minden $z \in \mathbb{R}$ esetén $-1 \leq \sin(z) \leq 1$, ezért

$$\left| x_n \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) + y_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \right| \leq |x_n| + |y_n| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

így,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0.$$



5.3. ábra. Az $f(x,y) = x\sin\left(\frac{1}{y}\right) + y\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ függvény

5.2.1. Definíció. *Legyenek $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D_1'$, $y_0 \in D_2'$ és $f\colon D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}$. Rögzített $y \in D_2$ esetén tekintsük az*

$$D_1 \ni x \longmapsto f(x,y)$$

függvényt. Tegyük fel, hogy ennek a függvénynek létezik az x_0 pontban a határértéke. Ekkor a $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ érték függ y-tól. Tekintsük most az

$$D_2 \ni y \longmapsto \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

*függvényt. Ha ennek a függvénynek létezik az y_0 pontban a határértéke, akkor azt mondjuk, hogy létezik a $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ **iterált határérték**. A $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ iterált határérték analóg módon értelmezhető.*

5.2.3. Tétel. *Legyenek $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D_1'$, $y_0 \in D_2'$ és $f\colon D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy az f függvénynek az (x_0, y_0) pontban létezik a határértéke.*

(i) Ha minden rögzített $x \in D_1$ esetén az $f(x,\cdot)\colon D_2 \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik az y_0 pontban a határértéke, akkor létezik a $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ határérték is és

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

(ii) Ha minden rögzített $y \in D_2$ esetén az $f(\cdot,y)\colon D_1 \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik az x_0 pontban a határértéke, akkor létezik a $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ határérték is és

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

5.2.4. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y \neq 0\right)$$

függvényt. Ekkor

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

és

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0} -1 = -1.$$

5.2.5. Példa. *Legyen*

$$f(x,y) = \frac{y}{x+y}\sin\left(\frac{1+xy}{y}\right) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y \neq 0, y \neq 0\right).$$

Ekkor

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{y}{x+y}\sin\left(\frac{1+xy}{y}\right)\right) = \lim_{y\to 0}\sin\left(\frac{1}{y}\right),$$

ami nem létezik, így nem létezik a $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ *határérték. Azonban,*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{y}{x+y}\sin\left(\frac{1+xy}{y}\right)\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Vagyis, az egyik iterált határérték létezik, míg a másik nem.

5.2.6. Példa. *Legyen*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right).$$

Ekkor

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$

azonban a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

határérték nem létezik.

6. fejezet

Többváltozós és vektorértékű függvények differenciálhatósága

6.1. Fréchet-differenciálhatóság

6.1.1. Definíció. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f: D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény* ***Fréchet-differenciálható*** *az $x_0 \in D$ pontban, ha létezik egy olyan $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, hogy*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

teljesül. Ebben az esetben az A lineáris leképezést az f függvény x_0 pontbeli differeciálhányadosának nevezzük és rá a továbbiakban az $f'(x_0)$ jelölést használjuk.

6.1.1. Megjegyzés. *A Fréchet-differenciálhatóság helyett a totális differenciálhatóság elnevezés is használatos.*

6.1.2. Definíció. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f: D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény* ***lineárisan approximálható*** *az $x_0 \in D$ pontban, ha létezik egy olyan $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés és egy olyan $\omega: D \to \mathbb{R}^m$ leképezés, melyre $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$ teljesül, úgy, hogy*

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \omega(x) \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \qquad (x \in D).$$

6.1.1. Tétel (Fréchet-differenciálhatóság $\Longleftrightarrow$ lineáris approximálhatóság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f: D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ekkor az f függvény pontosan akkor Fréchet-differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, ha f lineárisan approximálható ebben a pontban.*

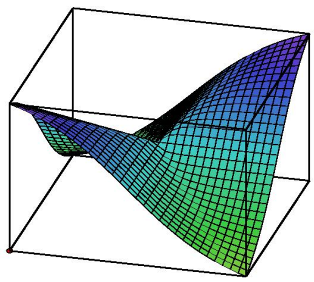
6.1.1. Állítás (A differenciálhányados egyértelműsége). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f: D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ olyan lineáris leképezések, hogy $f'(x_0) = A_1$ és $f'(x_0) = A_2$ is teljesül, akkor $A_1 = A_2$.*

6.1.2. Tétel (Differenciálhatóság $\Longrightarrow$ folytonosság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f: D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha az f függvény Fréchet-differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, akkor f folytonos az $x_0 \in D$ pontban.*

6.1.2. Megjegyzés (Folytonosság $\not\Rightarrow$ Fréchet-differenciálhatóság). *Az előző tétel megfordítása* ***nem*** *igaz, hiszen az*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

módon megadott $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $(0, 0)$ pontban, azonban ebben a pontban nem differenciálható.



6.2. Iránymenti és parciális differenciálhatóság

6.2.1. Definíció. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$ $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény és $v \in \mathbb{R}^n$. Ha létezik a*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

*határérték, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban a v **irány mentén differenciálható**. Ebben az esetben a fenti határértékre a $D_v f(x_0)$ jelölést alkalmazzuk.*

6.2.1. Tétel (Fréchet-differenciálhatóság $\Longrightarrow$ iránymenti differenciálhatóság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha az f függvény az x_0 pontban Fréchet-differenciálható, akkor ebben a pontban tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ irány mentén is differenciálható és*

$$D_v f(x_0) = f'(x_0) \cdot v$$

teljesül.

6.2.1. Megjegyzés (Iránymenti differenciálhatóság $\not\Rightarrow$ Fréchet-differenciálhatóság). *Az előző tétel megfordítása **nem** igaz, mert például az*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény minden $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ irány mentén differenciálható a $(0, 0)$ pontban és

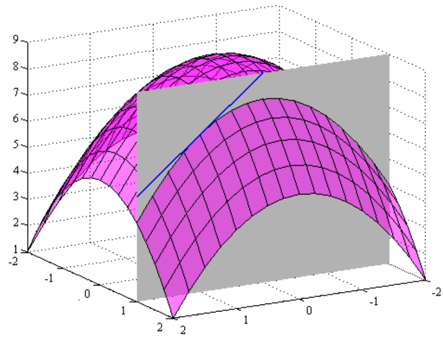
$$D_v f(0, 0) = \frac{v_1^3}{v_1^2 + v_2^2},$$

azonban az f függvény nem Fréchet-differenciálható a $(0, 0)$ pontban.

6.2.2. Definíció. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Legyen továbbá minden $i = 1, \ldots, n$ esetén*

$$e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{\check{1}}, 0, \ldots, 0).$$

*Ha létezik a $D_{e_i} f(x_0)$ iránymenti derivált, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban az i-edik változója szerint **parciálisan differenciálható** az $x_0 \in D$ pontban. Ebben az esetben a $D_{e_i} f(x_0)$ jelölés helyett általában a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ jelölést fogjuk használni.*



6.2.2. Tétel (Fréchet-differenciálhatóság $\Longrightarrow$ parciális differenciálhatóság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha az f függvény az $x_0 \in D$ pontban Fréchet-differenciálható, akkor az f függvény ebben a pontban mindegyik változója szerint parciálisan is differenciálható és*

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

6.2.2. Megjegyzés (Parciális differenciálhatóság $\not\Rightarrow$ folytonosság). *A parciális differenciálhatóságból **nem** feltétlenül következik folytonosság, ugyanis az*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

módon megadott függvény esetében

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \textit{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

azonban az f függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

6.2.3. Megjegyzés (Parciális differenciálhatóság $\not\Rightarrow$ iránymenti differenciálhatóság). *A parciális differenciálhatóságból nem következik az iránymenti differenciálhatóság, ugyanis például az*

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|} \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

módon megadott függvény esetében

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \textit{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

ha azonban $v \in \mathbb{R}^2$ olyan, mely nem párhuzamos az e_1 és e_2 irányok egyikével sem, akkor nem létezik a $D_v f(0,0)$ iránymenti derivált.

6.2.4. Megjegyzés (Iránymenti differenciálhatóság $\not\Rightarrow$ parciális differenciálhatóság). *Az iránymenti differenciálhatóságból nem következik a parciális differenciálhatóság. Ehhez legyenek $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ olyan vektorok melyekre $\{u, v\} \neq \{e_1, e_2\}$ és tekintsük az*

$$f(x,y) = \sqrt{|(u_1 x + v_1 y)(u_2 x + v_2 y)|} \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor a $D_u f(0,0)$ és $D_v f(0,0)$ iránymenti deriváltak léteznek, azonban az f függvény egyik változója szerint sem differenciálható parciálisan a $(0,0)$ pontban.

6.2.3. Tétel (Folytonos parciális differenciálhatóság $\Longrightarrow$ Fréchet-differenciálhatóság). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ha az f függvény az $x_0 \in D$ pont egy környezetében mindegyik változója szerint parciálisan differenciálható és ezek a parciális deriváltak folytonosak az $x_0 \in D$ pontban, akkor az f függvény az $x_0 \in D$ pontban differenciálható.*

6.2.4. Tétel (Differenciálhatóság és műveletek). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$. Ha az $f, g\colon D \to \mathbb{R}^m$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in D$ pontban, akkor*

— *az $f + g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

— *a $\lambda \cdot f$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0).$$

6.2.5. Tétel (Az összetett függvény differenciálási szabálya). *Legyenek $n, m, k \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ és $g\colon f(D) \to \mathbb{R}^k$ függvények. Ha az f függvény differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, a g függvény pedig az $f(x_0) \in f(D)$ pontban, akkor a $g \circ f$ függvény differenciálható az x_0 pontban és*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

6.3. Magasabbrendű deriváltak

6.3.1. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy függvény. Ha f az x_0 pont egy környezetében parciálisan differenciálható, és valamely $1 \le i \le n$ és $1 \le j \le n$ esetén $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$-nek az x_0 pontban létezik a j-edik változó szerinti parciális deriváltja, tehát $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$, akkor azt mondjuk, hogy f az x_0 pontban a **j-edik változó szerint kétszer parciálisan differenciálható**. Ha ez minden $1 \le j \le n$ esetén teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f az x_0 pontban **kétszer parciálisan differenciálható**. Ha a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ függvények minden $1 \le i \le n$ esetén az x_0 pontban differenciálhatók, akkor azt mondjuk, hogy f **az x_0 pontban kétszer differenciálható**.*

6.3.1. Megjegyzés. *A korábbiakból világos, hogy ha az f egy pontban kétszer differenciálható, akkor ott kétszer parciálisan differenciálható, de ez fordítva nem igaz.*

6.3.2. Definíció. *Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és f a D minden pontjában kétszer differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy f **kétszer differenciálható**. A $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$ számokat az f függvény x_0-beli **másodrendű parciális deriváltjainak** nevezzük.*

*Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és ezek a D minden pontjában léteznek, akkor értelemszerűen definiáljuk az f másodrendű parciális deriváltjait, mint a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : D \to \mathbb{R}$ függvényeket. Ezek száma általában n^2, és előfordulhat, hogy valamely pontban $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Ha a D halmaz nyílt, az f kétszer parciálisan differenciálható D-n, és az összes másodrendű parciális deriváltjai folytonosak D-n, akkor azt mondjuk, hogy f **kétszer folytonosan parciálisan differenciálható D-n**. Egy korábbi tétel alapján az is világos, hogy ha f kétszer folytonosan parciálisan differenciálható, akkor kétszer folytonosan differenciálható.*

Könnyű látni, hogy ezzel a módszerrel rekurzív módon értelmezhetjük egy $f : D \to \mathbb{R}$ függvénynek a D halmaz x_0 belső pontjában az l-szeri parciális differenciálhatóságát, az l-szeri differenciálhatóságát és az l-szeri folytonos differenciálhatóságát. A magasabbrendű parciális deriváltak jelölésére azt a módszert használjuk, hogy ha $l \ge 2$ pozitív egész, és $1 \le i_1, i_2, \ldots, i_l \le k$, akkor $\dfrac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_l}}(x_0)$ jelenti a $\dfrac{\partial^l f}{\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_l}}(x_0)$

függvénynek (amely szükségképpen értelmezve van x_0 egy környezetében) az x_{i_1}-edik változó szerinti parciális deriváltját.

*Ha $k, l \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény l-szer folytonosan differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény $\mathcal{C}^l$**-osztályú**. A $\mathcal{C}^0$-osztályú függvények alatt a folytonos függvényeket értjük.*

*Ha $f : D \to \mathbb{R}^m$ vektor-vektor függvény, akkor f-et $\mathcal{C}^l$-osztályúnak mondjuk, ha minden komponense $\mathcal{C}^l$-osztályú. Az összes $f : D \to \mathbb{R}^m$ típusú $\mathcal{C}^l$-osztályú függvények halmazát $\mathcal{C}^l(D, \mathbb{R}^m)$ jelöli, melyet $m = 1$ esetén egyszerűen $\mathcal{C}^l(D)$ módon rövidítünk. Ha f minden l pozitív egész esetén $\mathcal{C}^l$-osztályú, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}^\infty$**-osztályú**, vagy **akárhányszor differenciálható**. Az ilyen függvények halmazát $\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R}^m)$, illetve az $m = 1$ esetben $\mathcal{C}^\infty(D)$ jelöli.*

6.3.1. Tétel (Schwarz–Young). *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy függvény, melyre a D minden pontjában léteznek a $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltak. Ha $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ a D halmaz x_0 pontjában folytonos, akkor létezik $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0)$, és*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0).$$

6.3.2. Megjegyzés. *A tétel szerint tehát, ha l pozitív egész, és f egy nyílt halmazon l-szer folytonosan differenciálható, akkor a legfeljebb l-edrendű vegyes parciális deriváltjaiban a parciális differenciálások sorrendje tetszőlegesen felcserélhető. Ez a következő jelölés használatát teszi lehetővé: legyenek $l, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ pozitív egészek, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_l \leq k$ egészek. Ekkor*

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_l} f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \partial x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots \partial x_{i_l}^{\alpha_l}}$$

az f függvénynek azt az $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l$-edrendű parciális deriváltját jelenti, amelynél az i_1-edik változó szerint α_1-szer, az i_2-edik változó szerint α_2-ször, stb., differenciáltunk, tetszőleges sorrendben.

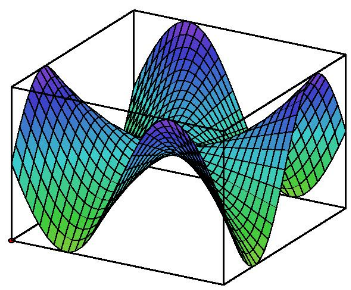
6.3.3. Megjegyzés. *Legyen*

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ekkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

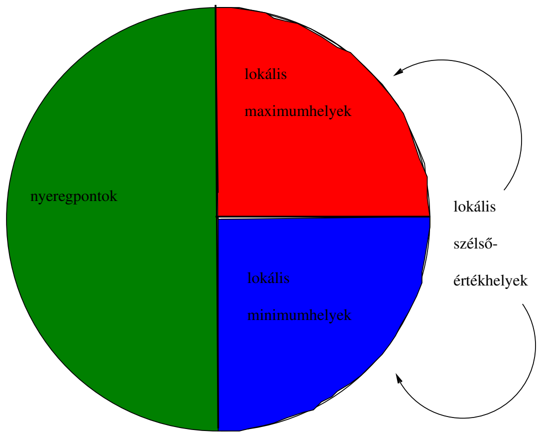
Ez azt jelenti, hogy a Schwarz–Young-tételben szereplő feltételek egyike sem gyengíthető.



6.3.3. Definíció. *Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ egy k-szor folytonosan differenciálható függvény. Ekkor az f függvény k**-edik differenciál**ját a*

$$d_x^k f(h) = \sum_{0 \leq j_1, \ldots, j_n \leq k, j_1 + \cdots + j_n = k} \frac{k!}{j_1! \ldots j_n!} \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}} h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n}.$$

módon értelmezzük.



6.1. ábra. A stacionárius helyek osztályozása

6.3.2. Tétel (Taylor). *Legyenek $n, k \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, nyílt halmaz, $x_0, x_0 + h$ a D pontjai, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig $\mathcal{C}^{k+1}$-osztályú függvény. Ekkor létezik olyan $0 \leq \theta \leq 1$ szám, hogy*

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} d^i f(x_0)(h) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x_0 + \theta h)(h) \,.$$

6.3.4. Megjegyzés. *A fenti tételben szereplő egyenlőséget **Taylor-formulá**nak, míg a formula jobb oldalán álló*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} d^i f(x_0)(h)$$

*függvényt az f függvény x_0 pontbeli k-**adrendű Taylor-polinomjá**nak hívjuk. Ha $x_0 = 0$, akkor a **Maclaurin-formula, Maclaurin-polinom** elnevezéseket szoktuk használni.*

6.4. Lokális szélsőértékszámítás

6.4.1. Definíció. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, x_0 a D halmaz egy pontja, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy függvény. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban **lokális minimuma (maximuma) van**, ha van az x_0-nak olyan környezete, melynek D-beli x pontjaiban $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) teljesül. Más szóval, létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha x a D halmaz olyan pontja, melyre fennáll az $\|x - x_0\| < \delta$ egyenlőtlenség, akkor*

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \textit{illetve} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

*teljesül. Ha itt $x \neq x_0$ esetén szigorú egyenlőtlenség teljesül, akkor **szigorú minimum**ról, illetve **szigorú maximum**ról beszélünk. A „lokális" jelzőt „globális" váltja fel, ha ezek a feltételek bármely $\delta > 0$ esetén, azaz, a D halmaz minden x pontjában teljesülnek. A lokális (globális) minimumhelyet és maximumhelyet közösen **szélsőértékhely**nek nevezzük, magát az $f(x_0)$ függvényértéket pedig a megfelelő szélsőérték értékének mondjuk.*

6.4.1. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, x_0 a D halmaz egy belső pontja, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy x_0-ban parciálisan differenciálható függvény. Ha az f függvénynek az x_0 pontban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.*

6.4.2. Definíció. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, x_0 a D halmaz egy belső pontja, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy x_0-ban parciálisan differenciálható függvény. Ha az x_0 pontban az f függvény összes parciális deriváltja nulla, akkor az x_0 pontot az f függvény **stacionárius pontjá**nak nevezzük.*

6.4.1. Megjegyzés. *A fenti tétel feltételei mellett tehát az f függvénynek csak stacionárius pontokban lehet lokális szélsőértéke.*

6.4.2. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ egy $\mathcal{C}^2(D)$-osztályú függvény, s a D-beli x_0 pont legyen az f stacionárius pontja. Ha az*

$$f''(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

mátrix

— *pozitív definit, akkor az f függvénynek az x_0 pontban lokális minimuma van;*

— *negatív definit, akkor az f függvénynek az x_0 pontban lokális maximuma van;*

— *indefinit, akkor az f függvénynek az x_0 pontban nincs lokális szélsőértéke.*

6.4.1. Példa. *Legyen*

$$f(x, y) = x^2 + 12y^2 - 3x + 10y + 100 \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Ekkor

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x - 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 24y + 10 \end{aligned}\right. \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

A fentiek alapján az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pont pontosan akkor stacionárius pontja az f függvénynek, ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Így, ebben az esetben

$$\begin{cases} 2x - 3 & = 0 \\ 24y + 10 & = 0 \end{cases}$$

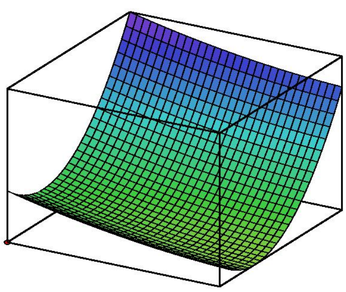
Ebből az adódik, hogy az $(x_0, y_0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{10}\right)$ pont stacionárius pontja f-nak. Továbbá,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 24$$

Így,

$$f''(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $f''(x_0, y_0)$ mátrix pozitív definit, ezért az (x_0, y_0) pont az f függvénynek lokális minimumhelye.



