VÁRTERÉSZ MAGDA

Az informatika logikai alapjai előadások

2006/07-es tanév 1. félév

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A logika szó

- hétköznapi jelentése: rendszeresség, következetesség
  - Ez *logikus* beszéd volt.
  - Nincs benne *logika*.
  - Más *logika* szerint gondolkodik.
- egy tudományszak neve: fő **feladata** a helyes következtetés
  - fogalmának szabatos meghatározása,
  - törvényszerűségeinek feltárása.

A következtetés

gondolati eljárás

$\boxed{\text{kiinduló információk}}$	$\Longrightarrow$	$\boxed{\text{kinyert információ}}$
$\downarrow$	nyelvi megnyilvánulás	$\downarrow$
állítások **premisszák**		állítás **konklúzió**

A logika feladata:
a premisszák és a konklúzió közötti összefüggés tanulmányozása.

Egy kijelentő mondat **állítás**, ha egyértelmű információt hordoz és igazságértékkel bír.

állítás	nem állítás
2004. szeptember 1-én esett az eső Budapesten.	Esett.
$5 < 3$	$x < 3$
A francia király 1788-ban Rómába látogatott.	A francia király ma Rómába látogatott.
Iskolánk igazgatója 50 éves.	Iskolánk tanára 50 éves.

Egy állítás **igaz**, ha az információtartalma a valóságnak megfelelő, egyébként **hamis**, függetlenül tudásunktól.

Arisztotelész alapelvei

- az ellentmondástalanság elve:

  Egyetlen állítás sem lehet igaz is és hamis is.

- a kizárt harmadik elve:

  Nincs olyan állítás, amely sem nem igaz, sem nem hamis.

Köznapi értelemben vett következtetés:

(P1) Erika Sándornak a felesége.
(P2) Katalin Sándornak az édesanyja.
(K) Katalin Erikának az anyósa.

A logika nem fogja vizsgálni a (magyar) nyelv szavainak jelentését!!

pótpremissza:
(P3) Azt mondjuk, hogy z x-nek az anyósa, ha z az édesanyja annak, akinek x a felesége.

Valamely tudományterületen végrehajtott következtetés:

(P1) A vizsgált háromszög egyik oldalhosszának négyzete egyenlő a másik két oldalhossz négyzetének összegével.
(K) A vizsgált háromszög derékszögű.

A logika nem tartalmaz egyetlen más szaktudományt sem, így nem ismerheti ezek eredményeit!!

pótpremissza (Pitagorasz tétele):
(P2) Ha egy háromszög egyik oldalhosszának négyzete egyenlő a másik két oldalhossz négyzetének összegével, akkor a háromszög derékszögű.

Következtetések „sémái”

(P1) Ha esik az eső, sáros az út.
(P2) Esik az eső.
(K) Sáros az út.

(P1) Ha az tanszék nyer a pályázaton, nyomtatót vásárol.
(P2) A tanszék nyert a pályázaton.
(K) A tanszék nyomtatót vásárol.

(P1) Ha három lábon gyábokorsz, a Kálán Púgra nem tudsz menni.
(P2) Három lábon gyábokorsz.
(K) A Kálán Púgra nem tudsz menni.[1]

[1] Lázár Ervin, A hétfejű tündér c. könyvéből

Mi volt közös az előbbi következtetésekben?

(P1) Ha ...., akkor _ _ _ _ _ _ _.
(P2) ....
(K) _ _ _ _ _ _ _.

Egyforma jelölés helyén ugyanaz az állítás volt.
$\longrightarrow$ Használjunk, mint a matematikában, (állítás)változókat!

(P1) Ha X, akkor Y.
(P2) X.
(K) Y.

(P1) Ha 10 másodperc alatt futom a 100 métert, akkor kiküldenek az olimpiára.
(P2) De nem futom 10 másodperc alatt a 100 métert.
(K) Tehát nem küldenek ki az olimpiára.

(P1) Ha a benzin elfogyott, az autó megáll.
(P2) Nem fogyott el a benzin.
(K) Az autó nem áll meg.

Ezen okoskodások közös sémája:
(P1) Ha X, akkor Y.
(P2) Nem X.
(K) Nem Y.

A következtetési sémák helyessége

- **Helyes** a következtetési séma,
  ha **igaz premisszák** esetén a **konklúzió** csak **igaz** lehet.
- **Helytelen** a következtetési séma,
  ha **igaz premisszák** esetén is megtörténhet,
  hogy a **konklúzió hamis**.

Egy **következtetés helyes**, ha helyes következtetési séma alapján hajtjuk végre. Tehát a következtetés helyessége független a benne szereplő állítások természetes nyelvi jelentésétől, csupán az ún.

logikai szavak jelentésétől,

és logikai szavak meghatározta

szerkezettől

függ.

Logikai szavak és jelentésük

A **negáció**: logikai szó, mely igaz állításból hamisat, hamisból igazat készít.

Alfréd diák.
Alfréd **nem** diák.
DE:
A társaság néhány tagja diák.
A társaság néhány tagja nem diák.
Nem igaz, hogy a társaság néhány tagja diák.

A **konjunkció**: mely két igaz állításból igaz, egyébként hamis állítást készít.

Amália **és** Bella kertészek.
„Lement a nap. **De** csillagok nem jöttenek.” (Petőfi)
Juli **is**, Mari **is** táncol.
Kevésre vitte, **noha** becsületesen dolgozott.
DE:
Amália és Bella testvérek.

A **diszjunkció**: mely két hamis állításból hamis, egyébként igaz állítást készít.

Esik az eső, **vagy** fúj a szél.
DE:
Vagy busszal jött, vagy taxival.

Az **implikáció**: mely ha az előtag állítás igaz és az utótag állítás hamis, akkor hamis, egyébként igaz állítást készít.

Ha megtanulom a leckét, **akkor** ötösre felelek.
Csak akkor felelek ötösre, **ha** megtanulom a leckét.
Akkor és csak akkor felelek ötösre, **ha** megtanulom a leckét.

Gyakran az egyszerű állítások **szerkezetét** is fel kell tárnunk.

Dezső **postás**.
Amália és *Bella* **testvérek**.
Az *Erzsébet híd* **összeköti** *Budát Pesttel.*

predikátum + *objektumnevek*

Az **egzisztenciális kvantor**:

Amáliának **van** testvére.

Az **univerzális kvantor**:

Amália **mindegyik** testvére lány.

$$\Downarrow$$

LOGIKAI NYELV

- A logikai szavak helyett logikai jeleket írunk:

nem	$\neg$	negáció
és	$\wedge$	konjunkció
vagy	$\vee$	diszjunkció
ha ... akkor	$\supset$	implikáció
minden	$\forall$	univerzális kvantor
van	$\exists$	egzisztenciális kvantor

- Az állítások természetes nyelvi jelentése közömbös, helyettük az állítás szerkezetét hordozó **formulákat** írunk.

Miért van szüksége a logikának saját nyelvre?

- Nem tartozhat egyetlen nemzeti nyelvhez sem;
- a természetes nyelvek nyelvtani rendszerei különbözőek és bonyolultak;
- a logika saját nyelvében minden (ábécé, nyelvtani szabályok, kategóriák) a logika feladatának ellátását szolgálhatja.

2. fejezet

Az ítéletlogika

2.1. Az ítéletlogika nyelve – szintaxis

Az ítéletlogika nyelvének **ábécéje** az alábbi szimbólumokat tartalmazza:

- logikai összekötőjelek: $\neg, \wedge, \vee, \supset$
- elválasztójelek: a nyitó- és a záró-zárójel
- ítéletváltozók: $X, Y, Z, \ldots$ betűk, esetleg indexelve

2.1. DEFINÍCIÓ. (ÍTÉLETLOGIKAI FORMULA.)

1. Minden ítéletváltozó ítéletlogikai formula, ezeket a formulákat **atomi** vagy **prímformuláknak**is nevezzük.
2. Ha A ítéletlogikai formula, akkor $\neg A$ (negált A) is az.
3. Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor
   - $(A \wedge B)$ (A konjunkció B),
   - $(A \vee B)$ (A diszjunkció B) és
   - $(A \supset B)$ (A implikáció B)

   is ítéletlogikai formulák.
4. Minden ítéletlogikai formula az 1–3. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Az ítéletlogikai formulák halmaza az **ítéletlogika nyelve**.
Jelölése: $\mathcal{L}_0$.

2.2. TÉTEL. (A SZERKEZETI INDUKCIÓ ELVE.)
Minden ítéletlogikai formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú,

(alaplépés:) *ha minden atomi formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú továbbá*

(indukciós lépések:)

(i_1) *ha az A ítéletlogikai formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú, akkor $\neg A$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságú és*

(i_2) *ha az A és a B ítéletlogikai formulák $\mathcal{T}$ tulajdonságúak, akkor $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ és $(A \supset B)$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságúak.*

2.3. TÉTEL. (AZ EGYÉRTELMŰ ELEMZÉS TÉTELE.)
Minden ítéletlogikai formulára a következő állítások közül pontosan egy igaz.

1. *A formula atomi formula.*
2. *A formula egy egyértelműen meghatározható ítéletlogikai formula negáltja.*
3. *A formula egyértelműen meghatározható ítéletlogikai formulák konjunkciója.*
4. *A formula egyértelműen meghatározható ítéletlogikai formulák diszjunkciója.*
5. *A formula egyértelműen meghatározható ítéletlogikai formulák implikációja.*

2.4. DEFINÍCIÓ. Az ítéletlogika nyelvében

1. egyetlen atomi formulának sincs **közvetlen részformulája**,
2. a $\neg A$ egyetlen közvetlen részformulája az A formula,
3. az $(A \circ B)$ formula (ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \supset\}$) közvetlen részformulái az A és a B formulák. A az $(A \circ B)$ formula bal oldali, B a jobb oldali közvetlen részformulája.

2.5. DEFINÍCIÓ. Legyen A ítéletlogikai formula. Az A **formula részformuláinak halmaza** a legszűkebb olyan halmaz, melynek

1. eleme A, és
2. ha a C formula eleme, akkor C közvetlen részformulái is elemei.

A formulákhoz – azok szerkezete szerinti rekurzióval – egyértelműen rendelhetünk különböző dolgokat.

