

Legyen L elsőrendű matematikai logikai nyelv definiálva a következőképpen:

$$L = \langle \{\pi_1, \pi_2\}, \{P, Q\}, \{f, g\}, \{c\} \rangle$$

- $x, y, z, \dots$ változók π_1 , valamint
 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ változók π_2 típusúak (fajtájúak),
- $\nu_1(P) = (\pi_1, \pi_2), \quad \nu_1(Q) = (\pi_1, \pi_2, \pi_1)$
- $\nu_2(f) = (\pi_1, \pi_2), \quad \nu_2(g) = (\pi_1, \pi_2, \pi_1)$
- $\nu_3(c) = (\pi_1)$

1. Sorolja be a következő kategóriákba az alábbi alakzatokat! (Tegyen **X**-et a megfelelő négyzetbe!)

(a) L nyelv formulája, (b) L nyelv termje, (c) nem része L nyelvnek.

(a)	(b)	(c)		(a)	(b)	(c)	
☐	☐	☒	$f(x, \alpha)$	☐	☒	☐	$f(g(c, \alpha))$
☐	☐	☒	$Q(P(x, \alpha), \beta, y)$	☐	☐	☒	$\forall x \exists \alpha g(x, \alpha)$
☐	☐	☒	$g(x, f(c), x)$	☐	☐	☒	$\forall x \exists \alpha Q(x, g(x, \beta))$
☐	☐	☒	$\exists c P(c, \beta)$	☒	☐	☐	$\forall x Q(x, f(x), x)$

2. Legyen L nyelv formulája a következő:

$$\forall x (P(x, \alpha) \supset \exists \alpha Q(x, \alpha, c)) \vee \exists x P(x, \alpha)$$

a.) Adja meg a formula paramétereit (szabad változóit)!

$\{\alpha\}$

b.) Hozza változótiszta alakra a formulát!

$$\forall x (P(x, \alpha) \supset \exists \beta Q(x, \beta, c)) \vee \exists y P(y, \alpha)$$

c.) Határozza meg a formula logikai összetettségét!

5

d.) Adja meg a formula részformuláinak halmazát!

$$\{\forall x (P(x, \alpha) \supset \exists \alpha Q(x, \alpha, c)) \vee \exists x P(x, \alpha), \forall x (P(x, \alpha) \supset \exists \alpha Q(x, \alpha, c)), \exists x P(x, \alpha),$$

$$P(x, \alpha) \supset \exists \alpha Q(x, \alpha, c), P(x, \alpha), \exists \alpha Q(x, \alpha, c), Q(x, \alpha, c)\}$$

- e.) Konstruálja meg (ha ez lehetséges) az L nyelv egy olyan I interpretációját, és adjon meg hozzá egy olyan κ értékelést, mely kielégíti a formulát!

$$\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}_{Srt}, \mathcal{I}_{Pr}, \mathcal{I}_{Fn}, \mathcal{I}_{Cnst} \rangle$$

$$\mathcal{I}_{Srt}(\pi_1) = \{1\}$$

$$\mathcal{I}_{Fn}(f) = f^{\mathcal{I}}, \quad f^{\mathcal{I}}(1) = 2$$

$$\mathcal{I}_{Srt}(\pi_2) = \{2\}$$

$$\mathcal{I}_{Fn}(g) = g^{\mathcal{I}}, \quad g^{\mathcal{I}}(1, 2) = 1$$

$$\mathcal{I}_{Pr}(P) = P^{\mathcal{I}}, \quad P^{\mathcal{I}}(1, 2) = i$$

$$\mathcal{I}_{Cnst}(c) = 1$$

$$\mathcal{I}_{Pr}(Q) = Q^{\mathcal{I}}, \quad Q^{\mathcal{I}}(1, 2, 1) = i$$

$$\kappa(\alpha) = 2$$

$$|\exists x P(x, \alpha)|^{\mathcal{I}, \kappa} = i \Rightarrow |\forall x (P(x, \alpha) \supset \exists \alpha Q(x, \alpha, c)) \vee \exists x P(x, \alpha)|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$$

- f.) Bizonyítsa be, hogy a formula nem propozicionális tautológia.

A formula prímkomponensei: $\forall x (P(x, \alpha) \supset \exists \alpha Q(x, \alpha, c))$ és $\exists x P(x, \alpha)$.

$\forall x (P(x, \alpha) \supset \exists \alpha Q(x, \alpha, c))$	$\vee$	$\exists x P(x, \alpha)$
i	i	i
i	i	h
h	i	i
h	$\underline{h}$	h

3. Adja meg Ar nyelvű formulaként a következő mondatot! (Az új jelöléseket definiálja!)

Egyetlen kettőnél nagyobb páros szám sem prím.

$$\text{Páros}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists y (y + y = x)$$

$$\text{Nagyobb2}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists y (y + sss0 = x)$$

$$\text{Osztója}(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \neg(x = 0) \wedge \exists z (\neg(z = 0) \wedge (x * z = y))$$

$$\text{Prím}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \neg(x = 0) \wedge \neg(x = s0) \wedge \forall y (\text{Osztója}(y, x) \supset (y = x) \vee (y = s0))$$

$$\forall x (\text{Nagyobb2}(x) \wedge \text{Páros}(x) \supset \neg \text{Prím}(x))$$