6.4.2. Példa. *Legyen*

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Ekkor

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2y \end{aligned}\right. \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

A fentiek alapján az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pont pontosan akkor stacionárius pontja az f függvénynek, ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Így, ebben az esetben

$$\begin{cases} 2x &= 0 \\ -2y &= 0 \end{cases}$$

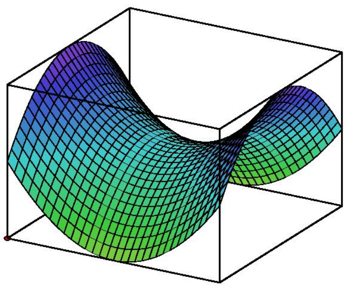
Ebből az adódik, hogy az $(x_0, y_0) = (0,0)$ pont stacionárius pontja f-nak. Továbbá,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2$$

Így,

$$f''(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $f''(x_0, y_0)$ mátrix indefinit, ezért az (x_0, y_0) pont az f függvénynek nem lokális szélsőértékhelye. Így, az (x_0, y_0) pont az f függvénynek nyeregpontja.



6.5. Feltételes szélsőértékszámítás

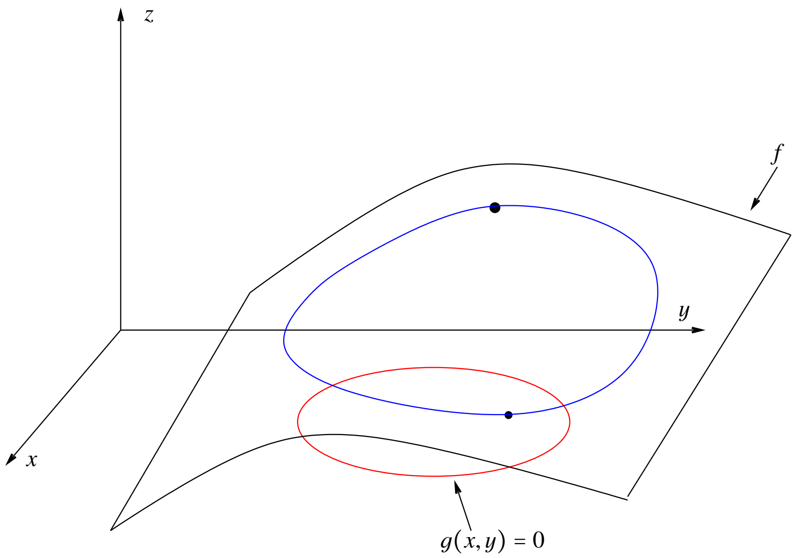
Az alkalmazások során gyakran találkozunk olyan problémával, melynél egy adott függvény szélsőértékeit kell meghatározni, de nem az egész értelmezési tartományán, hanem annak csak egy bizonyos feltételt teljesítő pontjaiból álló részhalmazán. Ez a feltétel gyakran bizonyos egyenletek, illetve egyenlőtlenségek formájában van megadva. Most pontosan megfogalmazzuk a problémát az egyenlőségekkel adott feltételek esetére, s egy megoldási módszert is adunk.

6.5.1. Definíció. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : D \to \mathbb{R}^m$ pedig adott függvények. Akkor mondjuk, hogy* ***az f függvénynek az x_0 pontban a $g = 0$ feltétel mellett feltételes minimuma (maximuma) van****, ha $g(x_0) = 0$, és van az x_0 pontnak olyan környezete, melynek minden D-be eső olyan x pontjában, melyre $g(x) = 0$ teljesül, ugyancsak fennáll $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$). A feltételes minimumot és maximumot közösen* ***feltételes extrémumnak****, vagy* ***feltételes szélsőértéknek*** *nevezzük.*

6.5.2. Definíció. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : D \to \mathbb{R}^m$ pedig adott függvények. Legyen minden D-beli x és minden $\mathbb{R}^m$-beli λ esetén*

$$F(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle .$$

Az F függvényt az f, g függvényekhez tartozó ***Lagrange-függvénynek****, λ koordinátáit pedig* ***Lagrange-féle multiplikátoroknak*** *nevezzük.*



6.2. ábra. Feltételes szélsőértékprobléma

6.5.1. Tétel (Lagrange-féle multiplikátor elv). *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $(x_0, y_0) \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : D \to \mathbb{R}^m$ pedig $\mathcal{C}^1$-osztályú függvények. Ha az f függvénynek az (x_0, y_0) pontban a $g = 0$ feltétel mellett feltételes szélsőértéke van, és az $A = g'(x_0, y_0)$ jelöléssel az $A(0, y)$ mátrix invertálható, akkor létezik $\mathbb{R}^m$-ben olyan λ, hogy (x_0, y_0, λ) az f, g függvényekhez tartozó Lagrange-függvénynek stacionárius pontja.*

6.5.1. Megjegyzés. *A tétel alapján módszert kapunk a lehetséges feltételes szélsőértékhelyek meghatározására. Ehhez ugyanis az*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) &= 0 \\
\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_m}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) &= 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani, mely $n + m$ egyenletből áll, és $n + m$ ismeretlent tartalmaz. Ennek az egyenletrendszernek az utolsó m egyenlete éppen a feltételi egyenletek teljesülését jelenti. A feltételes szélsőértékprobléma megoldásai ezen egyenletrendszer $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ megoldásai közül kerülnek ki. Az egyenletrendszer megoldása során tehát elsősorban az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenek meghatározására kell törekednünk, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ismeretlenek értékei a probléma szempontjából érdektelenek.

6.5.1. Példa. *Tekintsük az*

$$\begin{cases} f(x, y) & = x^2 - y^2 \\ g(x, y) & = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

feltételes szélsőérték problémát. Ekkor az f és g függvények Lagrange-függvénye

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = (\lambda + 1)x^2 + (\lambda - 1)y^2 - \lambda \qquad \big((x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Ebben az esetben

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2(\lambda + 1)x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2(\lambda - 1)y, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1.$$

A

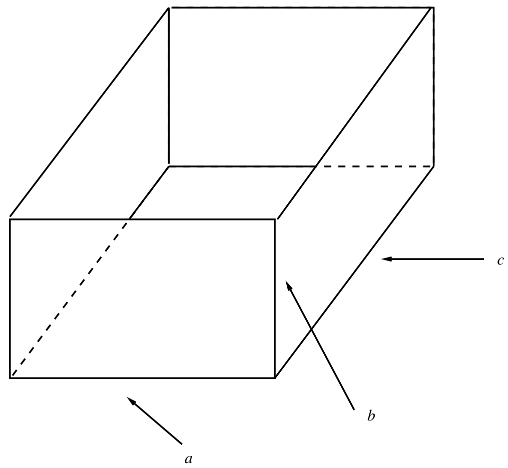
$$\begin{cases} 2(\lambda+1)x &= 0 \\ 2(\lambda-1)y &= 0 \\ x^2+y^2-1 &= 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai

$$(1,0,-1),\ (-1,0,-1),\ (0,-1,1),\ (0,1,1).$$

Könnyen látható, hogy a fenti f függvények a $g(x,y)=0$ feltételre vonatkozóan az $(1,0)$ és a $(-1,0)$ pontokban lokális maximuma, míg a $(0,-1)$ és a $(0,1)$ pontokban lokális minimuma van.

6.5.2. Példa. *Egy $4\,\mathrm{m}^3$ űrtartalmú, felül nyitott téglatest alaú tartályt szeretnénk készíteni. Hogyan válasszuk meg a tartály méreteit, hogy a tartály elkészítése során felhasznált anyag a lehető legkevesebb legyen?*



A tartály oldalhosszait jelöljék a,b,c. Mivel $4\mathrm{m}^3$ űrtartalmú tartályt szeretnénk készíteni, így

$$abc=4.$$

Ehhez

$$f(a,b,c)=2ab+2bc+ac$$

mennyiségű anyagra van szükségünk. Így a feladat az

$$\begin{cases} f(a,b,c) &= 2ab+2bc+ac \\ g(a,b,c) &= abc-4 \end{cases}$$

feltételes szélsőérték problémára vezethető vissza. Az f és g függvények Lagrange-függvénye

$$F(a,b,c,\lambda)=f(a,b,c)+\lambda g(a,b,c)=2ab+2bc+ac-\lambda abc-4\lambda.$$

Ekkor,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a}(a,b,c,\lambda) &= 2b+c+\lambda bc \\ \frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c,\lambda) &= 2a+2c+\lambda ac \\ \frac{\partial F}{\partial c}(a,b,c,\lambda) &= 2b+a+\lambda ab \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(a,b,c,\lambda) &= abc-4 \end{aligned}$$

Az

$$\begin{cases} 2b + c + \lambda bc & = 0 \\ 2a + 2c + \lambda ac & = 0 \\ 2b + a + \lambda ab & = 0 \\ abc - 4 & = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer egyetlen megoldása

$$a = 2,\ b = 1,\ c = 2,\ \lambda = -2$$

azaz, akkor használjuk fel a legkevesebb anyagot, ha a tartály oldalhosszait rendre 2, 1 *és* 2 *méternek választjuk.*

7. fejezet

Riemann-integrál $\mathbb{R}^n$-ben

7.1. Riemann-integrál téglán

7.1.1. A Riemann-integrálhatóság fogalma téglára

7.1.1. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, ekkor a*

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

*halmazt n–**dimenziós tégla**nak nevezzük. Ennek a téglának a **mérték**én a*

$$V(Q) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

mennyiséget értjük.

7.1.2. Definíció. *Legyen $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ egy tégla $\mathbb{R}^n$-ben. Azt mondjuk, hogy $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ **felosztás**a a Q téglának, ha bármely $j = 1, \ldots, n$ esetén P_j felosztása az $[a_j, b_j]$ intervallumnak. Ha rögzített $j = 1, \ldots, n$ esetén*

$$I_{ji} = [x_{j,i-1}, x_{j,i}] \qquad \big(i = 1, \ldots, k_j\big)$$

jelöli az $[a_j, b_j]$ intervallumnak a P_j felosztás által meghatározott részintervallumait, akkor a

$$T_{i_1,\ldots,i_n} = I_{1,j_1} \times \cdots \times I_{n,j_n} \qquad (i_\nu = 1, \ldots, k_\nu, \nu = 1, \ldots, n)$$

*téglákat a Q tégla P felosztás által meghatározott **résztéglá**inak nevezzük, míg a*

$$\|P\| = \sup_{i_1,\ldots,i_n} \operatorname{diam}(T_{i_1,\ldots,i_n})$$

*mennyiséget a P felosztás **finomságá**nak hívjuk.*

7.1.3. Definíció. *A fenti jelölések megtartása mellett legyenek P és R a Q tégla felosztásai. Azt mondjuk, hogy R **finomítása** P-nek, ha $P \subseteq R$ teljesül. A $P \cup R$ halmazt pedig a P és R felosztások **egyesítés**ének mondjuk.*

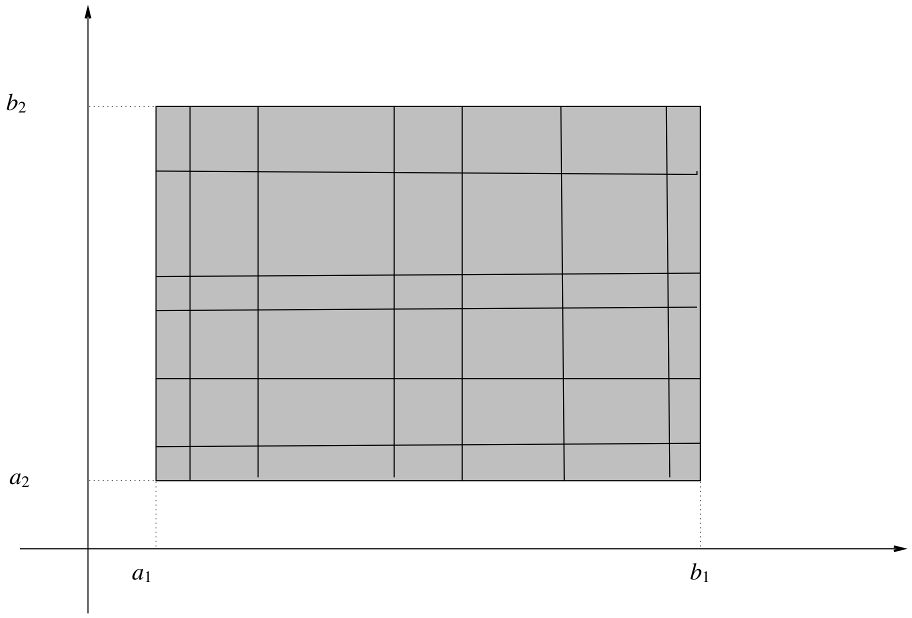
Ha $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a Q tégla felosztásainak egy sorozata, akkor azt mondjuk, hogy ez a felosztássorozat normális, ha $\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$ teljesül.

7.1.4. Definíció. *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f \colon Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, P a Q tégla egy felosztása, míg $T_{i_1,\ldots,i_n}$ ezen felosztás résztéglái. Legyenek ebben az esetben*

$$M_{i_1,\ldots,i_n} = \sup\{f(x) \mid x \in T_{i_1,\ldots,i_n}\}$$

és

$$m_{i_1,\ldots,i_n} = \inf\{f(x) \mid x \in T_{i_1,\ldots,i_n}\}$$



7.1. ábra. Az $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ kétdimenziós tégla egy felosztása

7.1.5. Definíció. *Az előző definíció feltételei és jelölései mellet a*

$$\sigma(f, P) = \sum m_{i_1,\dots,i_n} V\left(T_{i_1,\dots,i_n}\right),$$

$$\Sigma(f, P) = \sum M_{i_1,\dots,i_n} V\left(T_{i_1,\dots,i_n}\right),$$

illetve

$$\mathcal{O}(f, P) = \Sigma(f, P) - \sigma(f, P)$$

*mennyiségeket rendre az f függvény P felosztásához tartozó Ezeket a mennyiségeket rendre az f függvény P felosztásához tartozó **alsó, felső**, illetve **oszcillációs összeg**ének nevezzük.*

7.1.6. Definíció. *Továbbá, ha $\xi_{i_1,\dots,i_n} \in T_{i_1,\dots,i_n}$, akkor az*

$$\mathfrak{I}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i_1,\dots,i_n}) V\left(T_{i_1,\dots,i_n}\right)$$

*számot az f függvény P felosztásához és a $\xi_{i_1,\dots,i_n}$ $(i_\nu = 1, \dots, k_\nu, \nu = 1, \dots, n)$ pontokhoz tartozó **integrálközelítő összeg**ének mondjuk.*

7.1.1. Állítás. *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor az alábbi állítások érvényesek.*

— *Az Q tégla tetszőleges P felosztása és tetszőleges $\xi_{i_1,\dots,i_n}$ $(i_\nu = 1, \dots, k_\nu, \nu = 1, \dots, n)$ pontok esetén*

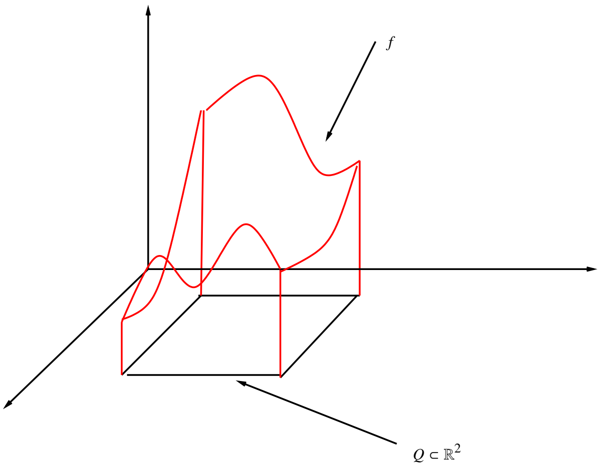
$$\sigma(f, P) \le \mathfrak{I}(f, P) \le \Sigma(f, P).$$

— *Ha P_1 és P_2 olyan felosztásai a Q téglának, hogy $P_1 \subseteq P_2$, akkor*

$$\sigma(f, P_1) \le \sigma(f, P_2) \quad \textit{és} \quad \Sigma(f, P_2) \le \Sigma(f, P_1).$$

— *Az Q tégla tetszőleges P_1 és P_2 felosztásai esetén*

$$\sigma(f, P_1) \le \Sigma(f, P_2).$$



7.1.7. Definíció. *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla és $f\colon Q \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ekkor az*

$$\underline{\mathcal{I}}(f) = \sup\{\sigma(f,P) \mid P \text{ a } Q \text{ tégla felosztása}\},$$

illetve az

$$\overline{\mathcal{I}}(f) = \inf\{\Sigma(f,P) \mid P \text{ a } Q \text{ felosztása}\},$$

*számokat az f függvény Q tégla feletti **alsó**, illetve **felső Darboux-integrál**jának nevezzük.*

7.1.2. Állítás. *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor az $\underline{\mathcal{I}}(f)$, illetve az $\overline{\mathcal{I}}(f)$ Darboux-integrálok léteznek és végesek, valamint*

$$\underline{\mathcal{I}}(f) \le \overline{\mathcal{I}}(f)$$

teljesül.