2.6. TÉTEL. (A SZERKEZETI REKURZIÓ ELVE.)
Egy az ítéletlogikai nyelvén értelmezett $\mathcal{F}$ függvényt egyértelműen adtunk meg, ha

(alaplépés:) *értékeit rögzítjük a nyelv atomi formuláin és megmondjuk, hogy $\mathcal{F}$*

(indukciós lépések:)

- (r_1) *$\neg A$-n felvett értéke az A-n felvett értékéből, illetve*
- (r_2) *$(A \circ B)$-n felvett értéke (ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \supset\}$) az A-n és a B-n felvett értékekből hogyan származtatható.*

2.7. DEFINÍCIÓ. Definiáljuk az $\ell\colon \mathcal{L}_0 \to \mathbf{N}_0$ függvényt a következőképpen:

1. ha A atomi formula, $\ell(A)$ legyen 0,
2. $\ell(\neg A)$ legyen $\ell(A) + 1$,
3. $\ell(A \circ B)$ pedig legyen $\ell(A) + \ell(B) + 1$.

Ekkor egy $A \in \mathcal{L}_0$ formulához rendelt $\ell(A)$ függvényértéket a formula **logikai összetettségének** nevezzük.

2.8. DEFINÍCIÓ. Egy formulában egy **logikai összekötőjel hatásköre** a formulának azon részformulái közül a legkisebb logikai összetettségű, amelyekben az adott logikai összekötőjel is előfordul.

2.9. DEFINÍCIÓ. Egy **formula fő logikai összekötőjele** az az összekötőjel, melynek hatásköre maga a formula.

A formulák leírásakor szokásos rövidítések:

- formula-kombinációk helyett speciális jelölések;
  Példa.
$$(A \equiv B) \rightleftharpoons ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$$
- külső zárójelek elhagyása;
- logikai jelek prioritása csökkenő sorrendben:

$$\neg \quad \begin{matrix} \vee \\ \wedge \end{matrix} \quad \supset$$

2.2. Az ítéletlogika nyelve – szemantika

Az $\{i, h\}$ halmazon értelmezett fontos **logikai műveletek**

a	b	$\dot{\neg} a$	$a \dot{\wedge} b$	$a \dot{\vee} b$	$a \dot{\supset} b$
i	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i

Jelöljük most az ítéletváltozók halmazát V_v-vel.

2.10. DEFINÍCIÓ. Az $\mathcal{L}_0$ nyelv **interpretációján** egy

$$\mathcal{I}\colon V_v \to \{i, h\}$$

függvényt értünk.

2.11. DEFINÍCIÓ. (AZ ÍTÉLETLOGIKAI FORMULÁK SZEMANTIKÁJA.) Egy C ítéletlogikai formulához $\mathcal{I}$-ben az alábbi – $|C|^{\mathcal{I}}$-val jelölt – igazságértéket rendeljük:

1. $|A|^{\mathcal{I}} \rightleftharpoons \mathcal{I}(A)$, ahol A atomi formula, azaz ítéletváltozó,
2. $|\neg A|^{\mathcal{I}} \rightleftharpoons \dot{\neg}|A|^{\mathcal{I}}$,
3. $|A \wedge B|^{\mathcal{I}} \rightleftharpoons |A|^{\mathcal{I}} \dot{\wedge} |B|^{\mathcal{I}}$,
4. $|A \vee B|^{\mathcal{I}} \rightleftharpoons |A|^{\mathcal{I}} \dot{\vee} |B|^{\mathcal{I}}$,
5. $|A \supset B|^{\mathcal{I}} \rightleftharpoons |A|^{\mathcal{I}} \dot{\supset} |B|^{\mathcal{I}}$.

2.12. TÉTEL. *Legyen S ítéletváltozók egy halmaza. Ha két különböző interpretáció ugyanazokat az igazságértékeket rendeli az S-beli ítéletváltozókhoz, akkor minden olyan formulának, amelyben csak S-beli ítéletváltozók fordulnak elő, mindkét interpretációban ugyanaz lesz az igazságértéke.*

X	Y	Z	$(Y \vee Z) \wedge (Z \supset \neg X)$
i	i	i	h
i	i	h	i
i	h	i	h
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	h	i
h	h	i	i
h	h	h	h

X	Y	Z	$Y \vee Z$	$\neg X$	$Z \supset \neg X$	$(Y \vee Z) \wedge (Z \supset \neg X)$
i	i	i	i	h	h	h
i	i	h	i	h	i	i
i	h	i	i	h	h	h
i	h	h	h	h	i	h
h	i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	i	i	i
h	h	i	i	i	i	i
h	h	h	h	i	i	h

$($Y	$\vee$	$Z)$	$\wedge$	$($Z	$\supset$	$\neg$	$X)$
i	i	i	h	i	h	h	i
i	i	h	i	h	i	h	i
h	i	i	h	i	h	h	i
h	h	h	h	h	i	h	i
i	i	i	i	i	i	i	h
i	i	h	i	h	i	i	h
h	i	i	i	i	i	i	h
h	h	h	h	h	i	i	h

2.3. Ítéletlogikai törvények

2.13. DEFINÍCIÓ. Egy A ítéletlogikai formula **kielégíthető**, ha van a nyelvnek olyan $\mathcal{I}$ interpretációja, hogy $|A|^{\mathcal{I}} = i$. Az ilyen interpretációkat A **modelljeinek** nevezzük. Ha nincs A-nak modellje, az A formula **kielégíthetetlen**.

2.14. PÉLDA. A $(Y \vee Z) \wedge (Z \supset \neg X)$ formula kielégíthető. Az $X \wedge \neg X$ formula kielégíthetetlen.

X	$\neg X$	$X \wedge \neg X$
i	h	h
h	i	h

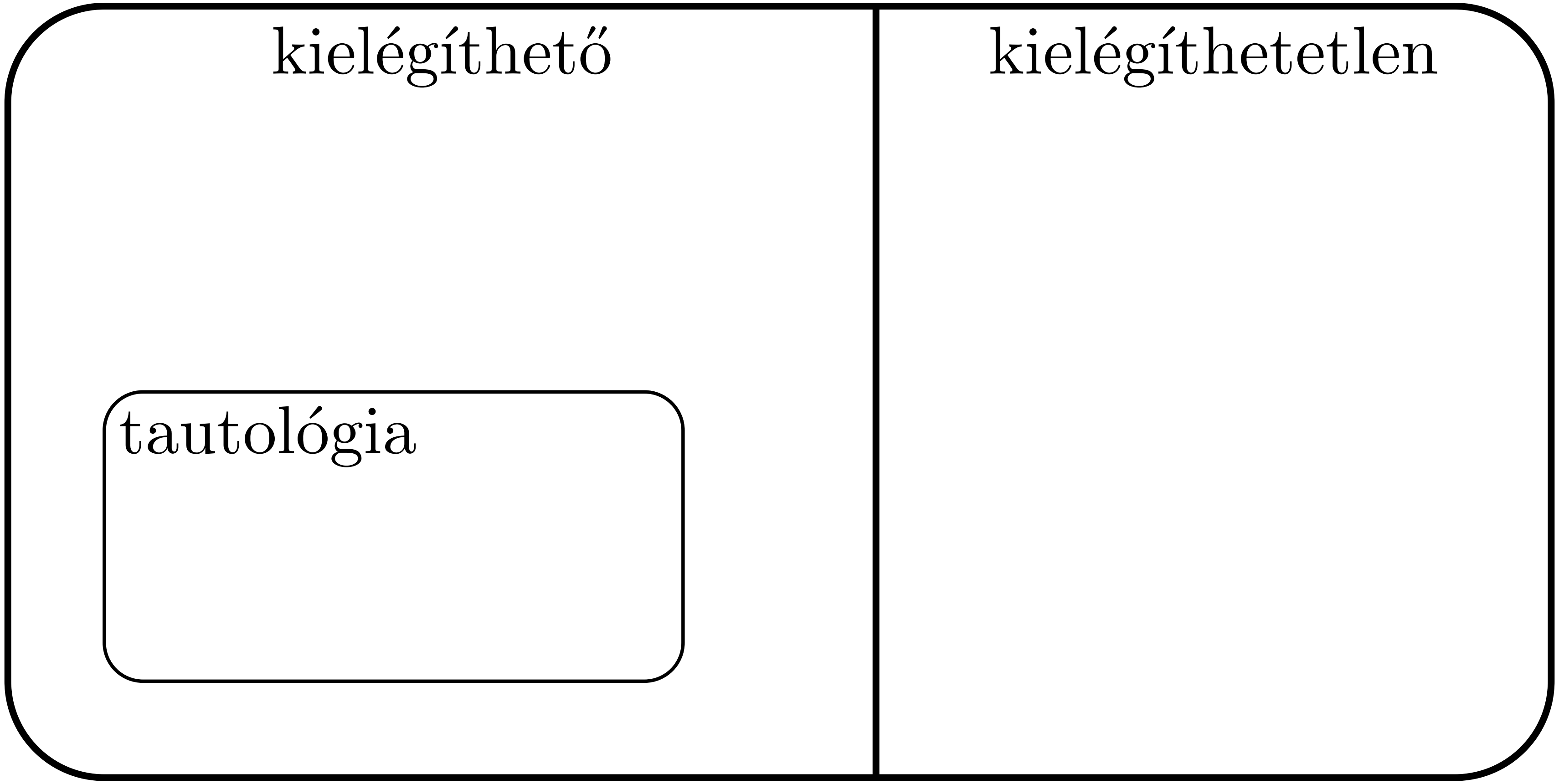
2.15. DEFINÍCIÓ. Az A formula **ítéletlogikai törvény** vagy másképp **tautológia**, ha a nyelv minden $\mathcal{I}$ interpretációjára $|A|^{\mathcal{I}} = i$. Jelölése: $\models_0 A$.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy egy A formula pontosan akkor tautológia, ha $\neg A$ kielégíthetetlen.

2.16. PÉLDA. A $(Y \vee Z) \wedge (Z \supset \neg X)$ formula bár kielégíthető, de nem tautológia. Az alábbi igazságtábla pedig azt bizonyítja, hogy az $X \vee \neg X$ formula tautológia.