7.1.1. Következmény. *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. A Q tégla bármely P felosztása esetén*

$$\sigma(f,P) \le \underline{\mathcal{I}}(f) \le \overline{\mathcal{I}}(f) \le \Sigma(f,P),$$

így,

$$0 \le \overline{\mathcal{I}}(f) - \underline{\mathcal{I}}(f) \le \mathcal{O}(f,P)$$

teljesül.

7.1.8. Definíció. *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény **Riemann-integrálható**, ha*

$$\underline{\mathcal{I}}(f) = \overline{\mathcal{I}}(f)$$

*teljesül. Ezt a közös értéket az f függvény Q tégla feletti **Riemann-integrál**jának mondjuk és rá az*

$$\int_Q f(x)dx$$

jelölést használjuk.

7.1.1. Tétel (Darboux). *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$ úgy, hogy ha P olyan felosztása a Q téglának, melyre $\|P\| < \delta$, akkor*

$$\left|\Sigma(f,P) - \overline{\mathcal{I}}(f)\right| < \varepsilon \quad \text{és} \quad \left|\sigma(f,P) - \underline{\mathcal{I}}(f)\right| < \varepsilon$$

teljesül.

7.1.2. Következmény. *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor a Q tégla tetszőleges $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ normális felosztássorozata esetén*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(f,P_k) = \underline{\mathcal{I}}(f), \ \lim_{k\to\infty} \Sigma(f,P_k) = \overline{\mathcal{I}}(f) \text{ és } \lim_{k\to\infty} \mathcal{O}(f,P_k) = \overline{\mathcal{I}}(f) - \underline{\mathcal{I}}(f)$$

teljesül.

7.1.2. A Riemann-integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

7.1.2. Tétel (Oszcillációs kritérium). *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvény **akkor, és csakis akkor** Riemann-integrálható, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan P felosztása a Q téglának, melyre*

$$\mathcal{O}(f, P) < \varepsilon$$

teljesül.

7.1.3. Tétel. *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvény **akkor, és csakis akkor** Riemann-integrálható, ha van olyan I valós szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan P felosztása a Q téglának, melyhez tartozó $\mathcal{I}(f, P)$ integrálközelítő összegre*

$$|\mathcal{I}(f, P) - I| < \varepsilon$$

teljesül. Továbbá, ebben az esetben

$$I = \int_Q f(x)dx.$$

7.1.4. Tétel. *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ korlátos és folytonos függvény. Ekkor f Riemann-integrálható.*

7.1.5. Tétel. *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ pedig olyan korlátos függvény, mely legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok Q-beli pontban nem folytonos. Ekkor f Riemann-integrálható.*

7.1.3. A Riemann-integrál tulajdonságai

7.1.6. Tétel (Riemann-integrál és műveletek). *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla és legyenek $f, g\colon Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor*

— *az $f + g$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int_Q (f+g)(x)dx = \int_Q f(x)dx + \int_Q g(x)dx;$$

— *a $\lambda \cdot f$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int_Q (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \int_Q f(x)dx;$$

— *ha minden $x \in Q$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, akkor*

$$\int_Q f(x)dx \leq \int_Q g(x)dx;$$

— *ha Q_1 és Q_2 a Q tégla olyan résztéglái, melyekre $Q_1 \cup Q_2 = Q$ és $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, akkor az f függvény Riemann-integrálható a Q_1 és a Q_2 téglákon is és*

$$\int_Q f(x)dx = \int_{Q_1} f(x)dx + \int_{Q_2} f(x)dx;$$

7.1.1. Megjegyzés. *Az előző tételben szereplő első és második állítást együttesen a Riemann-integrál **linearitásá**nak, a harmadikat a Riemann-integrál **monotonitásá**nak, míg a negyediket a Riemann-integrál téglák feletti **additivitásá**nak mondjuk.*

7.1.7. Tétel (Középértéktétel). *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla és legyenek $f, g \colon Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények. Tegyük fel továbbá, hogy vannak olyan m, M konstansok, hogy*

$$m \le f(x) \le M \qquad (x \in Q)$$

teljesül, továbbá azt is, hogy g nemnegatív függvény. Ekkor

$$m \int_Q g(x)dx \le \int_Q f(x)g(x)dx \le M \int_Q g(x)dx.$$

teljesül.

7.1.3. Következmény. *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla és $f \colon Q \to \mathbb{R}$ olyan Riemann-integrálható függvény, melyre*

$$m \le f(x) \le M \qquad (x \in Q)$$

teljesül valamely m és M konstansokkal. Ekkor

$$m \le \frac{1}{V(Q)} \int_Q f(x)dx \le M.$$

7.1.4. Következmény. *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla és egy $f \colon Q \to \mathbb{R}$ folytonos, Riemann-integrálható függvény. Ekkor van olyan $\xi \in Q$ pont, hogy*

$$f(\xi) = \frac{1}{V(Q)} \int_Q f(x)dx$$

teljesül.

7.1.8. Tétel (Szukcesszív integrálás). *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $Q = \times_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ $f : Q \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény, valamint tételezzük fel azt is, hogy az $x_n \longmapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ függvény minden rögzített $Q \cap \mathbb{R}^{n-1}$-beli $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ esetén Riemann-integrálható. Ekkor az*

$$f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, dx_n$$

módon megadott $f_{n-1} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható a $Q_{n-1} = \times_{i=1}^{n-1}[a_i, b_i]$ $(n-1)$-dimenziós téglán, és

$$\int_{Q_{n-1}} f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})d(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \int_Q f(x_1, x_2, \ldots, x_n)d(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

7.1.2. Megjegyzés. *A tétel segítségével tehát egy n-dimenziós Riemann-integrál kiszámítása visszavezethető egy egydimenziós és egy $n-1$-dimenziós Riemann-integrál kiszámítására. Ha ez az utóbbi integrálra ismét alkalmazható, akkor ezt az eljárást folytatva az eredeti többszörös integrált ismételt egyszeres integrálásokkal számíthatjuk ki. Az ismertetett eljárást* ***szukcesszív integrálásnak*** *szokás nevezni. Az eljárás alkalmazása során nem feltétlenül szükséges a változók megadott sorrendjéhez ragaszkodni, hanem az integrálások „sorrendje” tetszőlegesen felcserélhető.*

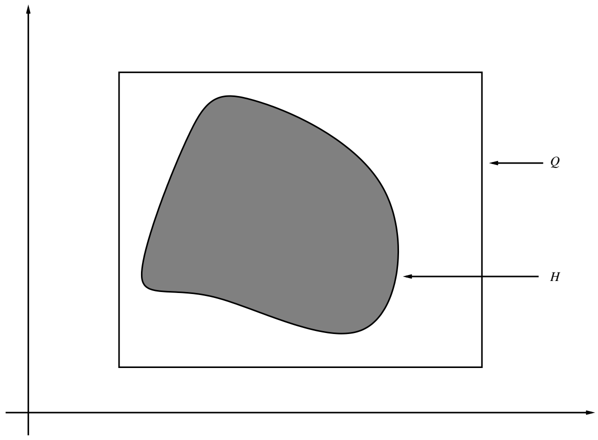
7.1.1. Példa.

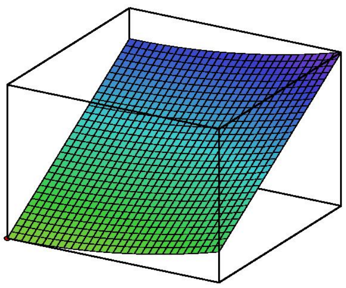
$$\int_{[0,1]\times[2,3]} \left(x^2 + 4y\right) dxdy$$

A Szukcesszív integrálás tételét felhasználva,

$$\int_{[0,1]\times[2,3]} \left(x^2 + 4y\right) dxdy = \int_0^1 \left(\int_2^3 x^2 + 4ydy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + 2y^2\right]_2^3 dx = \int_0^1 x^2 + 10dx = \left[\frac{x^3}{3} + 10x\right]_0^1 = \frac{31}{3}$$





7.1.9. Tétel (Fubini). *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$ és $A \subset \mathbb{R}^n$ és $B \subset \mathbb{R}^m$ téglák, valamint $Q = A \times B$. Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, és az $x \mapsto f(x,y)$ függvény minden rögzített B-beli y mellett, valamint az $y \mapsto f(x,y)$ függvény minden rögzített A-beli x mellett Riemann-integrálható, akkor*

$$\int_Q f(x,y)d(x,y) = \int_B \left[\int_A f(x,y)\,dx\right] dy = \int_A \left[\int_B f(x,y)\,dy\right] dx.$$

7.2. Riemann-integrál korlátos $\mathbb{R}^n$–beli halmazokon

7.2.1. Definíció. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, $Q \subset \mathbb{R}^n$ olyan tégla, hogy $H \subseteq Q$, $f : H \to \mathbb{R}$ pedig egy korlátos függvény és*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & ha\ x \in H \\ 0, & ha\ x \in Q \setminus H \end{cases}.$$

*Ha az $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható a Q téglán, akkor azt mondjuk, hogy az f **függvény Riemann-integrálható a** H **halmazon**, és az*

$$\int_H f(x)dx = \int_Q \widetilde{f}(x)dx$$

mennyiséget az f függvény H halmaz feletti Riemann-integráljának nevezzük.

7.2.1. Megjegyzés. *Az előző definícióban a Riemann-integrálhatóság fogalma **független** a definícióban szereplő Q tégla megválasztásától.*

7.2.1. Tétel (A Riemann-integrál tulajdonságai). *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, $f, g : H \to \mathbb{R}$ pedig olyan függvények, melyek Riemann-integrálhatóak a H halmazon. Ekkor,*

— *az $f + g$ függvény is Riemann-integrálható a H halmazon és*

$$\int_H (f+g)(x)dx = \int_H f(x)dx + \int_H g(x)dx;$$

— *tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda \cdot f$ függvény is Riemann-integrálható a H halmazon és*

$$\int_H (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \int_H f(x)dx;$$

— *ha minden $x \in H$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, akkor*

$$\int_H f(x)dx \leq \int_H g(x)dx;$$

— *ha minden $x \in H$ esetén $f(x) \geq 0$, $K \subset \mathbb{R}^n$ olyan korlátos halmaz, hogy $K \subseteq H$ és az f függvény integrálható a K halmazon, akkor*

$$\int_K f(x)dx \leq \int_H f(x)dx.$$

— *ha $H_1, H_2 \subseteq H$, akkor f integrálható a $H_1 \cup H_2$ halmazon is és*

$$\int_{H_1 \cup H_1} f(x)dx = \int_{H_1} f(x)dx + \int_{H_2} f(x)dx - \int_{H_1 \cap H_2} f(x)dx.$$

7.2.1. Jordan-mérhető halmazok $\mathbb{R}^n$-ben

7.2.2. Definíció. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ha az*

$$f(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

*függvény Riemann-integrálható a H halmazon, akkor azt mondjuk, hogy a H halmaz **Jordan-mérhető**, és ebben az esetben a*

$$\mu_J(H) = \int_H 1dx$$

*mennyiséget a H halmaz **Jordan-mértéké**nek nevezzük.*

7.2.1. Állítás. *Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ egy tégla. Ekkor a Q halmaz Jordan-mérhető és*

$$\mu_J(Q) = V(Q).$$

7.2.1. Példa. *Legyen*

$$H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x, y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\right\}.$$

Ekkor a H halmaz nem Jordan-mérhető.

7.2.2. Példa. *Egy szabályos háromszög oldalait elharmadoljuk, majd a középső harmadára ismét egy szabályos háromszöget rajzolunk. Ezen háromszögek oldalait szintén harmadoljuk, és háromszöget rajzolunk rájuk. Ezt a végtelenségig folytatjuk. Az eljárás végén nyert alakzatot Koch-féle hópehelynek hívjuk. Ez az $\mathbb{R}^2$-beli halmaz Jordan-mérhető és Jordan-mértéke $\frac{8}{5}T$, ha T jelöli a kiindulási szabályos háromszög Jordan-mértékét.*

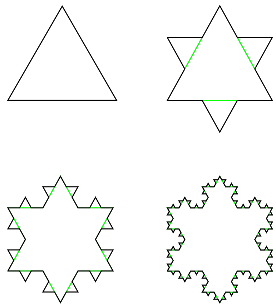
7.2.2. Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

— *a H halmaz Jordan-mérhető és*

$$\mu_J(H) = 0;$$

— *bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik véges sok olyan $Q_1, \ldots, Q_n \subset \mathbb{R}^n$ tégla, hogy*

$$H \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Q_i \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{n} \mu_J(Q_i) < \varepsilon$$



7.2. ábra. A Koch-féle hópehely elkészítésének első lépései

7.2.3. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy ha $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pont* ***határpont**ja a D halmaznak, ha bármely $r > 0$ esetén*

$$B(x_0, r) \cap D \neq \varnothing \qquad \text{és} \qquad B(x_0, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus D) \neq \varnothing$$

teljesül. A D halmaz határpontjai halmazára a ∂D jelölést fogjuk használni.

7.2.3. Tétel (Jordan-mérhetőség kritériuma). *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ekkor a H halmaz* ***pontosan akkor*** *Jordan-mérhető, ha $\mu_J(\partial H) = 0$ teljesül.*

7.2.4. Tétel (Jordan-mérték tulajdonságai).

— *ha a $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz Jordan-mérhető, akkor*

$$\mu_J(H) \geq 0;$$

— *ha a $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz Jordan-mérhető, akkor tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}^n$ esetén a $H + x_0 = \{h + x_0 \in \mathbb{R}^n \mid h \in H\}$ halmaz is Jordan-mérhető és*

$$\mu_J(H) = \mu_J(H + x_0);$$

— *ha a $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^n$ halmazok Jordan-mérhetőek és $H_1 \subset H_2$ teljesül, akkor*

$$\mu_J(H_1) \leq \mu_J(H_2);$$

— *ha a $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz Jordan-mérhető, akkor tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}^n$ esetén a $\lambda \cdot H = \{\lambda h \mid h \in H\}$ halmaz is Jordan-mérhető és*

$$\mu_J(\lambda \cdot H) = \lambda^n \mu_J(H);$$

— *ha $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^n$ olyan Jordan-mérhető halmazok, hogy a $H_1 \cap H_2$ halmaznak nincs belső pontja, akkor*

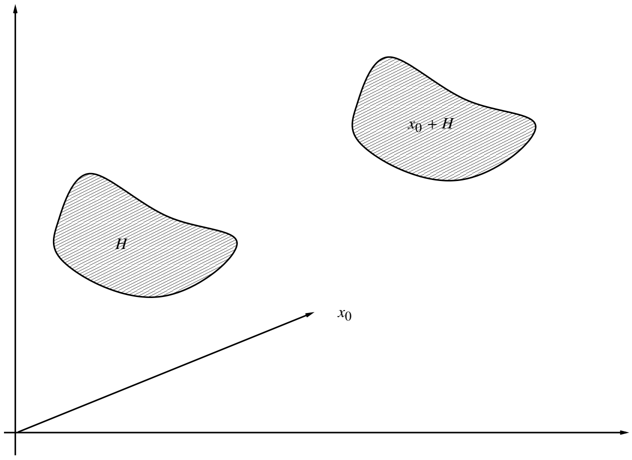
$$\mu_J(H_1 \cup H_2) = \mu_J(H_1) + \mu_J(H_2);$$

7.2.4. Definíció. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt, Jordan-mérhető halmaz, $\Phi, \Psi \colon K \to \mathbb{R}$ pedig olyan folytonos függvények, hogy $\Phi(x) \leq \Psi(x)$ teljesül minden $x \in K$ esetén. Ekkor a*

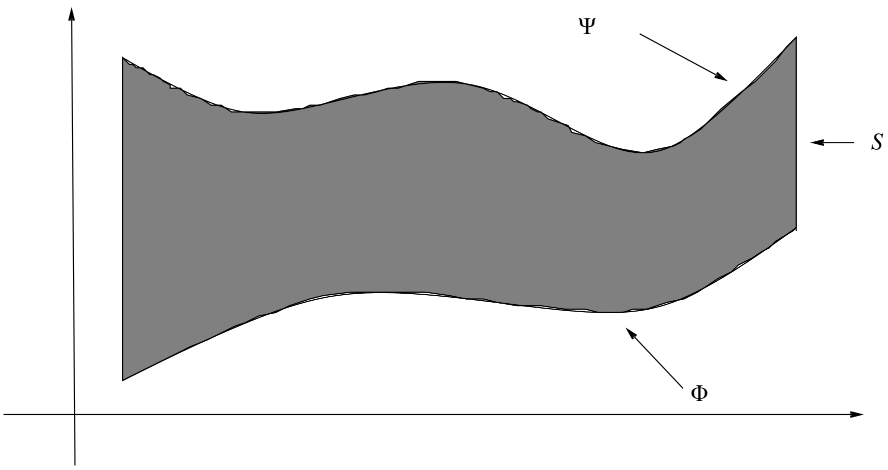
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in K \text{ és } \Phi(x) \leq y \leq \Psi(x)\}$$

halmazt ***egyszerű tartomány**nak nevezzük.*

7.2.2. Állítás. *Ha $S \subset \mathbb{R}^n$ egyszerű tartomány, akkor S kompakt és Jordan-mérhető.*



7.3. ábra. A H és az $x_0 + H$ halmazok



7.4. ábra. Egyszerű tartomány

7.2.5. Tétel (Fubini-tétel egyszerű tartománya). *Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ egyszerű tartomány, $f\colon S \to \mathbb{R}$ pedig egy olyan függvény, mely Riemann-integrálható S-en, ekkor*

$$\int\limits_S f(x,y)d(x,y) = \int\limits_{x\in K} \left(\int\limits_{y=\Phi(x)}^{y=\Psi(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

7.2.3. Példa. *Határozzuk meg az*

$$\int_S x^3 \cos(xy)dxdy$$

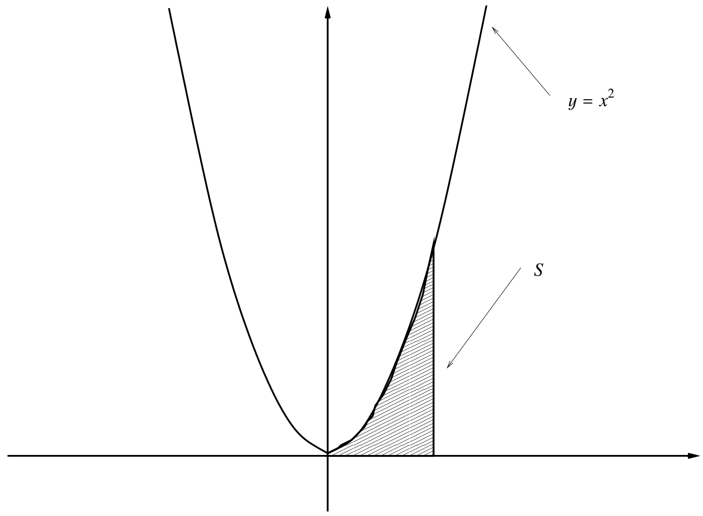
Riemann-integrált, ha

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2],\ 0 \le y \le x^2\right\}$$

Ha felhasználjuk a Szukcesszív integrálás tételét, akkor

$$\int_S x^3 \cos(xy)dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} x^3 \cos(xy)dy \right) dx = \int_0^2 \left[x^2 \sin(xy)\right]_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^2 x^2 \sin(x^3)dx = \left[-\frac{\cos(x^3)}{3} \right]_0^2 = \frac{1-\cos(8)}{3} \approx 0,381833$$



7.2.4. Példa. *Határozzuk meg az*

$$\int_S x^2 + y^2 dxdy$$

Riemann-integrált, ha S az $y = 0$, $y = 3$, $y = x$ és az $y = x + 1$ görbék által határolt korlátos tartomány. Ebben az esetben

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [0,3],\ y-1 \le x \le y\right\},$$

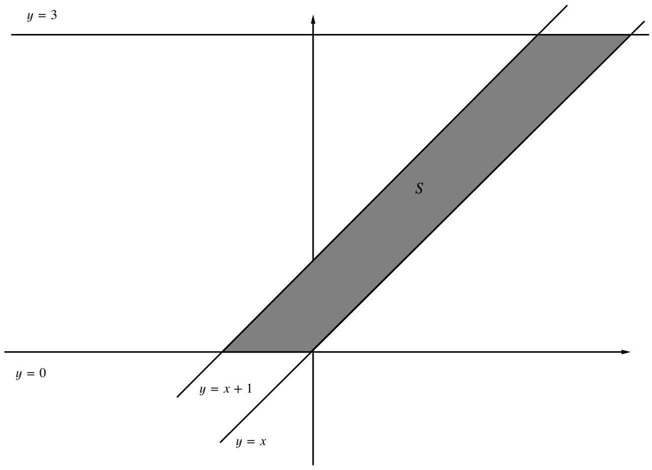
így a Szukcesszív integrálás tételét használva,

$$\int_S (x^2+y^2)dxdy = \int_0^3 \left(\int_{y-1}^{y} x^2 + y^2 dx \right) dy = \int_0^3 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{y-1}^{y} dy$$

$$= \int_0^3 \frac{y^3-(y-1)^3}{3} - y^2 dy = \left[\frac{y^4-(y-1)^4}{12} + \frac{y^3}{3} \right] = \frac{173}{12}$$

7.2.6. Tétel (Integráltranszformáció). *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, E egy Jordan-mérhető tartomány az $\mathbb{R}^n$ térben, $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ pedig olyan folytonosan differenciálható függvény, mely E belsejében kölcsönösen egyértelmű, s melynek $J_\Phi = \det(\Phi')$ Jacobi-determinánsa az E belsejében sehol sem nulla. Ekkor*

$$\int\limits_{\Phi(E)} f(x)dx = \int\limits_E (f\circ\Phi)(t)\cdot|J_\Phi(t)|\ dt.$$



7.2.2. Megjegyzés. *Az $n = 1$ esetben folytonos f mellett éppen a helyettesítéses integrálás tételét kapjuk.*

7.2.3. Megjegyzés (Síkbeli polárkoordinátatranszformáció). *Legyen $R > 0$ adott szám és a tekintsük a $T = [0, R] \times [0, 2\pi]$ zárt téglalapon azt a $\Phi(r, \varphi) = (x, y)$ leképezést, melynél*

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi\,.$$

Ekkor Φ a T téglalapot a $(0,0)$ középpontú R sugarú $B(0,R)$ zárt körlemezre képezi le, és a T belsejében kölcsönösen egyértelmű, továbbá teljesül $J_\Phi(r,\varphi) = r$, ha $0 < r < R$ és $0 < \varphi < 2\pi$. Az integráltranszformációs tételből kapjuk a polárkoordinátás integrálás alábbi képletét:

$$(\mathcal{PT}) \qquad \int\limits_{B(0,R)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi\,.$$

Ez a formula az integráltranszformációs tétel alapján minden olyan f Riemann-integrálható függvényre alkalmazható, mely egy $B(0,R)$-beli zárt halmazon kívül eltűnik. Ezen formula segítségével kiszámíthatjuk az $\mathbb{R}^3$ tér egységgömbjének V_3 térfogatát. Valóban, az $\mathbb{R}^3$-beli $B(0,1)$ egységgömb (x,y,z) pontjai az alábbi egyenlőtlenségekkel jellemezhetők:

$$-1 \le x \le 1, \qquad -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\,,$$

$$-\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\,.$$

Tehát $B(0,1)$ normálhalmaz a $[-1,1]$ intervallumon. Ha K_1 jelöli $\mathbb{R}^2$ egységgömbjét, akkor az egyszerű tartományokra vonatkozó Fubini-tétel, a $(\mathcal{PT})$ formula és a Newton–Leibniz-formula felhasználásával

$$V_3 = \int\limits_{B(0,1)} 1 = \int\limits_{K_1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\,dz\,dy\,dx =$$

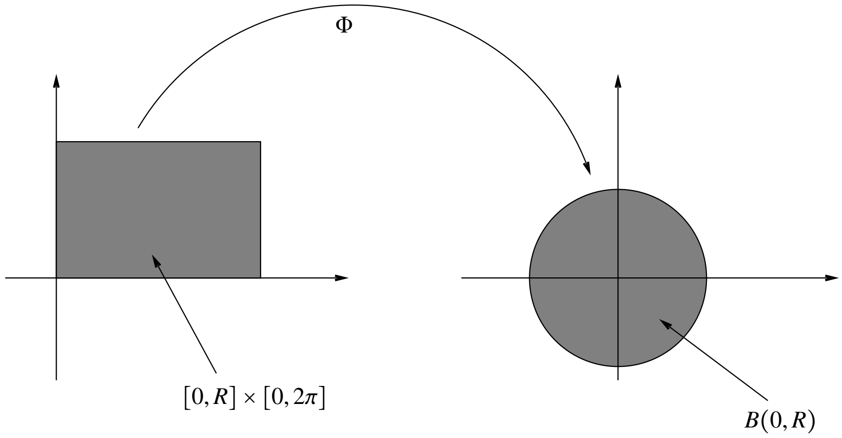
$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} 2r\sqrt{1-r^2}\,d\varphi\,dr = 4\pi \int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr =$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\left[(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}\,.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $\mathbb{R}^3$-ban az $r > 0$ sugarú gömbök térfogata $\frac{4r^3\pi}{3}$.

7.2.5. Példa. *Határozzuk meg az*

$$\int_H e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$



7.5. ábra. Síkbeli polárkoordinátatranszformáció

integrál értékét, ha

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Tekintsük a

$$\Phi(r, \varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \qquad ((r, \varphi) \in]0, +\infty[\times[0, 2\pi])$$

leképezést. Ekkor Φ *Fréchet-differenciálható és*

$$\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Ekkor $\det(\Phi'(r, \varphi)) = r \neq 0$*, továbbá, ha*

$$E = [0, 1] \times [0, 2\pi],$$

akkor

$$\Phi(E) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\},$$

így az integráltranszformációs tétel szerint,

$$\int_H e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} e^{-\left((r\cos(\varphi)^2 + (r\sin(\varphi))^2)\right)} \cdot rdrd\varphi$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} re^{-r^2} d\varphi\right) dr = 2\pi \int_0^1 re^{-r^2} dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^1 = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

7.2.6. Példa. *Számítsuk ki az*

$$f(x, y) = 1 \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

függvénynek a H halmaz feletti Riemann-integrálját, ha H az $y = x$*,* $y = 2x$*,* $y = \frac{1}{x}$ *és az* $y = \frac{2}{x}$ *görbék által határolt korlátos tartomány. Legyen*

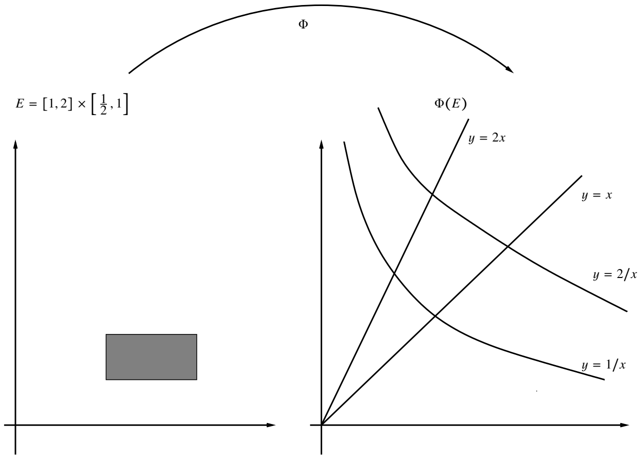
$$\Phi(u, v) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right) \qquad \left((u, v) \in]0, +\infty[^2\right).$$

Ekkor a $\Phi\colon]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}^2$ *függvény Fréchet-differenciálható és*

$$\Phi'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\det(\Phi'(u, v)) = -\frac{1}{2v} \neq 0$*, továbbá, ha*

$$E = [1, 2] \times \left[\frac{1}{2} \times 1\right],$$



akkor

$$\Phi(E) = H$$

teljesül, így az integráltranszformációs tétel szerint

$$\int_H f(x,y)dxdy = \int_{\Phi(E)} 1dxdy = \int_E 1 \cdot \left|-\frac{1}{2v}\right| dudv = \int_{[1,2]\times[1/2,1]} \frac{1}{2v} dudv = \frac{1}{2}\ln(2).$$

7.2.7. Példa. *Számítsuk ki az*

$$\int_H f(x,y)dxdy$$

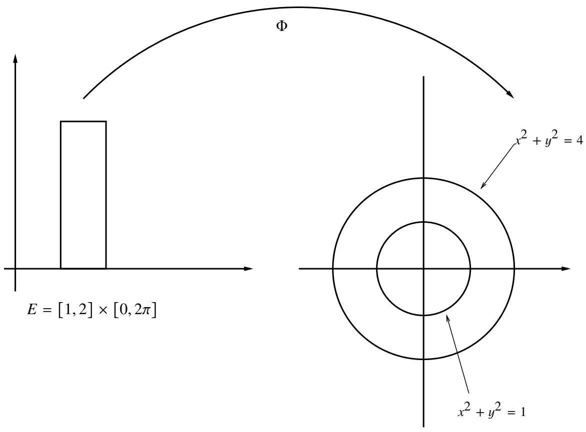
integrált, ha

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right)$$

és

$$H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}.$$

Tekintsük a



$$\Phi(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \qquad ((r,\varphi) \in]0,+\infty[\times[0,2\pi])$$

leképezést. Ekkor Φ *Fréchet-differenciálható és*

$$\Phi'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Ekkor $\det(\Phi'(r,\varphi)) = r \neq 0$, *továbbá, ha*

$$E = [1,2] \times [0,2\pi],$$

akkor

$$\Phi(E) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\},$$

így az integráltranszformációs tétel szerint,

$$\int_H f(x,y)dx = \int_H \ln(x^2+y^2)dxdy = \int_E \ln((r\cos(\varphi)^2 + (r\sin(\varphi))^2)) \cdot rdrd\varphi$$
$$= \int_{[1,2]\times[0,2\pi]} r\ln(r^2)drd\varphi = 2\pi \int_1^2 r\ln(r^2)dr = 2\pi \left[r^2 \left(\ln(r) - \frac{1}{2} \right) \right]_1^2 = 4\pi \left(2\ln(2) - \frac{3}{4} \right)$$

8. fejezet

Differenciálegyenletek

8.1. Differenciálegyenletek osztályozása

Differenciálegyenlet alatt olyan egyenletet értünk, melyben az ismeretlen egy differenciálható egy- vagy többváltozós függvény és az egyenlet ezen a függvényen kívül tartalmazza ennek a függvénynek a deriváltját, illetve deriváltjait is.

Ha a differenciálegyenletben egyetlen független változó van, akkor a derivált közönséges derivált. Ebben az esetben **közönséges differenciálegyenlet**ről beszélünk.

Ha a differenciálegyenletben kettő vagy több független változó van, akkor a derivált parciális derivált. Ekkor a szóban forgó egyenlet egy **parciális differenciálegyenlet**.

Ha az ismeretlen függvények száma egynél több, akkor az ismeretlen függvények számával egyenlő számú differenciálegyenletből álló **differenciálegyenlet–rendszer**rel van dolgunk.

A **differenciálegyenlet rendje** az egyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált rangjával egyenlő.

A közönséges differenciálegyenletek közül azokat, amelyekben az ismeretlen függvény és ennek a deriváltjai legfeljebb csak első hatványon fordulnak elő és szorzatuk nem szerepel, **lineáris differenciálegyenletek**nek nevezzük. Ellenkező esetben **nemlineáris differenciálegyenletek**ről beszélünk.

Ha a közönséges differenciálegyenletben van olyan tag, amely állandó, vagy amelyben csak a független változó szerepel, akkor a differenciálegyenlet **inhomogén differenciálegyenlet**. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a differenciálegyenlet **homogén differenciálegyenlet**.

Ha a közönséges differenciálegyenletben a függvényt és a deriváltjait tartalmazó tagok állandók, akkor az egyenletet **állandó együtthatós differenciálegyenlet**nek nevezzük. Ellenkező esetben **függvényegyütthatós differenciálegyenlet**ből beszélünk.

8.1.1. Példa. *Az*

$$x \cdot y^2 + y + x \cdot y \cdot y' - x \cdot y = 0$$

egyenlet egy

– *közönséges*

– *elsőrendű*

– *homogén*

– *függvényegyütthatós*

differenciálegyenlet.

8.1.2. Példa. *A*

$$4 \cdot \left(y''\right)^2 + 4x \cdot y'' - 3x \cdot y + x^2 - 3 = 0$$

egyenlet egy

– *közönséges*

– *másodrendű*

– *inhomogén*

– *függvényegyütthatós*

differenciálegyenlet.

8.2. Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek

8.2.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ nemüres, nyílt, $F : D \to \mathbb{R}$, ekkor az*

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

*egyenletet **elsőrendű közönséges implicit differenciálegyenlet**nek nevezzük.*

8.2.2. Definíció. *Egy $\varphi : I \to \mathbb{R}$ függvény az (1) differenciálegyenlet **megoldása Cauchy–féle értelemben**, ha*

(i) $I \subset \mathbb{R}$ valódi intervallum, φ differenciálható I–n;

(ii) minden $x \in I$ esetén $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$;

(iii) $F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x)\right) = 0$ teljesül minden $x \in I$ esetén.

8.2.3. Definíció. *Az*

$$\begin{cases} F(x, y, y') &= 0 \\ y(\xi) &= \eta \end{cases} \tag{2}$$

*egyenletekből álló rendszert **kezdeti érték problémá**nak vagy **Cauchy–feladat**nak nevezzük.*

8.2.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\varphi : I \to \mathbb{R}$ függvény **megoldása** a (2) Cauchy–feladatnak, ha φ megoldása az (1) egyenletnek, $\xi \in I$ és $\varphi(\xi) = \eta$.*

8.2.5. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ nemüres, nyílt, $f : D \to \mathbb{R}$, ekkor az*

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

*egyenletet **elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet**nek nevezzük.*

8.2.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\varphi : I \to \mathbb{R}$ függvény a (3) differenciálegyenlet **megoldása**, ha*

(i) $I \subset \mathbb{R}$ valódi intervallum, φ differenciálható I–n;

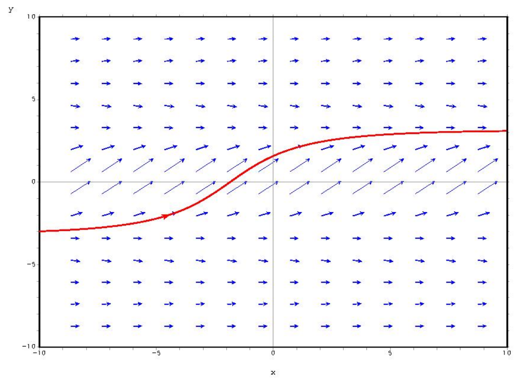
(ii) $(x, \varphi(x)) \in D$ minden $x \in I$ esetén;

(iii) $\varphi'(x) = f\left(x, \varphi(x)\right)$ teljesül minden $x \in I$ esetén.