X	$\neg X$	$X \vee \neg X$
i	h	i
h	i	i

Az ítéletlogikai formulák szemantikai tulajdonságuk alapján az alábbi ábra szerint osztályozhatók:



2.17. TÉTEL. *Ha A, B, C tetszőleges ítéletlogikai formulák, a következő formulák ítéletlogikai törvények:*

bővítés előtaggal	$\models_0 A \supset (B \supset A)$
implikációlánc-törvény	$\models_0 (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
	$\models_0 A \supset (B \supset A \wedge B)$
	$\models_0 A \wedge B \supset A$ *és* $\models_0 A \wedge B \supset B$
	$\models_0 (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$
	$\models_0 A \supset A \vee B$ *és* $\models_0 B \supset A \vee B$
reductio ad absurdum	$\models_0 (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
a kétszeres tagadás törvénye	$\models_0 \neg\neg A \supset A$
a kizárt harmadik törvénye	$\models_0 A \vee \neg A$
ellentmondás törvénye	$\models_0 \neg(A \wedge \neg A)$
az azonosság törvénye	$\models_0 A \supset A$
tranzitivitás	$\models_0 (A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset (A \supset C)$
ellentmondásból bármi következik	$\models_0 A \supset (\neg A \supset B)$
Peirce-törvény	$\models_0 ((A \supset B) \supset A) \supset A$

2.18. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az A és B ítéletlogikai formulák **tautologikusan ekvivalensek**, és ezt a tényt úgy jelöljük, hogy $A \sim_0 B$, ha minden $\mathcal{I}$ interpretációban $|A|^{\mathcal{I}} = |B|^{\mathcal{I}}$.

2.19. PÉLDA. Az $X \supset Y$ formula például tautologikusan ekvivalens a $\neg X \vee Y$ formulával, amit mutat a közös igazságtáblájuk.

X	Y	$X \supset Y$	$\neg X \vee Y$
i	i	i	i
i	h	h	h
h	i	i	i
h	h	i	i

Minden A, B, C ítéletlogikai formula esetén

- $A \sim_0 A$,
- ha $A \sim_0 B$, akkor $B \sim_0 A$,
- ha $A \sim_0 B$ és $B \sim_0 C$, akkor $A \sim_0 C$,

azaz az ítéletlogikai formulák közötti binér $\sim_0$ reláció **ekvivalencia-reláció**. Ez a reláció a nyelv elemeinek egy osztályozását generálja, az egymással tautologikusan ekvivalens formulák jelentése ugyanaz.

2.20. LEMMA. *$A \sim_0 B$ pontosan akkor, ha*

$$\models_0 (A \supset B) \wedge (B \supset A).$$

2.21. TÉTEL. *Ha A, B, C ítéletlogikai formulák, $\top$ tautológia, $\bot$ pedig kielégíthetetlen formula, akkor a felsorolt formulák rendre tautologikusan ekvivalensek egymással:*

asszociativitás

$A \wedge (B \wedge C) \sim_0 (A \wedge B) \wedge C$ $\quad$ $A \vee (B \vee C) \sim_0 (A \vee B) \vee C$

kommutativitás

$A \wedge B \sim_0 B \wedge A$ $\quad$ $A \vee B \sim_0 B \vee A$

disztributivitás

$A \wedge (B \vee C) \sim_0 (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\quad$ $A \vee (B \wedge C) \sim_0 (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

idempotencia

$A \wedge A \sim_0 A$ $\quad$ $A \vee A \sim_0 A$

elimináció (elnyelés)

$A \wedge (B \vee A) \sim_0 A$ $\quad$ $A \vee (B \wedge A) \sim_0 A$

De Morgan törvényei

$\neg(A \wedge B) \sim_0 \neg A \vee \neg B$ $\quad$ $\neg(A \vee B) \sim_0 \neg A \wedge \neg B$

kiszámítási törvények

$A \wedge \top \sim_0 A$	$A \wedge \bot \sim_0 \bot$
$A \vee \top \sim_0 \top$	$A \vee \bot \sim_0 A$
$A \supset \top \sim_0 \top$	$A \supset \bot \sim_0 \neg A$
$\top \supset A \sim_0 A$	$\bot \supset A \sim_0 \top$

logikai jelek közötti összefüggések

$A \wedge B \sim_0 \neg(\neg A \vee \neg B)$	$A \wedge B \sim_0 \neg(A \supset \neg B)$
$A \vee B \sim_0 \neg(\neg A \wedge \neg B)$	$A \vee B \sim_0 \neg A \supset B$
$A \supset B \sim_0 \neg(A \wedge \neg B)$	$A \supset B \sim_0 \neg A \vee B$

kétszeres tagadás	$\neg\neg A \sim_0 A$
kontrapozíció	$A \supset B \sim_0 \neg B \supset \neg A$

negáció az implikációban

$A \supset \neg A \sim_0 \neg A$	$\neg A \supset A \sim_0 A$

implikációs előtagok felcserélése	$A \supset (B \supset C) \sim_0 B \supset (A \supset C)$
implikáció konjunktív előtaggal	$A \wedge B \supset C \sim_0 A \supset (B \supset C)$
az implikáció öndisztributivitása	$A \supset (B \supset C) \sim_0 (A \supset B) \supset (A \supset C)$
esetelemzés	$A \vee B \supset C \sim_0 (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

2.3.1. Formulák normálformái

- Egy atomi formulát vagy negáltját **literál**nak fogjuk nevezni.
- **Elemi konjunkció**
  1. egy literál,
  2. vagy egy elemi konjunkció és egy literál konjunkciója.
- **Elemi diszjunkció**
  1. egy literál,
  2. vagy egy elemi diszjunkció és egy literál diszjunkciója.

- **Konjunktív normálforma**
  1. egy elemi diszjunkció,
  2. vagy egy konjunktív normálforma és egy elemi diszjunkció konjunkciója.
- **Diszjunktív normálforma**
  1. egy elemi konjunkció,
  2. vagy egy diszjunktív normálforma és egy elemi konjunkció diszjunkciója.

Lemma.
Minden ítéletlogikai formulához konstruálható vele logikailag ekvivalens konjunktív és diszjunktív normálforma.

Jelek közötti összefüggések:	(1) $\neg(A \supset B) \sim A \wedge \neg B$
	(2) $A \supset B \sim \neg A \vee B$
Kétszeres tagadás:	(3) $\neg\neg A \sim A$
De Morgan törvényei:	(4) $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$
	(5) $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$
Disztributivitás:	(6) $A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
	(7) $A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A konstrukció lépései:

1. a logikai jelek közötti összefüggések alapján az implikációkat eltávolítjuk;
2. De Morgan törvényeivel elérjük, hogy negáció csak atomokra vonatkozzon;
3. a disztributivitást felhasználva elérjük, hogy a konjunkciók és diszjunkciók megfelelő sorrendben kövessék egymást;
4. esetleg egyszerűsítünk.

Példa.

$$(X \supset Y) \vee \neg(\neg Y \supset X \vee \neg Z)$$

$\downarrow$ implikáció-eltávolítás

$$(\neg X \vee Y) \vee (\neg Y \wedge \neg(X \vee \neg Z))$$

$\downarrow$ negáció atomokra vonatkozik

$$(\neg X \vee Y) \vee (\neg Y \wedge \neg X \wedge Z)$$

$\downarrow$ konjunkciók diszjunkciója

$$(\neg X \vee Y \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg X) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z)$$

$\downarrow$ egyszerűsítés

$$(\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z)$$

$\downarrow$ egyszerűsítés

$$\neg X \vee Y$$

2.4. Szemantikus következményfogalom

2.22. DEFINÍCIÓ. Legyen Γ ítéletlogikai formulák tetszőleges halmaza és B egy tetszőleges formula.
Azt mondjuk, hogy a B formula **tautologikus következménye** a Γ formulahalmaznak (vagy a Γ-beli formuláknak), ha minden olyan interpretációban, melyben a Γ-beli formulák mindegyike igaz, ezekben a B formula is igaz.
A Γ-beli formulák a **feltételformulák (premisszák)**,
a B formula a **következményformula (konklúzió)**.
Jelölése: $\Gamma \models_0 B$.

2.23. PÉLDA.

A $\{\neg Y,\ X \vee Y,\ X \supset Z\}$ formulahalmaz tautologikus következménye Z, ahogy azt közös igazságtáblájuk mutatja.

X	Y	Z	$\neg Y$	$X \vee Y$	$X \supset Z$		Z
i	i	i	h	i	i		i
i	i	h	h	i	h		h
i	h	i	i	i	i	$\star$	i
i	h	h	i	i	h		h
h	i	i	h	i	i		i
h	i	h	h	i	i		h
h	h	i	i	h	i		i
h	h	h	i	h	i		h

2.24. PÉLDA.
A $\{\neg Z,\ X \vee V,\ X \supset Y,\ Y \supset Z,\ V \supset (W \supset Z)\}$ formulahalmaz tautologikus következménye $\neg X$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{I}$ olyan interpretáció, mely minden feltételformulát kielégít.

1. Mivel $\neg Z$ feltételformula, ezért $\mathcal{I}(Z) = h$ lehet csak.
2. $\mathcal{I}(Z) = h$ mellett az $Y \supset Z$ feltételformula csak akkor lehet igaz, ha $\mathcal{I}(Y) = h$.
3. $\mathcal{I}(Z) = h$ és $\mathcal{I}(Y) = h$ mellett az $X \supset Y$ pedig csak $\mathcal{I}(X) = h$ választás esetén lesz igaz.
4. Ha $\mathcal{I}(Z) = \mathcal{I}(Y) = \mathcal{I}(X) = h$, akkor az $X \vee V$ igazzá válásához $\mathcal{I}(V) = i$ szükséges.
5. A rögzített $\mathcal{I}(Z) = \mathcal{I}(Y) = \mathcal{I}(X) = h$ és $\mathcal{I}(V) = i$ igazságértékek esetén a $V \supset (W \supset Z)$ formula igazzá válásához az $\mathcal{I}(W) = h$ kell.

A fenti lépéseket végigvihetjük a közös igazságtábla-sémán is.

X	Y	Z	V	W	$\neg Z$	$X \vee V$	$X \supset Y$	$Y \supset Z$	$V \supset (W \supset Z)$	$\neg X$
–	–	h	–	–	i					
–	h	h	–	–	i			i		
h	h	h	–	–	i		i	i		i
h	h	h	i	–	i	i	i	i		i
h	h	h	i	h	i	i	i	i	i	i

A következményfogalmat hasznos lenne egy alkalmas formula szemantikai jellemzésével leírni. Ehhez nyújtanak lehetőséget a következő tételek.