8.2.7. Definíció. *Ha $(\xi, \eta) \in D$, akkor az $y(\xi) = \eta$ egyenletet a (3) differenciálegyenletre vonatkozó **kezdeti érték feltétel**nek nevezzük, míg a*

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(\xi) &= \eta \end{cases} \tag{4}$$

*egyenletrendszert a (3) egyenletre vonatkozó **kezdeti érték problémá**nak vagy **Cauchy–feladat**nak hívjuk.*



8.1. ábra. Iránymező és egy integrálgörbéje

8.2.1. Példa (Az iránymező integrálgörbéi). *Tegyük fel, hogy a sík valamilyen tartományán minden pontban adva van egy, az adott ponton átmenő egyenes. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy ezen a tartományon egy* ***iránymező*** *van adva. Azt a görbét, mely minden pontjában érinti az iránymezőt, az iránymező* ***integrálgörbéjé****nek hívjuk. Ez az elnevezés arra utal, hogy néhány esetben ezeket a görbéket integrálás útján határozhatjuk meg.*

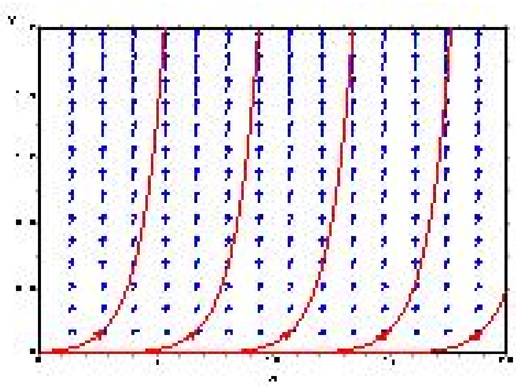
8.2.2. Példa (A normális szaporodás egyenlete). *Tegyük fel, hogy egy biológiai populáció nagysága a t időpillanatban $x(t)$, és a populáció növekedési sebessége arányos a populáció számával. Ez a feltevés közelítőleg teljesül, ha elegendő táplálék áll rendelkezésre a populáció számára. Ekkor minden t időpillanatban*

$$x'(t) = k \cdot x(t)$$

teljesül valamely $k > 0$ esetén. Ennek az egyenletnek a megoldása

$$x(t) = C \cdot e^{k(t-t_0)},$$

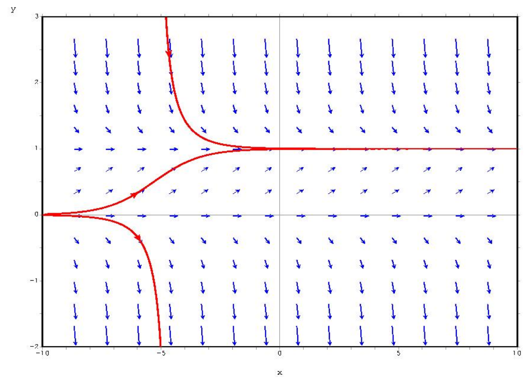
következésképpen a normális szaporodás egyenletének megoldása exponenciálisan nő $t \to +\infty$ esetén. Az is könnyen látható, hogy a populáció megkettőződéséhez mindedig unyanannyi idő (jelen esetben $\ln(2)/k$) idő szükséges, ez Földünk esetében nagyjából 40 év.



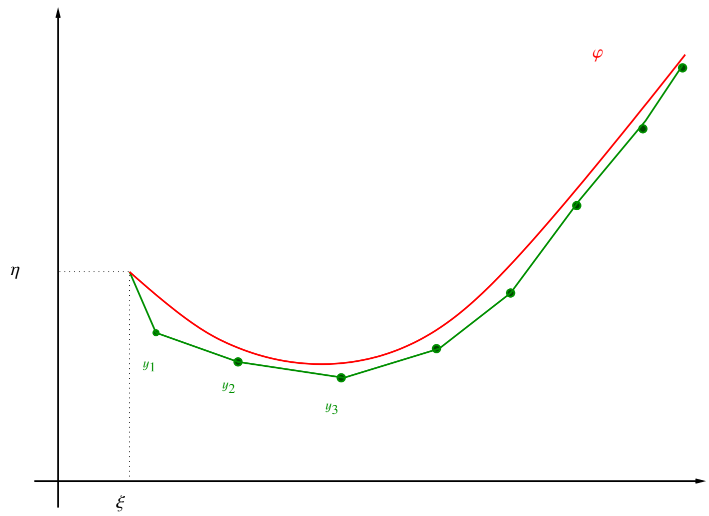
8.2. ábra. Az $x'(t) = k \cdot x(t)$ differenciálegyenlet iránymezője

8.2.3. Példa (A logisztikus egyenlet). *A szokásos szaporodás modelljének fenti egyenlete csak addig felel meg, amíg a populációban lévő egyedek száma nem túl nagy. Az egyedek számának növekedésekor az élelemért folytatott versengés a növekedés csökkenéséhez vezet. Az ezt figyelembe vevő legyegyszerűbb feltevés az, hogy a k együttható az x inhomogén lineáris függvénye, vagyis $k = (a - b \cdot x(t))$. Az egyszerűség kedvéért legyenek $a = b = 1$, ekkor az úgynevezett logisztikus egyenlethez jutunk*

$$x'(t) = (1 - x(t)) \cdot x(t).$$



8.3. ábra. A logisztikus egyenlet iránymezője



8.4. ábra. Az Euler-féle töröttvonal módszer

8.2.1. Megjegyzés (Euler-féle töröttvonal módszer). *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és tegyük fel, hogy az f függvény a D halmazon a második változója szerint folytonosan parciálisan differenciálható és legyen $(\xi, \eta) \in D$. Tekintsük a*

$$\begin{cases} y' & = f(x, y) \\ y(\xi) & = \eta \end{cases}$$

Cauchy-feladatot. Legyen $h >$ rögzített és

$$x_n = \xi + nh \qquad y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol $x_0 = \xi_0$ és $y_0 = \eta$. Ekkor az y_n értékek a fenti Cauchy-feladat megoldását közelítik az x_n pontban, vagyis $y_n \approx y(x_n)$. Az (x_n, y_n) pontokra illeszkedő töröttvonalat Euler-féle töröttvonalnak nevezzük. Megmutatható továbbá, hogy a h lépésköz minden határon túli csökkentésével ezeknek a töröttvonalaknak a sorozata a fenti Cauchy-feladat megoldásához konvergál.

8.3. Fontos differenciálegyenlet–típusok

8.3.1. Az $y' = f(x)$ alakú differenciálegyenletek

8.3.1. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $\xi \in I$, $\eta \in \mathbb{R}$. Ekkor az*

$$\begin{cases} y' & = & f(x) \\ y(\xi) & = & \eta \end{cases}$$

Cauchy–feladat bármely $\varphi : J \to \mathbb{R}$ megoldása az

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t)dt \quad (x \in I)$$

módon megadott y függvény leszűkítése, ha $J \subset I$ és $\xi \in I$.

8.3.1. Példa. *Tekintsük az*

$$\begin{cases} y' & = & \ln(x) \\ y(1) & = & e \end{cases}$$

Cauchy-feladatot. Ekkor az előző tétel szerint a megoldás

$$y(x) = e + \int_1^x \ln(t)dt = e + [t\ln(t) - t]_1^x = e + x\ln(x) - x + 1 = x(\ln(x) - 1) + 1 + e.$$

8.3.2. Szeparábilis differenciálegyenletek

Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ valódi intervallumok, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ folytonos függvények úgy, hogy $g(x) \neq 0$ minden $x \in J$ esetén. Az

$$y' = f(x)g(y)$$

egyenletet **szeparábilis differenciálegyenlet**nek nevezzük.

8.3.2. Tétel. *Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ valódi intervallumok, $\xi \in I$, $\eta \in J$, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ folytonos függvények úgy, hogy $g(x) \neq 0$ minden $x \in J$ esetén. A $\varphi : H \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csakis akkor megoldása az*

(5)
$$\begin{cases} y' & = & f(x)g(y) \\ y(\xi) & = & \eta \end{cases}$$

Cauchy–feladatnak, ha

(6)
$$\int_{\eta}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(t)}dt = \int_{\xi}^{x} f(s)ds \qquad (x \in H)$$

teljesül, feltéve, hogy $\xi \in H \subset I$.

8.3.2. Példa. *Tekintsük az*

$$\begin{cases} y' \cdot \operatorname{ctg}(x) + y & = & 2 \\ y(0) & = & -1 \end{cases}$$

Cauchy-feladatot. Ekkor a fenti tételt használva, azt kapjuk, hogy a megoldás

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{\varphi(x)} \frac{1}{2-t}dt &= \int_0^x \operatorname{tg}(s)ds \\
[-\ln(|2-t|)]_{-1}^{\varphi(x)} &= [-\ln(|\cos(s)|)]_0^x \\
-\ln(|2-\varphi(x)|) + \ln(3) &= -\ln(|\cos(x)|) + \ln(|\cos(x)|) \\
\ln\left(\left|\frac{3}{2-\varphi(x)}\right|\right) &= \ln\left(\left|\frac{1}{\cos(x)}\right|\right) \\
\varphi(x) &= 2 - 3\cos(x)
\end{aligned}$$

8.3.3. Homogén differenciálegyenletek

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$, ekkor az

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

differenciálegyenletet **homogén differenciálegyenlet**nek nevezzük.

8.3.3. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$, ekkor a $\varphi : I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor megoldása az*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

differenciálegyenletnek, ha az

$$u(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$$

módon definiált u függvény megoldása az

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

szeparábilis differenciálegyenletnek.

8.3.3. Példa. *Tekintsük az*

$$(x - y)dx + (x + y)dy = 0$$

változóban homogén differenciálegyenletet. Legyen

$$y = x \cdot t \quad \text{és} \quad \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx},$$

ekkor az

$$(x - xt)dx + (x + xt)(tdx + xdt) = 0$$

szeparábilis egyenlet adódik. Valóban, a változókat szétválasztva,

$$-\frac{1}{x}dx = \frac{1 + t}{1 + t^2}dt$$

aminek a megoldása

$$-\ln(|x|) + c = \mathrm{arctg}(t) + \frac{\ln(|t^2 + 1|)}{2}.$$

Végül a $t = \dfrac{y}{x}$ helyettesítéssel az adódik, hogy az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása

$$-\ln(|x|) + c = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\ln\left(\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right|\right)}{2}.$$

8.3.4. Szeparábilis differenciálegyenletre visszavezethető differenciálegyenletek

Az $y' = f(ax + by + c)$ alakú differenciálegyenletek

Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ és tekintsük az

$$y' = f(ax + by + c)$$

differenciálegyenletet. Legyen

$$u = ax + by + c.$$

Ekkor

$$u' = a + by',$$

továbbá a fenti egyenlet az

$$\frac{1}{b}u' - \frac{a}{b} = f(u)$$

alakra hozható, ami már egy szeparábilis differenciálegyenlet.

8.3.4. Példa. *Tekintsük az*

$$y' = \sin(x+y)$$

Legyen

$$y = u - x \quad \textit{és} \quad y' = u' - 1.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} u' - 1 &= \sin(u) \\ \frac{1}{\sin(u)+1} du &= 1dx \\ -\frac{2\cos(u)+2}{\sin(u)+\cos(u)+1} &= x + c \end{aligned}$$

Végül, az $u = x + y$ helyettesítéssel kapjuk az eredeti differenciálegyenlet

$$-\frac{2\cos(x+y)+2}{\sin(x+y)+\cos(x+y)+1} = x + c$$

általános megoldását.

Az $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$ alakú differenciálegyenletek

Legyenek $a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$ és tekintsük az

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$$

differenciálegyenletet. Ebben az esetben a paraméterek értékétől függően két esetet kell megkülönböztetnünk.
1. eset. Ha

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix} \neq 0,$$

akkor meghatározzuk az

$$\begin{cases} ax + by + c &= 0 \\ Ax + By + C &= 0 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer egyértelmű (x_0, y_0) megoldását. Ennek ismeretében, ha a fenti differenciálegyenletben elvégezzük az

$$\begin{aligned} x &= u + x_0 & \qquad dx &= du \\ y &= v + y_0 & \qquad dy &= dv \end{aligned}$$

helyettesítéseket, akkor egy szeparábilis differenciálegyenlet adódik.
2. eset. Ha

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix} = 0,$$

akkor a megfelelő helyettesítés

$$u = ax + by \qquad u' = a + by'.$$

A helyettesítések elvégzése után egy szeparábilis differenciálegyenlet adódik.

Az $yf(xy)dx + yg(xy)dy = 0$ típusú differenciálegyenletek

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények és tekintsük az

$$yf(xy)dx + yg(xy)dy = 0$$

differenciálegyenletet. Ha ebben az egyenletben elvégezzük az

$$u = xy \qquad \frac{du}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$$

helyettesítéseket, akkor egy szeparábilis egyenletre jutunk.

8.3.5. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Ekkor az

$$y' + f(x)y = g(x) \tag{1}$$

egyenletet **elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet**nek nevezzük, ha $g \neq 0$. Abban az esetben, amikor $g \equiv 0$, **elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenlet**ről beszélünk.

8.3.4. Tétel (A homogén egyenlet megoldásai). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor a*

$$y' + f(x)y = 0 \tag{2}$$

differenciálegyenlet bármely megoldása a

$$\varphi(x) = c \cdot e^{-F(x)} \qquad (x \in I)$$

módon értelmezett $\varphi : I \to \mathbb{R}$ függvény leszűkítése, ahol $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans és F jelöli az f függvény egy primitív függvényét. Továbbá, ha $\xi \in I$ és $\eta \in \mathbb{R}$, akkor a

$$\psi(x) = \eta \cdot \exp\left(-\int_{\xi}^{x} f(t)dt \right) \qquad (x \in I)$$

módon megadott $\psi : I \to \mathbb{R}$ függvény az

$$\begin{cases} y' + f(x)y &= 0 \\ y(\xi) &= \eta \end{cases}$$

Cauchy–feladatnak az egyértelmű, I–n értelmezett megoldása.

8.3.1. Megjegyzés. *Az elsőrendű lineáris, homogén differenciálegyenlet összes, I–n értelmezett megoldása egy egydimenziós valós vektorteret alkot.*

8.3.5. Példa. *Tekintsük az*

$$\begin{cases} y' + 2xy &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Cauchy-feladatot. Ekkor az előző tétel szerint a megoldás

$$\varphi(x) = 1 \cdot \exp\left(-\int_{0}^{x} 2tdt \right) = \exp\left(-\left[t^2\right]_0^x \right) = \exp(-x^2).$$

8.3.5. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Tegyük fel, hogy a $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ függvények megoldásai az*

$$y' + f(x)y = g(x)$$

elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenletnek. Ekkor a

$$\chi(x) = \varphi(x) - \psi(x) \qquad (x \in I)$$

módon megadott $\chi : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldása az

$$y' + f(x)y = 0$$

elsőrendű, lineáris, homogén differenciálegyenletnek.

8.3.6. Tétel (Az inhomogén egyenlet megoldásai). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Ekkor a*

$$y' + f(x)y = g(x) \tag{3}$$

elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenletnek az összes megoldása előáll

$$\psi(x) = e^{-F(x)}\left(c + \int g(x)e^{F(x)}dx\right)$$

alakban, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans és F jelöli az f függvény valamely primitív függvényét.

8.3.2. Megjegyzés. *Az előző tétel feltételei mellett, ha $\xi \in I$ és $\eta \in \mathbb{R}$, akkor az*

$$\begin{cases} y' + f(x)y &= g(x) \\ y(\xi) &= \eta \end{cases}$$

Cauchy–feladat egyértelmű megoldása

$$\varphi(x) = \left(\eta + \int_{\xi}^{x} g(t)e^{\int_{\xi}^{t} f(s)ds} dt\right) \cdot e^{-\int_{\xi}^{x} f(u)du}.$$

8.3.6. Példa. *Tekintsük az*

$$y' - y = x$$

elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletet. Az általános megoldás meghatározásához először az

$$y' - y = 0$$

homogén egyenletet kell megoldanunk, melynek általános megoldása

$$y(x) = ce^x$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = c(x)e^x$$

alakban keressük, ekkor

$$y_p'(y) = c'(x)e^x + c(x)e^x.$$

Ezeket az egyenletbe visszahelyettesítve

$$\begin{aligned} c'(x)e^x + c(x)e^x - c(x)e^x &= x \\ c'(x)e^x &= x \\ c'(x) &= xe^{-x} \\ c(x) &= -(x+1)e^{-x}. \end{aligned}$$

Így, az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = c(x)e^x = -(x+1)e^{-x}e^x = -(x+1),$$

az általános megoldás pedig

$$y(x) = ce^x - x - 1.$$

8.3.6. Egzakt differenciálegyenletek

Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ nemüres, nyílt halmaz, $M, N : D \to \mathbb{R}$ folytonosan parciálisan differenciálható függvények. Az

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5}$$

differenciálegyenletet **egzakt differenciálegyenlet**nek nevezzük, ha

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad ((x,y) \in D)$$

teljesül.

8.3.7. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy tartomány, azaz, egy nemüres, nyílt, összefüggő halmaz. $M, N : D \to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek a D halmazon folytonosan parciálisan differenciálhatóak, úgy, hogy*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \qquad ((x,y) \in D).$$

Ekkor létezik egy olyan $F : D \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan parciálisan differenciálható függvény, melyre

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y) \qquad ((x,y) \in D)$$

teljesül. Ezt az F függvényt az M és az N függvények ***közös potenciálfüggvény****ének nevezzük.*

8.3.8. Tétel. *Az előző tétel feltételei mellett az*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

egzakt differenciálegyenlet általános megoldása

$$F(x,y) = C \qquad ((x,y) \in D),$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans.

A fentiek alapján, az egyenlet megoldásához elegendő meghatározni az F függvényt. Mivel

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y),$$

ezért

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + f(x),$$

ahol f egy egyelőre ismeretlen (csak x-től függő) függvény. Mivel

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y),$$

ezért

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int N(x,y)dy + f(x)\right] = M(x,y),$$

amiből

$$f(x) = \int \left[M(x,y) - \left(\int \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} dy\right)\right] dx$$

Így

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + \int \left[M(x,y) - \left(\int \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} dy\right)\right] dx$$

8.3.3. Megjegyzés. *Az F függvényt úgy is meghatározhattuk volna, hogy abból indulunk ki, hogy* $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$, *ekkor a fenti számolást elvégezve az adódik, hogy*

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \left(\int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx \right) \right] dy,$$

ami az egyenlet egzakt volta miatt ugyanazt az F függvényt határozza meg, mint a fenti gondolatmenet.

8.3.7. Példa. *Tekintsük az*

$$(e^{-y} + x)dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$$

differenciálegyenletet. Legyenek

$$M(x,y) = e^{-y} + x \quad \textit{és} \quad N(x,y) = -2y - xe^{-y}$$

Ekkor

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = -e^{-y} \quad \textit{és} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = -e^{-y},$$

így a fenti egyenlet egzakt. Ezért

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + f(x) = \int -2y - xe^{-y}dy + f(x) = -y^2 + xe^{-y} + f(x)$$

Mivel

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y),$$

ezért

$$e^{-y} + f'(x) = e^{-y} + x,$$

azaz,

$$f'(x) = x.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} - y^2 + xe^{-y},$$

és ebben az esetben az általános megoldás

$$F(x,y) = C.$$

Egzakt differenciálegyenletre visszavezethető differenciálegyenletek

Ha az

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

egyenlet nem egzakt, akkor több esetben elérhető, hogy az egyenletet egy alkalmas $m(x,y) \neq 0$ függvénnyel megszorozva a kapott egyenlet már egzakt. Az ilyen $m(x,y)$ függvényt **integráló tényező**nek nevezzük.

Eset	**Integráló tényező**
$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = f(x)$	$m(x) = e^{\int f(x)dx}$
$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = g(y)$	$m(y) = e^{\int -g(y)dy}$
$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = N(x,y)f(x) - M(x,y)g(y)$	$m(x,y) = e^{\int f(x)dx + \int g(y)dy}$
M és N azonos fokszámú homogén függvények	$m(x,y) = \frac{1}{xM(x,y)+yN(xy)}$

8.4. Elsőrendű differenciálegyenlet–rendszerekre vonatkozó egzisztencia és unicitás tételek

8.4.1. Tétel (Picard–Lindelöf). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum, $f: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény és tegyük fel, hogy létezik olyan $L: I \to [0, +\infty[$ folytonos függvény, melyre*

$$(\mathcal{L}) \qquad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L(x)\,|y_1 - y_2| \quad (x \in I, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n),$$

azaz, f lokális–globális Lipschitz–feltételt teljesít $I \times \mathbb{R}^n$–en. Legyen $\xi \in I$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, ekkor az

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(\xi) &= \eta \end{cases}$$

Cauchy–feladatnak létezik pontosan egy $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$ megoldása és minden más megoldás ennek a megoldásnak a leszűkítése. Továbbá, bármely $\varphi_0: I \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény esetén a

$$(\mathcal{P}) \qquad \varphi_{n+1}(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f\left(t, \varphi_n(t)\right) dt \quad (x \in I, n > 0)$$

Picard–féle iteráció pontonként konvergál φ–hez és a konvergencia az I bármely kompakt részintervallumán egyenletes.

8.4.1. Példa (Picard–iteráció). *Tekintsük az*

$$\begin{cases} y' &= x + y \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Cauchy–feladatot. Ekkor az előző tétel jelöléseivel

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0 \qquad \text{és} \qquad f(x, y) = x + y$$

Mivel

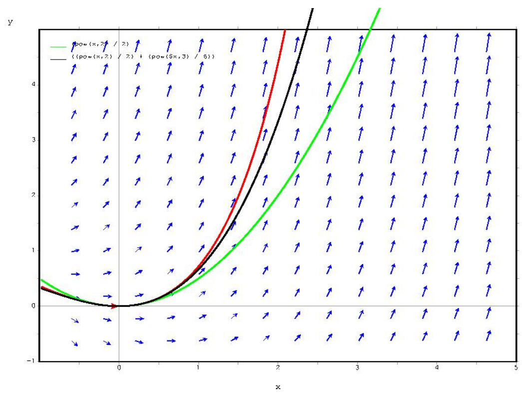
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x + y_1 - x - y_2| = 1 \cdot |y_1 - y_2| \qquad (x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}),$$

ezért az f függvény az $L(x) = 1$ függvénnyel eleget tesz egy lokális–globális Lipschitz–feltételnek. Legyen $\varphi_0(x) = 0\ (x \in \mathbb{R})$, ekkor a Picard–Lindelöf–tétel szerint

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 0 + \int_0^x (t + 0)dt = \tfrac{x^2}{2} \\
\varphi_2(x) &= 0 + \int_0^x t + \tfrac{t^2}{2} dt = \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{2\cdot 3} \\
\varphi_3(x) &= 0 + \int_0^x t + \tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t^3}{2\cdot 3} dt = \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{2\cdot 3} + \tfrac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} \\
&\vdots \\
\varphi_n(x) &= 0 + \int_0^x t + \tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t^3}{2\cdot 3} + \cdots + \tfrac{t^n}{n!} dt = \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{2\cdot 3} + \cdots + \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Így a differenciálegyenlet megoldása

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - x - 1 = e^x - x - 1.$$



8.5. ábra. Az $y' = x + y$ differenciálegyenlet iránymezője, a $(0, 0)$ ponton áthaladó megoldás, illetve a Picard-iteráció első két tagja

8.4.2. Példa (Picard–iteráció). *Tekintsük az*

$$\begin{cases} y' &= xy \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Cauchy–feladatot. Ekkor az előző tétel jelöléseivel

$$\xi = 0, \qquad \eta = 1 \qquad \text{és} \qquad f(x, y) = xy$$

Mivel

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |xy_1 - xy_2| = |x| \cdot |y_1 - y_2| \qquad (x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}),$$

ezért az f függvény az $L(x) = |x|$ függvénnyel eleget tesz egy lokális–globális Lipschitz–feltételnek. Legyen $\varphi_0(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R})$, ekkor a Picard–Lindelöf–tétel szerint

$$\varphi_{n+1}(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, \varphi_n(t))\, dt,$$

azaz, ebben az esetben

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x t \cdot 1 dt = 1 + \frac{x^2}{2};$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8};$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

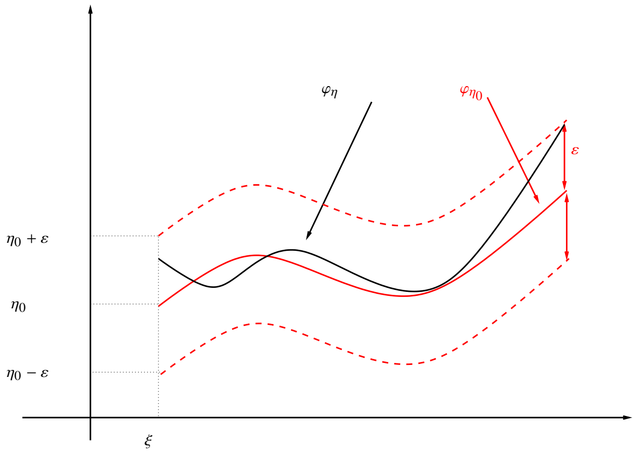
Így a differenciálegyenlet megoldása

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k$$

8.4.1. Lemma. *Az előző tétel feltételei mellett legyen $J \subset I$ olyan intervallum, hogy $\xi \in J$. Ekkor a $\psi \colon J \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény akkor és csak akkor megoldása a $(\mathfrak{C})$ Cauchy–feladatnak, ha megoldása az*

$$(\mathfrak{I}) \qquad \psi(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, \psi(t))\, dt$$

integrálegyenletnek.



8.6. ábra. A kezdeti értéktől való foyltonos függés

8.4.2. Tétel (Lokális egzisztencia-tétel). *Legyen $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f: D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $(\xi, \eta) \in D$. Ekkor van olyan $\delta > 0$, hogy az*

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(\xi) &= \eta \end{cases}$$

kezdeti érték probléma megoldható a $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ intervallumon.

8.4.3. Tétel (A kezdeti értéktől való folytonos függés tétele). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nemüres intervallum, $f: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, és tegyük fel, hogy létezik olyan $L: I \to [0, +\infty[$ folytonos függvény, mellyel az f függvény teljesíti az $(\mathcal{L})$ feltételt. Ha $\xi \in I$ és $\eta \in \mathbb{R}^n$, akkor jelölje $\varphi_\eta: I \to \mathbb{R}^n$ az*

$$y' = f(x,y) \qquad y(\xi) = \eta$$

Cauchy–feladatnak a megoldását. Ekkor φ_η a kezdeti érték folytonos függvénye, *azaz ha $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ egy $\mathbb{R}^n$–beli, η_0–hoz konvergáló sorozat, akkor a $\left(\varphi_{\eta_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az I intervallumon pontonként a φ_{η_0} függvényhez konvergál, továbbá a konvergencia az I minden kompakt részintervallumán egyenletes.*

Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet–rendszerek

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és $A: I \to \mathbb{R}^{n^2}$, $B: I \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvények, és tekintsük az

$$\begin{cases} y'(x) &= A(x)y(x) + B(x) \\ y(\xi) &= \eta \end{cases}$$

kezdeti érték problémát, ahol $\xi \in I$ és $\eta \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az A és a B függvények folytonosságából azonnal adódik a fenti kezdeti érték probléma I–n való egyértelmű megoldhatósága.

8.4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $y_1, \ldots, y_n: I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvényekből álló függvényrendszer a*

$$(\mathcal{H}) \qquad y'(x) = A(x)y(x)$$

*homogén, lineáris, differenciálegyenlet–rendszer **alaprendszere**, ha az $y_1, \ldots, y_n$ függvények lineárisan függetlenek és megoldásai a fenti differenciálegyenlet–rendszernek. Az*

$$Y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x)) \qquad (x \in I)$$

*módon értelmezett $Y: I \to \mathbb{R}^{n^2}$ mátrix értékű függvényt a fenti differenciálegyenlet–rendszer **alapmátrix**ának hívjuk. Vegyük észre, hogy*

$$Y'(x) = \left(y_1'(x), \ldots, y_n'(x)\right) = (A(x)y_1(x), \ldots, A(x)y_n(x)) = A(x)Y(x).$$

8.4.2. Definíció. *Ha* $Y: I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *a* $(\mathcal{H})$ *homogén, lineáris differenciálegyenlet–rendszer alapmátrixa, akkor a*

$$w(x) = \det(Y(x)) \qquad (x \in I)$$

módon értelmezett $w: I \to \mathbb{R}$ *függvényt a* $(\mathcal{H})$ *homogén, lineáris differenciálegyenlet–rendszer* ***Wronski–determinráns****ának hívjuk.*

8.4.4. Tétel (Liouville-tétel). *Legyen* $Z: I \to \mathbb{R}^{n^2}$ *a* $(\mathcal{H})$ *homogén, lineáris differenciálegyenlet–rendszer alapmátrixa és* $w(x) = \det(Z(x))$*. Ekkor a* $w: I \to \mathbb{R}$ *függvény megoldása a*

$$w'(x) = \operatorname{tr}(A(x))\, w(x)$$

differenciálegyenletnek, azaz

$$w(x) = w(\xi) \exp\left(\int_{\xi}^{x} \operatorname{tr}(A(t))dt\right) \qquad (x \in I)\,.$$

8.4.5. Tétel. *Legyen* $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathbb{R}^n$ *n darab lineárisan független vektor,* $y_1, \ldots, y_n$ *pedig a* $(\mathcal{H})$ *homogén, lineáris, differenciálegyenlet–rendszernek az*

$$y_i(\xi) = \eta_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldásai. Ekkor

(i) az $y_1, \ldots, y_n$ *rendszer a* $(\mathcal{H})$ *homogén, lineáris, differenciálegyenlet–rendszer alaprendszere;*

(ii) a $(\mathcal{H})$ *homogén, lineáris, differenciálegyenlet–rendszer tetszőleges* $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$ *megoldásához megadhatóak olyan* $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ *konstansok, hogy*

$$\varphi(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \qquad (x \in I)$$

teljesül.

Magasabb rendű differenciálegyenletek

Az Átviteli elv

8.4.3. Definíció. *Legyen* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *nemüres, nyílt halmaz,* $f: D \to \mathbb{R}$*, ekkor az*

$$(\mathcal{N}) \qquad y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

*egyenletet n****–edrendű explicit differenciálegyenlet****nek nevezzük. Ha* $(\xi, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \in D$*, akkor a*

$$(\kappa) \qquad \begin{cases} y(\xi) &= \eta_0 \\ y'(\xi) &= \eta_1 \\ & \vdots \\ y^{(n-1)}(\xi) &= \eta_{n-1} \end{cases}$$

feltételrendszert az $(\mathcal{N})$ *egyenletre vonatkozó* ***kezdeti érték feltétel****nek hívjuk.* $(\mathcal{N})$*-et és* (κ)*-t együtt n****–edrendű kezdeti érték problémá****nak vagy* ***Cauchy–feladat****nak nevezzük.*

8.4.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\varphi: I \to \mathbb{R}$ *függvény az* $(\mathcal{N})$ *egyenlet* ***megoldás****a, ha*

(i) $I \subset \mathbb{R}$ *(nem elfajuló) intervallum és* φ *n–szer differenciálható I-n;*

(ii) minden $x \in I$ *esetén* $\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right) \in D$*;*

(iii) tetszőleges $x \in I$ *esetén* $\varphi^{(n)}(x) = f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right)$ *teljesül.*

8.4.5. Definíció. *Az* $(\mathcal{N}) - (\kappa)$ ***kezdeti érték probléma megoldása*** *alatt egy olyan* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ *függvényt értünk, melyre*

(i) φ *megoldása az* $(\mathcal{N})$ *egyenletnek;*

(ii) $\varphi(\xi) = \eta_0,\ \varphi'(\xi) = \eta_1, \ldots, \varphi^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$.

A 8.4.3. Definíció feltételei és jelölései mellett tekintsük a következő n–edrendű differenciálegyenlet–rendszert, illetve kezdeti értékeket

$$(\mathcal{N}^*) \qquad \begin{cases} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= f\left(x, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\right) \end{cases}$$

$$(\kappa^*) \qquad \begin{cases} z_1(\xi) &= \eta_0 \\ z_2(\xi) &= \eta_1 \\ &\vdots \\ z_n(\xi) &= \eta_{n-1} \end{cases}$$

8.4.6. Tétel (Átviteli elv). *Legyen* φ *megoldása az* $(\mathcal{N})$ *egyenletnek, illetve az* $(\mathcal{N}) - (\kappa)$ *kezdeti érték problémának. Ekkor a* $\psi = \left(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}\right)$ *módon definiált* $\psi\colon I \to \mathbb{R}^n$ *függvény megoldása az* $(\mathcal{N}^*)$ *egyenletnek, illetve az* $(\mathcal{N}^*) - (\kappa^*)$ *Cauchy–feladatnak. Megfordítva, ha a* $\psi\colon I \to \mathbb{R}^n$ *függvény megoldása az* $(\mathcal{N}^*)$ *egyenletnek, illetve az* $(\mathcal{N}^*) - (\kappa^*)$ *Cauchy–feladatnak, akkor a* ψ_1 *(a* ψ *függvény első koordinátafüggvénye) függvény megoldása az* $(\mathcal{N})$ *egyenletnek, illetve az* $(\mathcal{N}) - (\kappa)$ *Cauchy–feladatnak.*

Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek

8.4.6. Definíció. *Legyen* $I \subset \mathbb{R}$ *valódi intervallum,* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_n\colon I \to \mathbb{R}$ *folytonos függvények. Ekkor az*

$$(\mathcal{L}) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

egyenletet ***n–edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet****nek nevezzük, ha b nem az azonosan zéró függvény, ellenkező esetben* ***n–edrendű lineáris homogén differenciálegyenlet****ről beszélünk.*

Az Átviteli elv szerint $(\mathcal{L})$-nek a következő differenciálegyenlet–rendszer feleltethető meg.

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= -a_0(x)z_1 - a_1(x)z_2 - \cdots - a_{n-1}(x)z_n + b(x), \end{aligned}$$

azaz

$$(\mathcal{L}^*) \qquad Z'(x) = A(x) \cdot Z(x) + B(x),$$

ahol

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \\ & & & \ddots & \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \ldots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

8.4.7. Tétel (Egzisztencia és unicitási tétel). *Ha az* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_n\colon I \to \mathbb{R}$ *függvények folytonosak, akkor az* $(\mathcal{L})$ *egyenletre vonatkozó tetszőleges kezdeti érték problémának létezik pontosan egy, I-n értelmezett megoldása.*

8.4.7. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ valódi intervallum, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Ha a $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}$ függvények lineárisan független megoldásai az*

$$(\mathcal{L}_{\text{hom}}) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

n–edrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek, akkor ezeket a függvényeket az $(\mathcal{L}_{\text{hom}})$ egyenlet ***alap-rendszer****ének nevezzük.*

8.4.8. Tétel (Liouville–tétel). *A $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}$ függvények pontosan akkor alkotják alaprendszerét az $(\mathcal{L}_{\text{hom}})$ differenciálegyenletnek, ha a*

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, \psi_n = \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_n' \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

alaprendszerét alkotják a

$$Z'(x) = A(x)Z(x)$$

elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet–rendszernek, továbbá, a

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \dots & \varphi_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

módon definiált $w : I \to \mathbb{R}$ függvény kielégíti a

$$w'(x) + a_{n-1}(x)w(x) = 0$$

egyenletet, azaz,

$$w(x) = w(\xi) \exp\left(- \int_\xi^x a_{n-1}(t)dt \right) \quad (x \in I).$$

8.4.1. Következmény. *Ha a $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}$ függvények alaprendszerét alkotják az $(\mathcal{L}_{\text{hom}})$ homogén lineáris differenciálegyenletnek, akkor ezen függvényrendszer Wronski–determinánsa seholsem nulla I–n. Megfordítva, ha $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}$ függvényrendszer Wronski–determinánsa seholsem tűnik el I-n, akkor ezen függvényrendszer az $(\mathcal{L}_{\text{hom}})$ homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerét alkotja.*

8.4.9. Tétel (Az inhomogén egyenlet megoldása). *Legyen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ az $(\mathcal{L}_{\text{hom}})$ homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszere. Ekkor az $(\mathcal{L})$ inhomogén lineáris differenciálegyenlet összes megoldása előáll*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^n \left(\int_\xi^x \frac{w(\varphi_1(t), \dots, \varphi_{i-1}(t), \varphi_{i+1}(t), \dots, \varphi_n(t))}{w(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))} b(t)dt \right) (-1)^{n+i} \varphi_i(x)$$

alakban, ahol $c_1, \dots, c_n$ tetszőleges valós konstansok.