2.25. TÉTEL. *Legyenek* $A_1, A_2, \ldots, A_n, B \quad (n \geq 1)$ *tetszőleges ítéletlogikai formulák.* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models_0 B$ *pontosan akkor,*

- *ha az* $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ *formula kielégíthetetlen.*
- *ha* $\models_0 A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$.

2.26. DEFINÍCIÓ. Legyen $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ tetszőleges formulahalmaz, és B egy formula. Az $(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}, B)$ párt **következtetésformának** nevezzük. Az $(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}, B)$ pár **helyes következtetésforma**, ha $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models_0 B$.

2.27. TÉTEL. *Legyenek A, B, C tetszőleges ítéletlogikai formulák. Az alábbiakban felsorolt következtetésformák helyesek:*

a leválasztási szabály vagy modus ponens	$(\{A \supset B, A\}, B)$
a kontrapozíció vagy modus tollens	$(\{A \supset B, \neg B\}, \neg A)$
reductio ad absurdum	$(\{A \supset B, A \supset \neg B\}, \neg A)$
az indirekt bizonyítás	$(\{\neg A \supset B, \neg A \supset \neg B\}, A)$
feltételes szillogizmus	$(\{A \supset B, B \supset C\}, A \supset C)$
következtetés esetszétválasztással	$(\{A \vee B, A \supset C, B \supset C\}, C)$

modus tollendo ponens	$(\{A \vee B, \neg A\}, B)$
a $\vee$*-ra vonatkozó következtetésformák*	$(\{A\}, A \vee B)$ *és* $(\{B\}, A \vee B)$
az $\wedge$*-re vonatkozó következtetésformák*	$(\{A, B\}, A \wedge B)$
	$(\{A \wedge B\}, A)$ *és* $(\{A \wedge B\}, B)$
az $\supset$*-ra vonatkozó következtetésforma*	$(\{B\}, A \supset B)$
a $\neg\neg$*-re vonatkozó következtetésformák*	$(\{\neg\neg A\}, A)$ *és* $(\{A\}, \neg\neg A)$

3. fejezet

Az elsőrendű logika

3.1. Elsőrendű logikai nyelvek – szintaxis

Egy **elsőrendű logikai nyelv ábécéje** logikai és logikán kívüli szimbólumokat, továbbá elválasztójeleket tartalmaz.
A logikán kívüli szimbólumhalmaz megadható $\langle Srt, Pr, Fn, Cnst \rangle$ alakban, ahol

1. Srt nemüres halmaz, elemei **fajtákat** szimbolizálnak,
2. Pr nemüres halmaz, elemei **predikátumszimbólumok**,
3. az Fn halmaz elemei **függvényszimbólumok**,
4. $Cnst$ pedig a **konstansszimbólumok** halmaza.

Az $\langle Srt, Pr, Fn, Cnst\rangle$ ábécé szignatúrája egy (ν_1, ν_2, ν_3) hármas, ahol

1. minden $P \in Pr$ predikátumszimbólumhoz ν_1 a **predikátumszimbólum alakját**, azaz a $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ fajtasorozatot,
2. minden $f \in Fn$ függvényszimbólumhoz ν_2 a **függvényszimbólum alakját**, azaz a $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi)$ fajtasorozatot és
3. minden $c \in Cnst$ konstansszimbólumhoz ν_3 a **konstansszimbólum fajtáját**, azaz (π)-t

rendel ($k > 0$ és $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi \in Srt$).

Logikai jelek

- a logikai összekötőjelek: $\neg, \wedge, \vee, \supset$
- a kvantorok: $\forall, \exists$
- a különböző fajtájú individuumváltozók.

Egy elsőrendű nyelv ábécéjében minden $\pi \in Srt$ fajtához szimbólumoknak megszámlálhatóan végtelen

$$v_1^\pi, v_2^\pi, \ldots$$

rendszere tartozik, ezek a szimbólumok a π **fajtájú változók**.

Elválasztójelek a zárójelek: () és a vessző: , 3.1. PÉLDA. 1. A Geom nyelv logikán kívüli szimbólumai:

$Srt = \{pt$ (ponttípus)$, et$ (egyenestípus)$, st$ (síktípus)$\}$

pt típusú változók: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$

et típusú változók: $e, f, g, \ldots$

st típusú változók: a, b, c,...

$Pr = \{P, Q, R\}, Fn = \emptyset$ és $Cnst = \emptyset$

	ν_1	ν_2	ν_3
P	(pt, pt)		
Q	(pt, et)		
R	(pt, st)		

Megjegyzés: a geometriában a P, Q, R szimbólumok helyett rendre az $=$, $\in$, $\in$ jeleket szokás inkább használni.

2. Az Ar nyelv logikán kívüli szimbólumai:
   $Srt = \{szt \text{ (számtípus)}\}$
   szt típusú változók: $x, y, z, \ldots$
   $Pr = \{P\}$
   $Fn = \{f, g, h\}$
   $Cnst = \{nulla\}$

	ν_1		ν_2		ν_3
P	(szt, szt)	f	(szt, szt)	$nulla$	(szt)
		g	(szt, szt, szt)		
		h	(szt, szt, szt)		

Megjegyzés: az aritmetikában a g és h szimbólumok helyett a $+$ és $\cdot$ jeleket, P helyett pedig az $=$ jelet szokás használni.

3. Legyenek a logikán kívüli szimbólumaink a

$$\langle\{\pi_1,\pi_2\},\{P,Q,R\},\{f\},\{c\}\rangle$$

halmaznégyessel és a következő szignatúrával megadva:

	ν_1		ν_2		ν_3
P	(π_1)	f	(π_1,π_2,π_2)	c	(π_1)
Q	(π_1,π_2)				
R	(π_2,π_2)				

Legyenek $x,y,z,\ldots$ π_1 fajtájú és $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},\ldots$ pedig π_2 fajtájú változók.

3.2. definíció. (Az elsőrendű nyelv termjei és formulái)

1. Minden $\pi \in Srt$ fajtájú változó és konstans π fajtájú term.
2. Ha az $f \in Fn$ függvényszimbólum $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi)$ alakú és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ – rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ fajtájú – termek, akkor az $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ szó egy π fajtájú term.
3. Minden term az 1–2. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

4. Ha a $P \in Pr$ predikátumszimbólum $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ alakú és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ – rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ fajtájú – termek, akkor a $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ szó egy elsőrendű formula. Az így nyert formulákat **atomi formuláknak** nevezzük.
5. Ha A elsőrendű formula, akkor $\neg A$ is az.
6. Ha A és B elsőrendű formulák, akkor az $(A \wedge B), (A \vee B)$ és az $(A \supset B)$ is elsőrendű formulák.
7. Ha A elsőrendű formula és x tetszőleges változó, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is elsőrendű formulák. Az így nyert formulákat **kvantált formuláknak** nevezzük.
8. Minden elsőrendű formula a 4–7. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Egy elsőrendű nyelv termjeinek halmazát $\mathcal{L}_t$-vel, formuláinak halmazát $\mathcal{L}_f$-fel jelölhetjük.

3.3. PÉLDA. 1. A Geom nyelv kifejezései:

- termek: $\mathcal{A}$, f, $\mathtt{b}$
- atomi formulák:

	a geometriában szokásosan
$P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$	$(\mathcal{A} = \mathcal{B})$
$Q(\mathcal{B}, e)$	$(\mathcal{B} \in e)$
$R(\mathcal{A}, \mathtt{a})$	$(\mathcal{A} \in \mathtt{a})$

- formula:

$$\exists \mathcal{A}(Q(\mathcal{A}, e) \wedge Q(\mathcal{A}, f)) \quad \exists \mathcal{A}((\mathcal{A} \in e) \wedge (\mathcal{A} \in f))$$

2. Az Ar nyelv kifejezései:

- termek:

	az arimetikában szokásosan
$nulla,\ x,\ f(nulla)$	
$g(x, f(nulla))$	$(x + f(nulla))$
$h(f(f(x)), x)$	$(f(f(x)) \cdot x)$

- atomi formula:

$$P(g(x, f(nulla)), nulla) \quad ((x + f(nulla)) = nulla)$$

- formula:

$$\exists u P(g(x, u), y) \quad \exists u((x + u) = y)$$

3. A harmadik példanyelvben

– π_1 fajtájú termek: $c, x, y, \ldots$

– π_2 fajtájú termek: $\tilde{x}, f(c, \tilde{x}), f(x, f(c, \tilde{x})), \ldots$

– atomi formulák: $P(x), Q(y, \tilde{x}), R(f(c, \tilde{x}), f(x, f(c, \tilde{x}))), \ldots$

– formulák: $\forall x \neg \exists \tilde{x} Q(y, \tilde{x}), (\exists \tilde{x} Q(y, \tilde{x}) \supset \forall \tilde{x} R(f(c, \tilde{x}), f(c, \tilde{x}))), \ldots$

3.4. tétel. (A szerkezeti indukció elve.)

- *Termekre:*

  Egy elsőrendű logikai nyelv minden termje $\mathcal{T}$ tulajdonságú,

  (alaplépés:) *ha minden változója és konstansa $\mathcal{T}$ tulajdonságú, továbbá*

  (indukciós lépés:) *ha a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek $\mathcal{T}$ tulajdonságúak, akkor az f függvényszimbólum felhasználásával előállított*

  $$f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$$

  term is $\mathcal{T}$ tulajdonságú.