Konstansegyütthatós lineáris differenciálegyenletek

8.4.8. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, ekkor a*

$$(\mathcal{K}) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

*egyenletet n***–edrendű konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenlet***nek nevezzük. A*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

módon megadott polinomot a $(\mathcal{K})$ egyenlet ***karakterisztikus polinom****jának hívjuk.*

8.4.10. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ és jelölje P a $(\mathcal{K})$ egyenlet karakterisztikus polinomját. Ha*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \qquad \mathrm{mult}(\alpha_i) = n_i,\ i = 1, \ldots, k$$

a P páronként különböző valós, míg

$$\beta_1 + i\gamma_1, \ldots, \beta_m + i\gamma_m \qquad \mathrm{mult}(\beta_j + i\gamma_j) = l_j,\ j = 1, \ldots, m$$

a P páronként különböző komplex gyökei, akkor az

$$\begin{gathered}
e^{\alpha_1 x},\ xe^{\alpha_1 x},\ \ldots,\ x^{n_1-1}e^{\alpha_1 x} \\
e^{\alpha_2 x},\ xe^{\alpha_2 x},\ \ldots,\ x^{n_2-1}e^{\alpha_2 x} \\
\vdots \\
e^{\alpha_k x},\ xe^{\alpha_k x},\ \ldots,\ x^{n_k-1}e^{\alpha_k x} \\
e^{\beta_1 x}\cos(\gamma_1 x),\ e^{\beta_1 x}\sin(\gamma_1 x),\ xe^{\beta_1 x}\cos(\gamma_1 x),\ xe^{\beta_1 x}\sin(\gamma_1 x),\ \ldots x^{l_1-1}e^{\beta_1 x}\cos(\gamma_1 x),\ x^{l_1-1}e^{\beta_1 x}\sin(\gamma_1 x) \\
e^{\beta_2 x}\cos(\gamma_2 x),\ e^{\beta_2 x}\sin(\gamma_2 x),\ xe^{\beta_2 x}\cos(\gamma_2 x),\ xe^{\beta_2 x}\sin(\gamma_2 x),\ \ldots x^{l_2-1}e^{\beta_2 x}\cos(\gamma_2 x),\ x^{l_2-1}e^{\beta_2 x}\sin(\gamma_2 x) \\
\vdots \\
e^{\beta_m x}\cos(\gamma_m x),\ e^{\beta_m x}\sin(\gamma_m x),\ xe^{\beta_m x}\cos(\gamma_m x),\ xe^{\beta_m x}\sin(\gamma_m x),\ \ldots,\ x^{l_m-1}e^{\beta_m x}\cos(\gamma_m x),\ x^{l_m-1}e^{\beta_m x}\sin(\gamma_m x)
\end{gathered}$$

függvények a $(\mathcal{K})$ egyenlet alaprendszerét alkotják.

8.4.3. Példa. *Tekintsük az*

$$y'' - y' - 6y = 0$$

egyenletet. A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0,$$

melynek gyökei $\lambda_1 = 3$ és $\lambda = -2$. Így, az egyenlet általános megoldása

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}.$$

8.4.4. Példa. *Tekintsük az*

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

egyenletet. A karakterisztikus egyenlet

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 37 = 0,$$

melynek gyökei $\lambda_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm 3i$. Így, az egyenlet általános megoldása

$$y = C_1 e^{-x/2}\cos(3x) + C_2 e^{-x/2}\sin(3x).$$

8.4.5. Példa. *Tekintsük az*

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

egyenletet. A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0,$$

melynek gyökei $\lambda_{1,2} = -3$. Így, az egyenlet általános megoldása

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

8.4.6. Példa (Csillapítatlan harmonikus rezgő mozgás). *Egy pont akkor véges csillapítatlan harmonikus rezgőmozgást, ha a gyorsulása arányos az elmozdulásával, de azzal ellentétes irányú. Határozzuk meg az elmozdulást, mint az idő függvényét.*

Jelölje a t időpillanatbeli kitérést $x(t)$, ekkor a pont gyorsulása a t időpillanatban $x''(t)$, így a fentiek alapján az

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

differenciálegyenlet adódik, ahol $\omega \in \mathbb{R}$ adott. Ennek az egyenletnek a karakterisztikus egyenlete a

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

másodfokú algebrai egyenlet, melynek gyökei $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$*. Így, a fenti egyenlet általános megoldása*

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

Tegyük fel, hogy a $t = 0$ *kezdeti időpillanatban a pont kitérése nulla, sebessége pedig* v_0*, azaz,*

$$x(0) = 0 \qquad \textit{és} \qquad x'(t) = v_0,$$

azaz,

$$c_1 = 0 \qquad \textit{és} \qquad c_2 = \frac{v_0}{\omega}.$$

Ezért a kezdeti feltételeknek eleget tevő megoldása

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

8.4.7. Példa (Csillapított harmonikus rezgő mozgás). *Egy pont akkor véges csillapított harmonikus rezgőmozgást, amikor a harmonikus rezgést valami, például súrlódás akadályozza. Ilyen esetben a pont kitérése arányos a gyorsulásával és a sebességével, de mind a kettő ellenkező irányú. Határozzuk meg az elmozdulást, mint az idő függvényét.*

Jelölje a t időpillanatbeli kitérést $x(t)$*, ekkor a pont gyorsulása a t időpillanatban* $x''(t)$*. Ezért a fentiek alapján a folyamatot leíró differenciálegyenlet*

$$m \cdot x''(t) = -\omega^2 m \cdot x(t) - 2s \cdot x'(t),$$

ahol m jelöli a mozgó test tömegét, s pedig a csillapítási tényezőt. Ha bevezetjük a $k = \frac{s}{m}$ *jelölést, akkor ez az egyenlet az egyszerűbb,*

$$x''(t) = -\omega^2 \cdot x(t) - 2k \cdot x'(t)$$

alakra hozható. Ennek az egyenletnek a karakterisztikus egyenlete a

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0$$

algebrai egyenlet, melynek két gyöke $\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}$*. A továbbiakban a k és az ω paraméterek értékétől függően három különböző esetet kell megkülönböztetnünk.*

1. eset *Ha* $k > \omega$*, azaz, ha* $k^2 > \omega^2$*. Ekkor a karakterisztikus egyenletnek két különböző, negatív gyöke van. Ekkor a differenciálegyenlet általános megoldása*

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Tegyük fel, hogy

$$x(0) = 0 \qquad \textit{és} \qquad x'(0) = v_0 > 0.$$

ekkor

$$C_1 = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad \textit{és} \qquad C_1 = \frac{v_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Ezért a kezdeti feltételeket kielégítő megoldás

$$x(t) = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)$$

Ez a rezgés aperiodikus, az ilyen típusú rezgéseket túlcsillapított rezgéseknek nevezzük.

2. eset *Ha* $k = \omega$*, akkor a karakterisztikus egyenletnek egy valós, kétszeres multiplicitású gyöke van, mégpedig* $-k$*. Ekkor a differenciálegyenlet általános megoldása*

$$x(t) = C_1 e^{-kt} + C_2 t e^{-kt}.$$

Tegyük fel, hogy

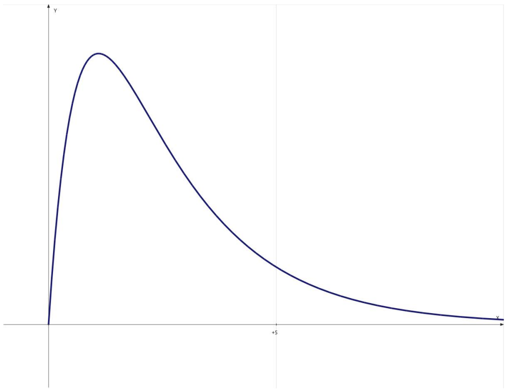
$$x(0) = 0 \qquad \textit{és} \qquad x'(0) = v_0 > 0.$$

ekkor

$$C_1 = 0 \qquad \textit{és} \qquad C_1 = v_0.$$

Ezért a kezdeti feltételeket kielégítő megoldás

$$x(t) = v_0 t e^{-kt}.$$



8.7. ábra. Túlcsillapított rezgés

3. eset *Ha $k < \omega$, azaz, ha $k^2 < \omega^2$. Ekkor a karakterisztikus egyenletnek két különböző, komplex gyöke van, mégpedig $-k \pm i\sqrt{\omega^2 - k^2}$. Az általános megoldás ebben az esetben*

$$x(t) = e^{-kt}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - k^2}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\omega^2 - k^2}t\right)\right)$$

Tegyük fel, hogy

$$x(0) = 0 \qquad \textit{és} \qquad x'(0) = v_0 > 0.$$

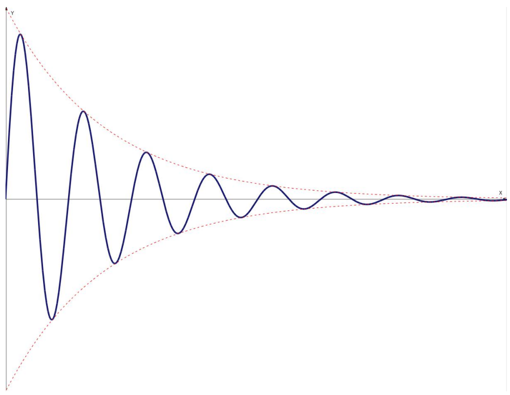
ekkor

$$C_1 = 0 \qquad \textit{és} \qquad C_1 = \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}.$$

Ezért a kezdeti feltételeket kielégítő megoldás

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} e^{-kt} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - k^2}t\right)$$

A megoldásból leolvashatjuk, hogy a kitérés periodikus függvénye az időnek, amplitúdója azonban nem állandó, hanem t növelésével exponenciálisan csökken.



Függelék

Lineáris algebra

Vektorterek

8.4.9. Definíció. *Legyen X egy nemüres halmaz, melyen értelmezve van egy $+ \subset X \times X$ és egy $\cdot \subset X \times \mathbb{R}$, melyeket rendre összeadásnak, illetve skalárral való szorzásnak nevezünk, úgy, hogy teljesülnek az alábbiak*

(i) *minden $x, y \in X$ esetén $x + y = y + x$ (kommutativitás);*

(ii) *minden $x, y, z \in X$ esetén $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asszociativitás);*

(iii) *létezik egy olyan 0-val jelölt elem X-ben, melyre minden $x \in X$ esetén $x + 0 = x$ teljesül (zéruselem létezése);*

(iv) *minden $x \in X$ esetén létezik olyan $-x$-szel jelölt X-beli elem, hogy $x + (-x) = 0$ (inverzelem létezése);*

(v) *minden $x \in X$ esetén $1 \cdot x = x$;*

(vi) *tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ konstansok és $x \in X$ esetén $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$;*

(vii) *tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $x, y \in X$ esetén $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ és $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ teljesül.*

*Ebben az esetben azt mondjuk, hogy $(X, +, \cdot)$ **vektortér** vagy azt, hogy **lineáris tér** $\mathbb{R}$ felett. Az X halmaz elemeire a továbbiakban a **vektorok**, míg $\mathbb{R}$ elemeire a **skalárok** elnevezést fogjuk használni.*

8.4.8. Példa. *Az összes valós számsorozatok*

$$\mathfrak{m} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{valós számsorozat}\}$$

halmaza egy valós lineáris tér, ha az összeadást az

$$(x_n + y_n) = x_n + y_n \qquad (n \in \mathbb{N},\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{m}),$$

míg a skalárral való szorzást a

$$(\lambda x_n) = \lambda \cdot x_n \qquad (\lambda \in \mathbb{R}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{m})$$

módon értelmezzük.

8.4.9. Példa. *Legyen $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ egy nemüres, nyílt intervallum. Ekkor a*

$$\mathcal{C}(]a, b[) = \{f \colon]a, b[\to \mathbb{R} \,|\, f \text{ folytonos }]a, b[\text{-n}\}$$

halmaz egy valós lineáris tér, ha a függvények összeadását és a skalárral való szorzást pontonként értelmezzük.

8.4.10. Példa. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$ adottak, ekkor az*

$$\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) = \{A \,|\, A\ n \times m\text{-es valós mátrix}\}$$

halmaz egy valós lineáris tér az $n \times m$-es valós mátrixok „szokásos” összeadásával és skalárral való szorzásával.

8.4.10. Definíció. *Egy X valós lineáris tér $u_1, \dots, u_n$ vektorainak* ***lineáris kombinációi****n az összes*

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \qquad (\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R})$$

alakú vektort értjük.

8.4.11. Definíció. *Ha a v vektor felírható az X valós vektortér egy $\mathcal{U}$ vektorrendszerének lineáris kombinációjaként, akkor azt mondjuk, hogy v* ***lineárisan függ*** *az $\mathcal{U}$ vektorrendszertől.*

8.4.11. Tétel. — *Minden vektorrendszer lineárisan függ önmagától, azaz a lineáris függés reflexív.*

— *Ha a $\mathcal{V}$ vektorrendszer függ az $\mathcal{U}$ vektorrendszertől, a $\mathcal{W}$ vektorrendszer pedig a $\mathcal{V}$ vektorrendszertől, akkor $\mathcal{W}$ függ az $\mathcal{U}$-tól, vagyis a lineáris függés tranzitív.*

— *Ha a v vektor nem függ az $\mathcal{U}$ vektorrendszertől, de függ az $\{\mathcal{U}, u\}$ rendszertől, akkor u függ az $\{\mathcal{U}, v\}$ rendszertől.*

8.4.12. Definíció. *Egy X lineáris tér valamely Y részhalmazát az X lineáris tér* ***alteré****nek mondunk, ha Y szintén lineáris tér az X térbeli műveletekre nézve.*

8.4.11. Példa. *Az fenti példában szereplő $\mathfrak{m}$ lineáris térnek a*

$$\mathfrak{c} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{konvergens valós számsorozat}\}$$

halmaz egy lineáris altere. A $\mathfrak{c}$ lineáris térnek pedig a

$$\mathfrak{c}_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{valós nullsorozat}\}$$

halmaz lineáris altere, vagyis $\mathfrak{c}_0 \subsetneq \mathfrak{c} \subsetneq \mathfrak{m}$.

8.4.12. Példa. *A fenti példában szereplő $\mathcal{C}(]a, b[)$ térnek a*

$$\mathcal{D} = \{f \colon]a, b[\to \mathbb{R} \mid f \textit{ differenciálható }]a, n[\textit{-n}\}$$

halmaz lineáris altere.

8.4.13. Példa. *Legyen $I \subset]a, b[$ egy tetszőleges nemüres halmaz, ekkor a*

$$\mathcal{C}_0(]a, b[) = \{f \in \mathcal{C}(]a, b[) \mid f(x) = 0\, (x \in I)\}$$

halmaz lineáris altere $\mathcal{C}(]a, b[)$-nek.

8.4.12. Tétel (Altérkritérium). *A X vektortér egy Y nemüres részhalmaza pontosan akkor lineáris altere X-nek, ha*

(i) zárt az összeadásra nézve, azaz, ha $u, v \in Y$, akkor $u + v \in Y$ is teljesül.

(ii) zárt a skalárral való szorzásra nézve, vagyis ha $u \in Y$, akkor tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda \cdot u \in Y$ is teljesül.

8.4.1. Megjegyzés. *Tetszőleges X vektortérnek önmaga és a $\{0\}$ halmazok mindig alterei, ezeket* ***triviális altereknek*** *mondjuk, az összes többi alteret pedig* ***valódi altér****nek nevezzük.*

8.4.13. Tétel. *Az X lineáris tér tetszőleges altereinek a metszete szintén altere X-nek.*

8.4.14. Tétel. *Az X vektortér egy tetszőleges $\mathcal{H}$ részhalmazához található egy olyan (a tartalmazásra nézve) legszűkebb altér, mely a $\mathcal{H}$-t tartalmazza. Ezt az alteret a $\mathcal{H}$ által generált vagy kifeszített altérnek nevezzük és rá a $[\mathcal{H}]$ jelölést használjuk.*

8.4.2. Megjegyzés. *A fenti tétel jelölései és feltételei mellett a $[\mathcal{H}]$ éppen a $\mathcal{H}$ rendszer összes lineáris kombinációiból áll.*

8.4.13. Definíció. *Az X vektortér egy $\mathcal{H}$ részhalmazát **generátorrendszer**nek nevezzük, ha $[\mathcal{H}] = X$ teljesül.*

8.4.15. Tétel. *Minden vektortérnek létezik generátorrendszere.*

8.4.14. Definíció. *Legyenek X és Y valós lineáris terek. Ha létezik egy $\varphi: X \to Y$ kölcsönösen egyértelmű, műveletartó leképezés, azaz egy olyan $\varphi: X \to Y$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, melyre*

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \qquad (x, y \in X)$$

és

$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in X),$$

*akkor azt mondjuk, hogy az X és az Y lineáris terek **izomorf**ak. Erre a leggyakrabban az $X \cong Y$ jelölést alkalmazzuk.*

8.4.15. Definíció. *Egy vektortér valamely rendszerét **lineárisan függő**nek nevezzük, ha van közöttük olyan vektor, mely a többitől lineárisan függ. Ha ilyen vektor nincsen az adott rendszerben, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó vektorrendszer **lineárisan független**.*

8.4.16. Tétel. *Egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha a rendszerben szereplő vektoroknak van olyan nemtriviális lineáris kombinációja, mely a zérusvektort adja.*

8.4.16. Definíció. *Egy vektortér lineárisan független generátorrendszerét a vektortér **bázis**ának mondjuk.*

8.4.14. Példa. *Az $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ lineáris térben bázist alkotnak azok az $n \times m$-es valós mátrixok, melyeknek pontosan egyetlen elemük 1, az összes többi pedig 0.*

8.4.15. Példa. *A valós együtthatós polinomok lineáris terében bázist alkotnak az*

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$$

monomok.