- *Formulákra:*
  Egy elsőrendű logikai nyelv minden formulája $\mathcal{T}$ tulajdonságú,

  (alaplépés:) *ha minden atomi formulája $\mathcal{T}$ tulajdonságú, és*

  (indukciós lépések:)

  (i_1) *ha az A formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú, akkor $\neg A$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságú,*

  (i_2) *ha az A és a B formulák $\mathcal{T}$ tulajdonságúak, akkor az $(A \wedge B), (A \vee B)$ és az $(A \supset B)$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságúak és*

  (i_3) *ha az A formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú és x individuumváltozó, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságúak.*

3.5. TÉTEL. (AZ EGYÉRTELMŰ ELEMZÉS TÉTELE.)

- *Egy elsőrendű logikai nyelv minden termjére a következő állítások közül pontosan egy igaz.*

  1. *A term a nyelv egy változója.*
  2. *A term a nyelv egy konstansa.*
  3. *A term a nyelv egyértelműen meghatározható* $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *termjei és az* $f \in Fn$ *függvényszimbólum felhasználásával előállított* $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ *alakú term.*

- *Egy elsőrendű logikai nyelv minden formulájára a következő állítások közül pontosan egy igaz.*

  1. *A formula a nyelv egyértelműen meghatározható* $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *termjei és* $P \in Pr$ *predikátumszimbóluma felhasználásával előállított* $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ *alakú atomi formula.*

2. *A formula egy a nyelv egyértelműen meghatározható formulájának negáltja.*
3. *A formula a nyelv egyértelműen meghatározható formuláinak konjunkciója.*
4. *A formula a nyelv egyértelműen meghatározható formuláinak diszjunkciója.*
5. *A formula a nyelv egyértelműen meghatározható formuláinak implikációja.*
6. *A formula a nyelv egy egyértelműen meghatározható A formulája és x változója felhasználásával előállított $\forall xA$ alakú formula.*
7. *A formula a nyelv egy egyértelműen meghatározható A formulája és x változója felhasználásával előállított $\exists xA$ alakú formula.*

3.6. DEFINÍCIÓ. Egy elsőrendű logikai nyelvben

- 1. egyetlen konstansnak és változónak sincs **közvetlen résztermje**,

  2. az $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ term közvetlen résztermjei a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek,

- 1. egy atomi formulának nincs **közvetlen részformulája**,

  2. a $\neg A$ egyetlen közvetlen részformulája az A formula,

  3. az $(A \wedge B), (A \vee B)$, illetve az $(A \supset B)$ formulák közvetlen részformulái az A és a B formulák,

  4. a $\forall x A$, illetve $\exists x A$ közvetlen részformulája az A formula.

3.7. DEFINÍCIÓ.

- Egy **term résztermjeinek halmaza** a legszűkebb olyan halmaz, melynek
  1. a term eleme és
  2. ha egy term eleme, akkor eleme a term összes közvetlen résztermje is.
- Egy **formula részformuláinak halmaza** a legszűkebb olyan halmaz, melynek
  1. a formula eleme és
  2. ha egy formula eleme, akkor eleme a formula összes közvetlen részformulája is.

3.8. PÉLDA. Az $f(x, f(c, \tilde{x}))$ term közvetlen résztermjei: x és $f(c, \tilde{x})$, résztermjeinek halmaza:

$$\{f(x, f(c, \tilde{x})),\ x,\ f(c, \tilde{x}),\ c,\ \tilde{x}\}.$$

A $\forall x \neg \exists \tilde{x} Q(y, \tilde{x})$ formula egyetlen közvetlen részformulája: $\neg \exists \tilde{x} Q(y, \tilde{x})$, részformuláinak halmaza:

$$\{\forall x \neg \exists \tilde{x} Q(y, \tilde{x}),\ \neg \exists \tilde{x} Q(y, \tilde{x}),\ \exists \tilde{x} Q(y, \tilde{x}),\ Q(y, \tilde{x})\}.$$

3.9. TÉTEL. (A SZERKEZETI REKURZIÓ ELVE.)

- *Termekre:*
  Egy elsőrendű logikai nyelv esetén a nyelv termjein értelmezett $\mathcal{F}$ függvényt egyértelműen adjuk meg, ha

  (alaplépés:) *értékeit rögzítjük a nyelv változóin és konstansain, majd megmondjuk, hogy*

  (indukciós lépések:) $\mathcal{F}$ *értéke az* $f(t_1, t_2, \dots, t_k)$ *termre az* $\mathcal{F}$*-nek a* $t_1, t_2, \dots, t_k$ *termeken felvett értékeiből hogyan származtatható.*

- *Formulákra:*
  Egy elsőrendű logikai nyelv esetén a nyelv formuláin értelmezett $\mathcal{F}$ függvényt egyértelműen adjuk meg, ha

  (alaplépés:) *értékeit rögzítjük a nyelv atomi formuláin és megmondjuk, hogy $\mathcal{F}$ értéke*

  (indukciós lépések:)

  (r_1) *a $\neg A$ formulára az A-n felvett értékéből,*

  (r_2) *az $(A \wedge B), (A \vee B)$, illetve az $(A \supset B)$ formulára az A-n és a B-n felvett értékeiből, illetve*

  (r_3) *a $\forall x A$, illetve az $\exists x A$ formulára az A-n felvett értékéből hogyan származtatható.*

3.10. DEFINÍCIÓ.

- Definiáljuk a $\widetilde{\ell}\colon \mathcal{L}_t \to \mathbf{N}_0$ függvényt a következőképpen:

  1. ha t változó vagy konstansszimbólum, $\widetilde{\ell}(t)$ legyen 0,
  2. $\widetilde{\ell}(f(t_1, t_2, \ldots, t_k))$ legyen $\widetilde{\ell}(t_1) + \widetilde{\ell}(t_2) + \ldots + \widetilde{\ell}(t_k) + 1$.

  Ekkor a $t \in \mathcal{L}_t$ termhez rendelt $\widetilde{\ell}(t)$ függvényértéket a t **term funkcionális összetettségének** nevezzük.

- Definiáljuk a $\ell\colon \mathcal{L}_f \to \mathbf{N}_0$ függvényt a következőképpen:

  1. ha A atomi formula, $\ell(A)$ legyen 0,
  2. $\ell(\neg A)$ legyen $\ell(A) + 1$,
  3. $\ell(A \wedge B), \ell(A \vee B)$, illetve az $\ell(A \supset B)$ legyen $\ell(A) + \ell(B) + 1$,
  4. $\ell(\forall x A)$, illetve az $\ell(\exists x A)$ pedig legyen $\ell(A) + 1$.

  Ekkor az $A \in \mathcal{L}_f$ formulához rendelt $\ell(A)$ függvényértéket az A **formula logikai összetettségének** nevezzük.

3.11. PÉLDA. Az $f(x, f(c, \tilde{x}))$ term funkcionális összetettsége 2, a

$$(\exists \tilde{x} Q(y, \tilde{x}) \supset \forall \tilde{x} R(f(c, \tilde{x}), f(c, \tilde{x})))$$

formula logikai összetettsége 3.

Az ítéletlogikában definiáltuk a **logikai összekötőjel hatáskörének** és a **fő logikai összekötőjelnek** a fogalmát. A fogalmak változtatás nélkül kiterjeszthetők a kvantorokra is.
Egészítsük ki a logikai összekötőjelek közötti erősorrendet azzal, hogy a kvantorokat is besoroljuk. A prioritás csökkenő sorrendben:

$$\{\forall, \exists, \neg\},\ \{\wedge,\ \vee\},\ \supset .$$

Azokat a zárójeleket, melyek ezt a sorrendet jelölnék ki, elhagyhatjuk.

3.12. DEFINÍCIÓ.

1. A termek és az atomi formulák minden **változójának** minden **előfordulása szabad**.

2. A $\neg A$ formulában egy **változó-előfordulás** pontosan akkor **kötött**, ha ez a változó-előfordulás már A-ban is kötött.

3. Az $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, illetve az $(A \supset B)$ formulában egy **változó-előfordulás kötött,** ha ez az előfordulás már kötött abban a közvetlen részformulában is, amelyben ez az előfordulás szerepel.

4. A $\forall x A$, illetve a $\exists x A$ formulában x minden **előfordulása kötött**. Az A formula előtt szereplő kvantor teszi kötötté (köti) x valamely előfordulását, ha ez az előfordulás A-ban még szabad volt. Egy az x-től különböző változó valamely **előfordulása kötött**, ha A-ban kötött.

Ha egy változónak egy kifejezésben van szabad előfordulása, akkor ezt a változó a kifejezés **paramétere**. Egy K kifejezés paraméterei halmazára $\mathrm{Par}(K)$-val fogunk hivatkozni.

3.13. PÉLDA. – A $\exists\tilde{x}(Q(x,\tilde{x})\wedge Q(y,\tilde{x}))$ formulában $\tilde{x}$ előfordulásai az $\exists$ kvantor által kötöttek, az x és az y előfordulásai szabadok. Tehát a formula paraméteres, paraméterei x és y.

– A $\exists\tilde{x}(\forall x Q(x,\tilde{x})\wedge Q(c,\tilde{x}))$ formulában az $\exists$ kvantor által kötött $\tilde{x}$ előfordulások mellett az x előfordulásai is kötöttek egy $\forall$ kvantor által, más változó-előfordulás pedig nincs benne. A formula zárt formula vagy mondat.

– A $\forall x(P(x) \supset \exists x Q(x,\tilde{x}))$ formula szintén paraméteres, az $\tilde{x}$ szabadon fordul elő benne. Az x előfordulásai itt is kötöttek, de a $P(x)$-beli x előfordulást és a $Q(x,\tilde{x})$-beli x előfordulást két különböző kvantor köti.

3.14. DEFINÍCIÓ. A $\forall x A$, illetve a $\exists x A$ formulában az A előtt szereplő kvantor által **kötött x változó átnevezéséről** beszélünk, amikor

1. a $\forall x$, illetve a $\exists x$ kvantoros előtagban x helyett egy vele megegyező fajtájú y változót nevezünk meg ($\forall y$, illetve $\exists y$), majd
2. A-ban az x változó minden szabad előfordulását y-ra cseréljük ki (a kapott formulát jelöljük $[A_y^x]$-nal),

és így a $\forall y[A_y^x]$, illetve a $\exists y[A_y^x]$ formulát kapjuk.

3.15. DEFINÍCIÓ. Ha a $\forall xA$, illetve a $\exists xA$ formulában

1. y nem paraméter és
2. x egyetlen előfordulása sem esik y-t megnevező kvantor hatáskörébe,

akkor **szabályosan végrehajtott változó-átnevezéssel** nyertük a $\forall xA$, illetve a $\exists xA$ formulából a $\forall y[A_y^x]$, illetve a $\exists y[A_y^x]$ formulát.

3.16. PÉLDA. A

$$\exists\tilde{x}(R(\tilde{x},\tilde{y})\wedge\forall\tilde{z}R(\tilde{z},\tilde{x}))$$

formulából az $\exists$ kvantor által kötött $\tilde{x}$ szabályosan végrehajtott átnevezésével nyertük a

$$\exists\tilde{u}(R(\tilde{u},\tilde{y})\wedge\forall\tilde{z}R(\tilde{z},\tilde{u}))$$

formulát. Az $\exists$ kvantor által kötött változó új nevének

1. $\tilde{y}$-t nem választhatjuk, mert $\tilde{y}$ a kvantor hatáskörében is előforduló paramétere a formulának;
2. $\tilde{z}$-t nem választhatjuk, mert $\tilde{x}$-nek van előfordulása $\tilde{z}$-t megnevező kvantor hatáskörében.

Ha két formula csak kötött változóik szabályosan végrehajtott átnevezésében különbözik, akkor azt fogjuk mondani, hogy konguensek. Definiáljuk most pontosan egy elsőrendű nyelv formuláinak halmazán ezt a binér relációt (a reláció jele: $\approx$).

3.17. definíció. (Formulák kongruenciája.)

1. Egy atomi formula csak önmagával **kongruens**.
2. $\neg A \approx \neg A'$, ha $A \approx A'$.
3. $(A \wedge B) \approx (A' \wedge B')$, $(A \vee B) \approx (A' \vee B')$, illetve $(A \supset B) \approx (A' \supset B')$, ha $A \approx A'$ és $B \approx B'$.
4. $\forall x A \approx \forall y A'$, illetve $\exists x A \approx \exists y A'$, ha $[A_z^x] \approx [A'^y_z]$ minden olyan z változóra, amely különbözik a kérdéses formulákban előforduló összes változótól.

3.18. PÉLDA. A

$$\forall x\,(\exists\tilde{x}Q(x,\tilde{x}) \supset \exists\tilde{x}\neg(Q(x,\tilde{x}) \wedge Q(y,\tilde{x})))$$

formulával kongruens például a

$$\forall z(\exists\tilde{y}Q(z,\tilde{y}) \supset \exists\tilde{z}\neg(Q(z,\tilde{z}) \wedge Q(y,\tilde{z})))$$

formula. Ugyanakkor nem kongruens vele a

$$\forall y(\exists\tilde{x}Q(y,\tilde{x}) \supset \exists\tilde{x}\neg(Q(y,\tilde{x}) \wedge Q(x,\tilde{x})))$$

formula, hisz az eredeti formulának y a paramétere, ez utóbbinak x.

Világos, hogy minden $A, B, C \in \mathcal{L}$ formula esetén $A \approx A$; ha $A \approx B$, akkor $B \approx A$; és ha $A \approx B$ és $B \approx C$, akkor $A \approx C$; azaz a kongruencia egy ekvivalenciareláció. Ez a reláció az elsőrendű nyelv formuláinak egy osztályozását generálja; az egymással kongruens formulákat a logikában nem tekintjük lényegében különbözőnek.

3.19. DEFINÍCIÓ. Egy formulát **változóiban tisztának** nevezünk, ha benne minden kvantoros előtagban a formula

1. paramétereitől és
2. bármely másik kvantoros előtagban megnevezett változótól

különböző változó van megnevezve.

3.20. TÉTEL. *Tetszőleges elsőrendű formulához konstruálható vele kongruens változóiban tiszta formula.*

3.21. PÉLDA. A

$$\exists\tilde{x}Q(x,\tilde{x}) \supset \forall x\exists\tilde{x}\neg(Q(x,\tilde{x}) \wedge R(\tilde{y},\tilde{x}))$$

formula nem változóiban tiszta, a vele kongruens

$$\exists\tilde{z}Q(x,\tilde{z}) \supset \forall y\exists\tilde{x}\neg(Q(y,\tilde{x}) \wedge R(\tilde{y},\tilde{x}))$$

formula viszont már az.

3.2. Elsőrendű logikai nyelvek – szemantika

3.22. DEFINÍCIÓ. $\mathcal{L}$ **interpretációja** egy $\mathcal{I}$-vel jelölt

$$\langle \mathcal{I}_{Srt}, \mathcal{I}_{Pr}, \mathcal{I}_{Fn}, \mathcal{I}_{Cnst} \rangle$$

függvénynégyes, ahol

1. az $\mathcal{I}_{Srt} : \pi \mapsto \mathcal{U}_\pi$ függvény megad minden egyes $\pi \in Srt$ fajtához egy $\mathcal{U}_\pi$ nemüres halmazt, a π fajtájú individuumok halmazát (a különböző fajtájú individuumok halmazainak uniója az interpretáció **individuumtartománya** vagy **univerzuma**),

2. az $\mathcal{I}_{Pr}\colon P \mapsto P^{\mathcal{I}}$ függvény megad minden $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ alakú $P \in Pr$ predikátumszimbólumhoz egy

$$P^{\mathcal{I}}\colon \mathcal{U}_{\pi_1} \times \mathcal{U}_{\pi_2} \times \ldots \times \mathcal{U}_{\pi_k} \to \{i, h\}$$

logikai függvényt (relációt),

3. az $\mathcal{I}_{Fn}\colon f \mapsto f^{\mathcal{I}}$ függvény hozzárendel minden $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi)$ alakú $f \in Fn$ függvényszimbólumhoz egy

$$f^{\mathcal{I}}\colon \mathcal{U}_{\pi_1} \times \mathcal{U}_{\pi_2} \times \ldots \times \mathcal{U}_{\pi_k} \to \mathcal{U}_{\pi}$$

matematikai függvényt (műveletet),

4. az $\mathcal{I}_{Cnst}\colon c \mapsto c^{\mathcal{I}}$ függvény pedig minden π fajtájú $c \in Cnst$ konstansszimbólumhoz az $\mathcal{U}_{\pi}$ individuumtartománynak egy individuumát rendeli, azaz $c^{\mathcal{I}} \in \mathcal{U}_{\pi}$.

Példa.

1. Az Ar nyelv természetes interpretációja

$\mathcal{I}_{Srt}(szt) = \mathbf{N}_0$

$\mathcal{I}_{Cnst}(nulla) = 0$

$\mathcal{I}_{Fn}(f) = f^{\mathcal{I}}$, ahol $f^{\mathcal{I}} : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$, és

$$f^{\mathcal{I}}(n) = n + 1, \quad (\text{ ha } n \in \mathbf{N}_0)$$

$\mathcal{I}_{Fn}(g) = g^{\mathcal{I}}$, ahol $g^{\mathcal{I}} : \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$, és

$$g^{\mathcal{I}}(n, m) = n + m, \quad (\text{ ha } n, m \in \mathbf{N}_0)$$

$\mathcal{I}_{Fn}(h) = h^{\mathcal{I}}$, ahol $h^{\mathcal{I}} : \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$, és

$$h^{\mathcal{I}}(n, m) = n \cdot m, \quad (\text{ ha } n, m \in \mathbf{N}_0)$$

$\mathcal{I}_{Pr}(P) = P^{\mathcal{I}}$, ahol $P^{\mathcal{I}} : \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \to \{i, h\}$,
és (ha $n, m \in \mathbf{N}_0$),

$$P^{\mathcal{I}}(n, m) = \begin{cases} i & \text{ha } n = m \\ h & \text{egyébként} \end{cases}$$

2. Rögzítsük most a harmadik példanyelv egy interpretációját. $\mathcal{U}_{\pi_1}$ legyen $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, $\mathcal{U}_{\pi_2}$ pedig legyen $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$, továbbá a

$$P^{\mathcal{I}}\colon \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \to \{i, h\}$$
$$Q^{\mathcal{I}}\colon \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \times \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} \to \{i, h\}$$
$$R^{\mathcal{I}}\colon \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} \times \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} \to \{i, h\}$$
$$f^{\mathcal{I}}\colon \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \times \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} \to \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$$

függvények legyenek az alábbi táblákkal adottak:

$P^{\mathcal{I}}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$
	i	h	i

$Q^{\mathcal{I}}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$
$\mathbf{1}$	i	h	i
$\mathbf{2}$	h	i	i

$R^{\mathcal{I}}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{1}$	h	i
$\mathbf{2}$	i	i

$f^{\mathcal{I}}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}$

Jelölje a c konstansszimbólum a $\mathbf{c}$ individuumot.

3.23. DEFINÍCIÓ. Legyen az $\mathcal{L}$ elsőrendű logikai nyelvnek $\mathcal{I}$ egy interpretációja, az interpretáció univerzuma legyen $\mathcal{U}$. Jelölje V a nyelv változóinak a halmazát. Egy olyan $\kappa\colon V \to \mathcal{U}$ leképezést, ahol ha x π fajtájú változó, akkor $\kappa(x)$ $\mathcal{U}_\pi$-beli individuum, az $\mathcal{I}$ interpretáció egy **változókiértékelésének** nevezzük.

3.24. DEFINÍCIÓ. Legyen x egy változó. A κ^* változókiértékelés a κ **változókiértékelés x-variánsa**, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden x-től különböző y változó esetén.

3.25. DEFINÍCIÓ.
Legyen az $\mathcal{L}$ nyelvnek $\mathcal{I}$ egy interpretációja és κ egy $\mathcal{I}$-beli változókiértékelés. Az $\mathcal{L}$ nyelv egy π fajtájú t termjének **értéke** $\mathcal{I}$-ben a κ változókiértékelés mellett az alábbi – $|t|^{\mathcal{I},\kappa}$-val jelölt – $\mathcal{U}_\pi$-beli individuum:

1. ha $c \in Cnst$ π fajtájú konstansszimbólum, akkor $|c|^{\mathcal{I},\kappa}$ az $\mathcal{U}_\pi$-beli $c^{\mathcal{I}}$ individuum,
2. ha x π fajtájú változó, akkor $|x|^{\mathcal{I},\kappa}$ az $\mathcal{U}_\pi$-beli $\kappa(x)$ individuum,
3. ha $t_1, t_2, \ldots, t_k$ rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ fajtájú termek és ezek értékei a κ változókiértékelés mellett $\mathcal{I}$-ben rendre az $\mathcal{U}_{\pi_1}$-beli $|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}$, az $\mathcal{U}_{\pi_2}$-beli $|t_2|^{\mathcal{I},\kappa}$, ... és az $\mathcal{U}_{\pi_k}$-beli $|t_k|^{\mathcal{I},\kappa}$ individuumok, akkor egy $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi)$ alakú $f \in Fn$ függvényszimbólum esetén $|f(t_1, t_2, \ldots, t_k)|^{\mathcal{I},\kappa}$ az $\mathcal{U}_\pi$-beli $f^{\mathcal{I}}(|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, |t_2|^{\mathcal{I},\kappa}, \ldots, |t_k|^{\mathcal{I},\kappa})$ individuum.