8.4.17. Definíció. *Az X vektortér bázisának a számosságát az X vektortér dimenziójának nevezzük, és erre a $\dim(X)$ jelölést alkalmazzuk.*

8.4.16. Példa. *(a)*

$$\dim\left(\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})\right) = n \cdot m$$

(b)

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

(c)

$$\dim\left(\mathcal{C}(]a, b[)\right) = +\infty.$$

(d)

$$\dim\left(\mathfrak{m}\right) = +\infty.$$

8.4.17. Tétel (Struktúratétel). *Legyen X egy n-dimenziós valós lineáris tér, ekkor*

$$X \cong \mathbb{R}^n.$$

Lineáris leképezések

8.4.18. Definíció. *Az X vektortérnek az Y vektortérbe való φ műveletartó leképezését* ***lineáris leképezés****nek nevezzük, azaz, $\varphi: X \to Y$ olyan leképezés, melyre*

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \qquad (x, y \in X)$$

és

$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in X).$$

8.4.3. Megjegyzés. *Az $X = Y$ esetben a lineáris leképezés helyett a* ***lineáris operátor****, míg az $Y = \mathbb{R}$ esetben a* ***lineáris forma****, vagy a* ***lineáris funkcionál*** *elnevezések is használatosak.*

8.4.18. Tétel. *Legyenek X és Y lineáris terek. Ekkor a $\varphi: X \to Y$ leképezés pontosan akkor lineáris leképezés, ha minden $x, y \in X$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$$

teljesül.

8.4.4. Megjegyzés. *Ha $\varphi: X \to Y$ lineáris leképezés, akkor $\varphi(0) = 0$.*

8.4.17. Példa. *(a) Értelmezzük a $\varphi: \mathfrak{c} \to \mathbb{R}$ leképezést a*

$$\varphi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} x_n \qquad ((x_n)_n \in \mathfrak{c}),$$

vagyis minden $\mathfrak{m}$ térbeli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozathoz rendeljük hozzá a határértékét.

(b) Legyen $a \in \mathbb{R}^n$ rögzített és legyen

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = \langle x, a\rangle \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Ekkor $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés.

(c) Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ egy nemüres, pozitív hosszúságú intervallum. Ekkor a

$$\varphi(f) = F \qquad (f \in \mathcal{C}([a, b])),$$

ahol

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (f \in \mathcal{C}([a, b]), x \in [a, b]),$$

módon megadott $\varphi: \mathcal{C}([a, b]) \to \mathcal{C}([a, b])$ leképezés lineáris.

(d) Legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(R)$, ekkor a

$$\varphi(x) = A \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}^m)$$

módon megadott $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ leképezés lineáris.

(e) Tetszőleges X vektortér esetén a

$$\varphi(x) = x \qquad (x \in X)$$

módon megadott $\varphi: X \to X$ leképezés lineáris, melyet az X lineáris tér önmagára való ***identikus leképezés****ének nevezünk.*

8.4.19. Tétel. *Legyenek X, Y valós lineáris terek, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bázis X-ben, míg $\{w_1, \ldots, w_n\}$ egy tetszőleges Y-beli vektorrendszer. Ekkor létezik egy olyan egyértelműen meghatározott $\varphi: X \to Y$ lineáris leképezés, melyre minden $i = 1, \ldots, n$ esetén*

$$\varphi(v_i) = w_i$$

teljesül.

8.4.19. Definíció. *Legyenek X, Y vektorterek, $\varphi: X \to Y$ pedig egy lineáris leképezés. Ekkor a*

$$\ker(\varphi) = \{x \in X \,|\, \varphi(x) = 0\},$$

illetve a

$$\mathrm{rng}(\varphi) = \{\varphi(x) \,|\, x \in X\}$$

halmazokat rendre a φ lineáris leképezés ***magteré****nek, illetve* ***képteré****nek mondjuk.*

8.4.20. Tétel. *Legyen $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$ egy olyan lineáris leképezés, melyre* $\ker(\varphi) = \{0\}$ *teljesül. Ekkor φ injektív, továbbá φ lineárisan független vektorrendszert lineárisan független vektorrendszerbe képez le.*

8.4.20. Definíció. *Legyenek X, Y vektorterek. Ekkor, ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\varphi: X \to Y$ egy lineáris leképezés, akkor legyen*

$$(\lambda \cdot \varphi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x) \qquad (x \in X)$$

és ha $\varphi, \psi: X \to Y$ lineáris leképezések, akkor legyen.

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \qquad (x \in X)$$

8.4.5. Megjegyzés. *A fenti definíció jelölései és feltételei mellett a $\lambda \cdot \varphi$ és a $\varphi + \psi$ leképezések lineárisak.*

8.4.21. Tétel. *Az X vektorteret az Y vektortérbe vivő összes lineáris leképezések vektorteret alkotnak a fenti definícióbeli összeadással és skalárral való szorzással. Erre a vektortérre általában az $\mathcal{L}(X, Y)$ vagy a* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *jelölést alkalmazzuk.*

8.4.21. Definíció. *Legyen $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$, továbbá $\{v_1, \ldots, v_m\}$ az X, míg $\{w_1, \ldots, w_n\}$ az Y lineáris tér egy bázisa. A φ lineáris leképezésnek ezekre a bázisokra vonatkozó mátrixa az az $n \times m$-es típusú mátrix, melynek elemeit a*

$$\varphi(v_i) = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} w_j \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

összefüggés értelmezi, vagyis ebben a mátrixban az i-edik oszlopban éppen a v_i képének a $\{w_1, \ldots, w_n\}$ bázisra vonatkozó koordinátái szerepelnek.

8.4.22. Tétel. *Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$ és X, Y olyan lineáris terek, hogy*

$$\dim(X) = m \quad \text{és} \quad \dim(Y) = n.$$

Ekkor az $\mathcal{L}(X, Y)$ vektortér izomorf az $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ vektortérrel; ha egy lineáris leképezéshez hozzárendeljük egy rögzített bázispárra vonatkozó mátrixát, akkor a két vektortér között izomorfizmust kapunk.

8.4.22. Definíció. *Legyen X egy valós lineáris tér és $L: X \to X$ egy lineáris leképezés. Azt mondjuk, hogy az L leképezésnek az $x \in X$ vektor* ***sajátvektor****a, a $\lambda \in \mathbb{R}$* ***sajátérték****kel, ha*

$$L(x) = \lambda x$$

teljesül.

8.4.23. Definíció. *Az X lineáris tér egy H alterét a $\varphi: X \to X$ lineáris operátor* ***invariáns alter****ének mondjuk, ha minden $x \in H$ esetén $\varphi(x) \in H$ teljesül.*

8.4.18. Példa. *(a) Tetszőleges $\varphi: X \to X$ lineáris operátor esetén az X és a $\{0\}$ alterek mindig invariánsak, ezeket* ***triviális*** *invariáns altereknek hívjuk.*

(b) Legyen $x \in X$ a $\varphi: X \to X$ lineáris operátor egy sajátvektora, ekkor az x vektor által generált

$$[x] = \{\lambda x \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

altér invariáns altere φ-nek.

(c) Legyen $\varphi: X \to X$ egy lineáris operátor, ekkor a $\ker(\varphi)$, illetve $\mathrm{rng}(\varphi)$ alterek φ invariáns alterei.

8.4.24. Definíció. *Legyen λ a $\varphi: X \to X$ lineáris operátor egy sajátértéke, ekkor az*

$$L_\lambda = \{x \in X \,|\, \varphi(x) = \lambda x\}$$

*altér invariáns altér, melyet a λ sajátértékhez tartozó **sajátaltér**nek nevezünk, a $\dim(L_\lambda)$ számot pedig a λ sajátérték **geometriai multiplicitás**ának*

8.4.23. Tétel. *Tetszőleges lineáris operátor különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.*

8.4.2. Következmény. *Az $\mathbb{R}^n$ tér egy lineáris operátorának legfeljebb n különböző sajátértéke van. Ha pontosan n (különböző) sajátérték van, akkor létezik a térben az operátor sajátvektoraiból álló bázis, és ebben a bázisban az operátor mátrixa diagonális úgy, hogy a főátlóban éppen az operátor sajátértékei szerepelnek.*

8.4.25. Definíció. *Jelölje $I \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ az $n \times n$-es egységmátrixot, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ pedig a $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris operátor valamely rögzített bázisra vonatkozó mátrixát. Ekkor φ összes sajátértéke előáll a*

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

*egyenlet megoldásaként. Ezt az egyenletet a φ lineáris operátor **karakterisztikus egyenlet**ének hívjuk.*

8.4.6. Megjegyzés. *A fenti egyenlet bal oldalán szereplő $\det(A - \lambda I)$ kifejezés λ-nak egy n-edfokú, $(-1)^n$ főegyütthatójú polinomja, így a karakterisztikus egyenlet helyett a **karakterisztikus polinom** elnevezés is használatos.*

8.4.24. Tétel. *A karakterisztikus egyenlet független a bázis megválasztásától, továbbá, hasonló mátrixok karakterisztikus egyenlete megegyezik.*

8.4.25. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$ páratlan, $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy lineáris operátor. Ekkor φ-nek létezik legalább egy sajátvektora.*

8.4.26. Tétel. *Egy, a valós számtest feletti lineáris operátor pontosan akkor diagonalizálható, ha*

(i) φ spektruma teljes;

(ii) minden sajátérték geometriai és algebrai multiplicitása megegyezik.

8.4.27. Tétel. *Egy, a valós számtest feletti $n \times n$-es szimmetrikus mátrix karakterisztikus egyenletének (multiplicitással együtt) pontosan n darab gyöke van.*

Kvadratikus formák osztályozása

8.4.26. Definíció. *Legyen $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ és definiáljuk a $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezést a*

$$q(x) = x^T \cdot Q \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

módon, ahol x^T jelöli az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor transzponáltját. Azt mondjuk, hogy

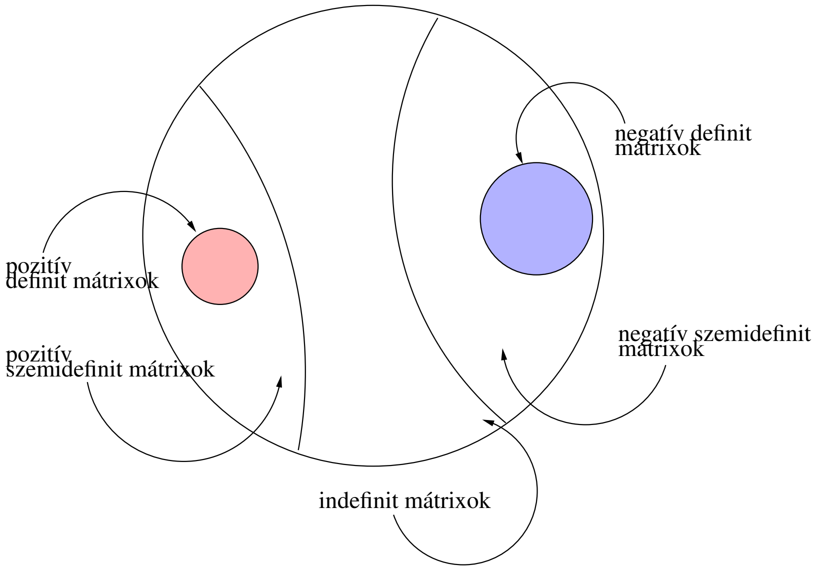
— *Q **pozitív definit**, ha minden $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén $q(x) > 0$ teljesül;*

— *Q **negatív definit**, ha minden $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén $q(x) < 0$ teljesül;*

— *Q **pozitív szemidefinit**, ha minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $q(x) \geq 0$ teljesül;*

— *Q **negatív szemidefinit**, ha minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $q(x) \leq 0$ teljesül;*

— *Q **indefinit**, ha Q se nem pozitív szemidefinit, se nem negatív szemidefinit.*



8.4.7. Megjegyzés. *A fenti definícióban szereplő $q:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezést a Q $n\times n$-es mátrixból származó* ***kvadratikus formá****nak nevezzük.*

8.4.19. Példa. *(a) A*

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2×2*-es mátrix pozitív definit, hiszen minden* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *esetén*

$$q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + y^2 > 0$$

teljesül.

(b) A

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

2×2*-es mátrix negatív definit, hiszen minden* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *esetén*

$$q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x^2 - 5y^2 < 0$$

teljesül.

(c) A

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2×2*-es mátrix indefinit, hiszen minden* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *esetén*

$$q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - y^2$$

teljesül, vagyis

$$q(x,y) = \begin{cases} > 0, & |x| > |y| \\ < 0, & |x| < |y| \end{cases}$$

8.4.28. Tétel. *Legyen $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, ekkor*

— *Q pontosan akkor pozitív definit, ha Q valamennyi sajátértéke pozitív;*

— *Q pontosan akkor negatív definit, ha Q valamennyi sajátértéke negatív;*

— *Q pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha Q valamennyi sajátértéke nemnegatív;*

— *Q pontosan akkor negatív szemidefinit, ha Q valamennyi sajátértéke nempozitív;*

Legyen $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

és minden $i = 1, \dots, n$ esetén tekintsük a

$$Q_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

$i \times i$-s mátrixokat. Ha $i = 1, \dots, n$, akkor ezt a Q_i, $i \times i$-típusú mátrixot, a Q mátrix **i-edik bal felső sarokminorá**nak hívjuk.

8.4.29. Tétel. *A fenti jelölések megtartása mellett*

— *Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $i = 1, \dots, n$ esetén*

$$\det(Q_i) > 0.$$

— *Q pontosan akkor negatív definit, ha minden $i = 1, \dots, n$ esetén léteznek olyan c_i pozitív valós számok, hogy*

$$\det(Q_i) = (-1)^i c_i \qquad (i = 1, \dots, n),$$

azaz, Q_i pozitív determinánsú, ha i páros, és Q_i negatív determinánsú, amennyiben i páratlan, $i = 1, \dots, n$.

— *Q pontosan akkor indefinit, ha minden $i = 1, \dots, n$ esetén $\det(Q_i) \neq 0$ és Q se nem pozitív, se nem negatív definit.*

8.4.8. Megjegyzés. *Pozitív szemidefinit, illetve negatív szemidefinit mátrixokra a fenti tételhez hasonló jellemzés* ***nem adható****.*

Útravalóul

Rudyard Kipling: Ha

Ha nem veszted fejed, mikor zavar van,
s fejvesztve téged gáncsol vak, süket,
ha kétkednek benned, s bízol magadban,
de érted az ő kétkedésüket,
ha várni tudsz és várni sose fáradsz,
és hazugok közt se hazug a szád,
ha gyűlölnek, s gyűlölségtől nem áradsz,
s mégsem papolsz, mint bölcs-kegyes galád,

ha álmodol – s nem zsarnokod az álmod,
gondolkodol – s becsülöd a valót,
ha a Sikert, Kudarcot bátran állod,
s úgy nézed őket, mint két rongy csalót,
ha elbírod, hogy igazad örökre
maszlag gyanánt használják a gazok,
s életműved, mi ott van összetörve,
silány anyagból építsék azok,

ha mind, amit csak nyertél, egy halomban,
van merszed egy kártyára tenni föl,
s ha vesztesz és elkezded újra, nyomban,
nem is beszélsz a veszteség felől,
ha paskolod izmod, inad a célhoz,
és szíved is, mely nem a hajdani,
mégis kitartasz, bár mi sem acéloz,
csak Akaratod int: „Kitartani”,

ha szólsz a néphez, s tisztesség a vérted,
királyokkal jársz, s józan az eszed,
ha ellenség, de jóbarát se sérthet,
s mindenki számol egy kicsit veled,
ha a komor perc hatvan pillanatja
egy távfutás neked s te futsz vígan,
tiéd a Föld és minden, ami rajta,
és – ami több – ember leszel, fiam.

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[1] T. M. Apostol, *Calculus. Vol. II: Multi-variable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability.* Second edition Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London 1969

[2] V. I. Arnold, *Közönséges differenciálegyenletek*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[3] Bárczy Barnabás, *Integrálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1997.

[4] Fekete Zoltán, Zalay Miklós, *Többváltozós függvények analízise*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2007.

[5] B. P. Gyemidovics, *Matematikai analízis feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, 1974.

[6] Lajkó Károly, *Kalkulus II. (egyetemi jegyzet)*, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2002.

[7] Lajkó Károly, *Kalkulus II. példatár (1.-2. kötet)*, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2002.

[8] Rimán János, *Matematikai analízis I.*, EKTF, Líceum Kiadó, Eger, 1998.

[9] Rimán János, *Matematikai analízis feladatgyűjtemény I.-II.*, EKTF, Líceum Kiadó, Eger, 1998.

[10] W. Rudin, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[11] Scharnitzky Viktor, *Differenciálegyenletek*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1997.

[12] Szabó Tamás, *Kalkulus példák és feladatsorok*, Polygon jegyzettár, Szeged, 2000.