Példa.

1. Az Ar nyelv természetes interpretációjában
   - bármely változókiértékelés mellett
     $|nulla| = 0$
     $|f(nulla)| = f^{\mathcal{I}}(|nulla|) = 1.$
   - a $\kappa(x) = 1, \kappa(y) = 3$ változókiértékelés mellett
     $|(f(x) + y)|^{\kappa} = g^{\mathcal{I}}(|f(x)|^{\kappa}, |y|^{\kappa}) = g^{\mathcal{I}}\left(f^{\mathcal{I}}(|x|^{\kappa}), 3\right) =$
     $= g^{\mathcal{I}}\left(f^{\mathcal{I}}(1), 3\right) = g^{\mathcal{I}}(2, 3) = 5$

2. Határozzuk meg a harmadik példanyelv $f(c, f(x, \tilde{x}))$ termjének az előbb megadott $\mathcal{I}$ interpretációbeli értékét a következő változókiértékelés mellett: legyen $\kappa(x) = \mathbf{b}$, $\kappa(y) = \mathbf{a}$, és κ minden más π_1 fajtájú változóhoz a $\mathbf{c}$, minden π_2 fajtájú változóhoz pedig az $\mathbf{1}$ individuumot rendelje.

$$\begin{aligned}
&|f(c, f(x, \tilde{x}))|^{\mathcal{I},\kappa} = \\
&\quad = f^{\mathcal{I}}(|c|^{\mathcal{I},\kappa}, |f(x, \tilde{x})|^{\mathcal{I},\kappa}) = \\
&\quad = f^{\mathcal{I}}(|c|^{\mathcal{I},\kappa}, f^{\mathcal{I}}(|x|^{\mathcal{I},\kappa}, |\tilde{x}|^{\mathcal{I},\kappa})).
\end{aligned}$$

Mivel $|c|^{\mathcal{I},\kappa} = c^{\mathcal{I}} = \mathbf{c}$, $|x|^{\mathcal{I},\kappa} = \kappa(x) = \mathbf{b}$ és $|\tilde{x}|^{\mathcal{I},\kappa} = \kappa(\tilde{x}) = \mathbf{1}$, így $f^{\mathcal{I}}(|c|^{\mathcal{I},\kappa}, f^{\mathcal{I}}(|x|^{\mathcal{I},\kappa}, |\tilde{x}|^{\mathcal{I},\kappa})) = f^{\mathcal{I}}(\mathbf{c}, f^{\mathcal{I}}(\mathbf{b}, \mathbf{1}))$, ami $f^{\mathcal{I}}(\mathbf{b}, \mathbf{1}) = \mathbf{2}$ miatt $f^{\mathcal{I}}(\mathbf{c}, \mathbf{2})$, ez pedig éppen $\mathbf{1}$. Tehát

$$|f(c, f(x, \tilde{x}))|^{\mathcal{I},\kappa} = \mathbf{1},$$

vagyis $f(c, f(x, \tilde{x}))$ $\mathcal{I}$-beli értéke a κ változókiértékelés mellett $\mathbf{1}$.

3.26. LEMMA. *Az $\mathcal{L}$ nyelvnek legyen $\mathcal{I}$ egy interpretációja, κ_1 és κ_2 pedig olyan változókiértékelések $\mathcal{I}$-ben, amelyek megegyeznek individuumváltozóknak egy S halmazán. Ha egy t termben csak S-beli változók fordulnak elő, akkor*

$$|t|^{\mathcal{I},\kappa_1} = |t|^{\mathcal{I},\kappa_2}.$$

Példa.

A harmadik példanyelv előbb vizsgált interpretációjában az $f(x, f(c, \tilde{x}))$ term jelentése a termben előforduló változók kiértékeléstől függ:

$\kappa(x)$	$\kappa(\tilde{x})$	$\|f(x, f(c, \tilde{x}))\|^\kappa$
a	**1**	**2**
a	**2**	**1**
b	**1**	**2**
b	**2**	**2**
c	**1**	**1**
c	**2**	**2**

3.27. DEFINÍCIÓ.

Legyen az $\mathcal{L}$ nyelvnek $\mathcal{I}$ egy interpretációja és κ egy $\mathcal{I}$-beli változókiértékelés. Egy C formulához $\mathcal{I}$-ben a κ változókiértékelés mellett az alábbi – $|C|^{\mathcal{I},\kappa}$-val jelölt – igazságértéket rendeljük:

1. $|P(t_1, t_2, \dots, t_k)|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons \begin{cases} i & \text{ha } P^{\mathcal{I}}(|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, |t_2|^{\mathcal{I},\kappa}, \dots, |t_k|^{\mathcal{I},\kappa}) = i, \\ h & \text{egyébként.} \end{cases}$

2. $|\neg A|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons \dot{\neg}|A|^{\mathcal{I},\kappa}$,

3. $|A \wedge B|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons |A|^{\mathcal{I},\kappa} \dot{\wedge} |B|^{\mathcal{I},\kappa}$,

4. $|A \vee B|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons |A|^{\mathcal{I},\kappa} \dot{\vee} |B|^{\mathcal{I},\kappa}$,

5. $|A \supset B|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons |A|^{\mathcal{I},\kappa} \dot{\supset} |B|^{\mathcal{I},\kappa}$,

6. $|\forall x A|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons \begin{cases} i & \text{ha } |A|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i \;\; \kappa \text{ minden } \kappa^* \; x\text{-variánsára,} \\ h & \text{egyébként.} \end{cases}$

7. $|\exists x A|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons \begin{cases} i & \text{ha } |A|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i \;\; \kappa \text{ valamely } \kappa^* \; x\text{-variánsára,} \\ h & \text{egyébként.} \end{cases}$

Példa.

1. Az Ar nyelv természetes interpretációjában a $\kappa(x) = 1$, $\kappa(y) = 3$, $\kappa(z) = 4$ (a többi változóra κ 0) változókiértékelés mellett
$|\,(f(nulla) \cdot y) = (f\,(f(nulla)) + x)\,|^{\kappa} =$
$P^{\mathcal{I}}\,(|f(nulla) \cdot y|^{\kappa}, |f\,(f(nulla)) + x|^{\kappa}) =$
$P^{\mathcal{I}}\left(h^{\mathcal{I}}\,(|f(nulla)|^{\kappa}, |y|^{\kappa})\,, g^{\mathcal{I}}\,(|f\,(f(nulla))\,|^{\kappa}, |x|^{\kappa})\right) =$
$P^{\mathcal{I}}\left(h^{\mathcal{I}}(1,3), g^{\mathcal{I}}\left(f^{\mathcal{I}}(|f(nulla)|^{\kappa}), 1\right)\right) = P^{\mathcal{I}}\left(3, g^{\mathcal{I}}(f^{\mathcal{I}}(1), 1)\right) =$
$P^{\mathcal{I}}(3, g^{\mathcal{I}}(2,1)) = P^{\mathcal{I}}(3,3) = i$

   $|\exists u\,((y+u) = z)\,|^{\kappa} = i$, mert $\kappa^*(u) = 1$ mellett
$|\,((y+u) = z)\,|^{\kappa^*} = P^{\mathcal{I}}\left(|y+u|^{\kappa^*}, |z|^{\kappa^*}\right) =$
$P^{\mathcal{I}}\left(g^{\mathcal{I}}(|y|^{\kappa^*}, |u|^{\kappa^*}), 4\right) = P^{\mathcal{I}}\left(g^{\mathcal{I}}(3,1), 4\right) = P^{\mathcal{I}}(4,4) = i$

2. • Határozzuk meg most a harmadik példanyelv $Q(y, f(c, f(x, \tilde{x})))$ atomi formulájának $\mathcal{I}$-beli értékét az előző példabeli κ változókiértékelés mellett.

$$|Q(y, f(c, f(x, \tilde{x})))|^{\mathcal{I},\kappa} = Q^{\mathcal{I}}(|y|^{\mathcal{I},\kappa}, |f(c, f(x, \tilde{x}))|^{\mathcal{I},\kappa}).$$

$|y|^{\mathcal{I},\kappa} = \kappa(y) = \mathbf{a}$, az előző példában pedig kiszámoltuk, hogy

$$|f(c, f(x, \tilde{x}))|^{\mathcal{I},\kappa} = \mathbf{1}.$$

Tehát

$$|Q(y, f(c, f(x, \tilde{x})))|^{\mathcal{I},\kappa} = Q^{\mathcal{I}}(\mathbf{a}, \mathbf{1}) = i.$$

- Ha viszont a $Q(y, f(x, f(x, \tilde{x})))$ atom $\mathcal{I}$-beli értékét akarjuk kiszámolni κ mellett, ehhez az $|f(x, f(x, \tilde{x}))|^{\mathcal{I},\kappa}$ értékre van szükség, ami **2**. Tehát

$$|Q(y, f(x, f(x, \tilde{x})))|^{\mathcal{I},\kappa} = Q^{\mathcal{I}}(\mathbf{a}, \mathbf{2}) = h.$$

Továbbá a $\exists z Q(y, f(z, f(x, \tilde{x})))$ formula $\mathcal{I}$-beli értéke a κ változókiértékelés mellett i, hiszen magára κ-ra (κ egyik lehetséges z-variánsa önmaga)

$$|Q(y, f(z, f(x, \tilde{x}))|^{\mathcal{I},\kappa} = i.$$

A $\forall z Q(y, f(z, f(x, \tilde{x})))$ formula $\mathcal{I}$-beli értéke κ mellett viszont h, hiszen κ azon κ^* z-variánsa mellett, melyre $\kappa^*(z) = \mathbf{b}$, az adódik, hogy

$$|Q(y, f(z, f(x, \tilde{x})))|^{\mathcal{I},\kappa^*} = h.$$

3.28. LEMMA. *Az $\mathcal{L}$ nyelvnek legyen $\mathcal{I}$ egy interpretációja, κ_1 és κ_2 pedig olyan változókiértékelések $\mathcal{I}$-ben, amelyek megegyeznek individuumváltozóknak egy S halmazán. Ha az A formula olyan, hogy* $\mathrm{Par}(A) \subseteq S$, *akkor*

$$|A|^{\mathcal{I},\kappa_1} = |A|^{\mathcal{I},\kappa_2}.$$

Példa.
A harmadik példanyelv $\mathcal{I}$ interpretációjában a $\exists\tilde{y}\neg R(\tilde{y}, f(x, f(c, \tilde{x}))$ formula jelentése az alábbi relációtáblával írható le:

$\kappa(x)$	$\kappa(\tilde{x})$	$\|\exists\tilde{y}\neg R(\tilde{y}, f(x, f(c, \tilde{x}))\|^{\kappa}$
a	**1**	h
a	**2**	i
b	**1**	h
b	**2**	h
c	**1**	i
c	**2**	h

Példa.
Vizsgáljuk most a $\langle\{\pi\},\{P,Q,R\},\{f,g,h\},\emptyset\rangle$ nyelvet a

	ν_1		ν_2
P	(π)	f	(π,π)
Q	(π,π)	g	(π,π,π)
R	(π,π,π)	h	(π,π,π,π)

szignatúrával. Legyenek $x, y, z, \ldots$ π fajtájú változók. Jelöljük ezt az elsőrendű nyelvet $\mathcal{L}'$-vel. Megadjuk most az $\mathcal{L}'$ nyelv egy lehetséges interpretációját: $\mathcal{I}'$-t. Legyen a nyelv univerzuma az $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ halmaz és a $P^{\mathcal{I}'}$ és a $Q^{\mathcal{I}'}$ relációk táblával adottak:

$P^{\mathcal{I}'}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$
	i	i	h

$Q^{\mathcal{I}'}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$
$\mathbf{a}$	i	h	i
$\mathbf{b}$	h	i	i
$\mathbf{c}$	h	h	h

Az $R^{\mathcal{I}'}$ reláció pedig a következő:

$$R^{\mathcal{I}'}(x, y, z) \rightleftharpoons \begin{cases} i & \text{ha } y = \mathbf{a} \text{ és } x \text{ és } z \text{ megegyeznek,} \\ h & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az $f^{\mathcal{I}'}$ és a $g^{\mathcal{I}'}$ műveletek művelettáblái:

$f^{\mathcal{I}'}$	**a**	**b**	**c**
	b	**c**	**a**

$g^{\mathcal{I}'}$	**a**	**b**	**c**
a	**a**	**a**	**a**
b	**a**	**b**	**b**
c	**a**	**b**	**c**

A $h^{\mathcal{I}'}$ művelet pedig a következő:

$$h^{\mathcal{I}'}(x, y, z) \rightleftharpoons \begin{cases} \mathbf{a} & \text{ha } x, y \text{ és } z \text{ közül legalább egy } \mathbf{a}, \\ \mathbf{b} & \text{ha } x, y \text{ és } z \text{ is } \mathbf{b}, \\ \mathbf{c} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ezzel megadtuk az $\mathcal{I}'$ interpretációját az $\mathcal{L}'$ nyelvnek.

Vizsgáljuk most meg néhány $\mathcal{L}'$-beli formula $\mathcal{I}'$-beli jelentését.

1. A $\forall x(P(x) \supset Q(x,x))$ zárt formula igazságértékének megállapításához meg kell határozni egy tetszőlegesen rögzített κ összes lehetséges x-variánsa mellett a $P(x) \supset Q(x,x)$ formula $\mathcal{I}'$-beli igazságértékét. Elég $P(x) \supset Q(x,x)$ paraméterénél ismerni a lehetséges x-variánsok értékét:

$\kappa^*(x)$	$\lvert P(x)\rvert^{\kappa^*}$	$\lvert Q(x,x)\rvert^{\kappa^*}$	$\lvert P(x) \supset Q(x,x)\rvert^{\kappa^*}$
a	i	i	i
b	i	i	i
c	h	h	i

Minden x-variáns mellett igaz $P(x) \supset Q(x,x)$, így $\forall x(P(x) \supset Q(x,x))$ igaz $\mathcal{I}'$-ben.

2. Vizsgáljuk most a $\neg P(x) \wedge R(x,y,x)$ formulát. A formula paraméteres, paraméterei x és y. $\mathcal{I}'$-ben egy-egy rögzített változókiértékelés mellett igazságértékét meghatározhatjuk.

$\kappa(x)$	$\kappa(y)$	$\|P(x)\|^{\kappa}$	$\|\neg P(x)\|^{\kappa}$	$\|R(x,y,x)\|^{\kappa}$	$\|\neg P(x) \wedge R(x,y,x)\|^{\kappa}$
a	**a**	i	h	i	h
a	**b**	i	h	h	h
a	**c**	i	h	h	h
b	**a**	i	h	i	h
b	**b**	i	h	h	h
b	**c**	i	h	h	h
c	**a**	h	i	i	i
c	**b**	h	i	h	h
c	**c**	h	i	h	h

Ez egy $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}^2 \to \{i,h\}$ reláció táblája, ez a reláció a $\neg P(x) \wedge R(x,y,x)$ formula $\mathcal{I}'$ interpretációbeli jelentése.

3. Nézzük meg azt, hogy mit jelent a $\exists y(\neg P(x) \wedge R(x,y,x))$ formula. Most is minden κ változókiértékelés mellett meg kell határozni a formula igazságértékét. De mivel a formulánk kvantált, minden κ esetén vizsgálni kell az y-variánsai mellett a kvantor hatáskörébe eső formula igazságértékeit is. Az előző táblázatban viszont épp olyan változókiértékelések szerepelnek, melyre $\kappa(x) = \mathbf{a}$, és $\kappa(y) = \mathbf{a}$, $\kappa(y) = \mathbf{b}$, $\kappa(y) = \mathbf{c}$ rendre éppen a $\kappa(x) = \mathbf{a}$ lehetséges y-variánsai, majd $\kappa(x) = \mathbf{b}$ lehetséges y-variánsai, és $\kappa(x) = \mathbf{c}$ lehetséges y-variánsai is megtalálhatók.

$\kappa(x)$	$\lvert\exists y(\neg P(x) \wedge R(x,y,x))\rvert^{\kappa}$
$\mathbf{a}$	h
$\mathbf{b}$	h
$\mathbf{c}$	i

Ez egy $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \to \{i,h\}$ reláció táblája, ez a reláció a $\exists y(\neg P(x) \wedge R(x,y,x))$ formula $\mathcal{I}'$ interpretációbeli jelentése.

3.3. Elsőrendű logikai törvények

3.29. DEFINÍCIÓ. Az elsőrendű logikai nyelv egy A formulája **kielégíthető**, ha van a nyelvnek olyan $\mathcal{I}$ interpretációja és $\mathcal{I}$-ben van olyan κ változókiértékelés, amelyre $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, egyébként A **kielégíthetetlen**. Ha az $\mathcal{I}$ interpretáció és a κ változókiértékelés olyanok, hogy $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, azt mondjuk, hogy $\mathcal{I}$ a κ változókiértékelés mellett **kielégíti** A-t.

Amennyiben az A formula zárt, igazságértékét egyedül az interpretáció határozza meg. Ha $|A|^{\mathcal{I}} = i$, azt mondjuk, hogy az $\mathcal{I}$ interpretáció **kielégíti** A-t vagy másképp, a $\mathcal{I}$ interpretáció az A formula **modellje**.

3.30. PÉLDA.

(a) A $P(x) \supset \forall x P(x)$ formula kielégíthető, mert például az $\mathcal{I}'$ interpretációban egy olyan κ változókiértékelés mellett, amelyben $\kappa(x) = \mathbf{c}$, $|P(x)|^{\mathcal{I}',\kappa} = h$, és így

$$|P(x) \supset \forall x P(x)|^{\mathcal{I}',\kappa} = |P(x)|^{\mathcal{I}',\kappa} \supset |\forall x P(x)|^{\mathcal{I}',\kappa} = i.$$

(b) Ugyanakkor a $\forall x P(x) \wedge \neg P(x)$ formula kielégíthetetlen, hiszen ha rögzítünk egy tetszőleges $\mathcal{I}$ interpretációt és $\mathcal{I}$-ben egy tetszőleges κ változókiértékelést, akkor $|\forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa}$

1. vagy h igazságértékű, így

$$|\forall x P(x) \wedge \neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = |\forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} \wedge |\neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = h,$$

2. vagy i igazságértékű, de ekkor κ minden x-variánsa, tehát maga κ mellett is $|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, így $|\neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = h$, ezek szerint most is

$$|\forall x P(x) \wedge \neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = |\forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} \wedge |\neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = h.$$

3.31. DEFINÍCIÓ. Az elsőrendű logikai nyelv egy A formulája **logikai törvény**, ha a nyelv minden $\mathcal{I}$ interpretációjában és $\mathcal{I}$ minden κ változókiértékelése mellett $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = i$.
Jelölése: $\models A$.

3.32. PÉLDA.

(a) A $P(x) \supset \forall x P(x)$ formula bár kielégíthető, de nem logikai törvény, mert például az $\mathcal{I}'$ interpretációban egy olyan κ változókiértékelés mellett, amelyben $\kappa(x) = \mathbf{a}$, $|P(x)|^{\mathcal{I}',\kappa} = i$, de $|\forall x P(x)|^{\mathcal{I}',\kappa} = h$, mivel a $\kappa^*(x) = \mathbf{c}$ változókiértékelés mellett $|P(x)|^{\mathcal{I}',\kappa^*} = h$. Ezért

$$|P(x) \supset \forall x P(x)|^{\mathcal{I}',\kappa} = |P(x)|^{\mathcal{I}',\kappa} \supset |\forall x P(x)|^{\mathcal{I}',\kappa} = h.$$

(b) Alább pedig azt bizonyítjuk be, hogy a $\forall x P(x) \supset P(x)$ formula viszont logikai törvény. Rögzítsünk tetszőlegesen egy $\mathcal{I}$ interpretációt és egy κ változókiértékelést. Két eset lehetséges:

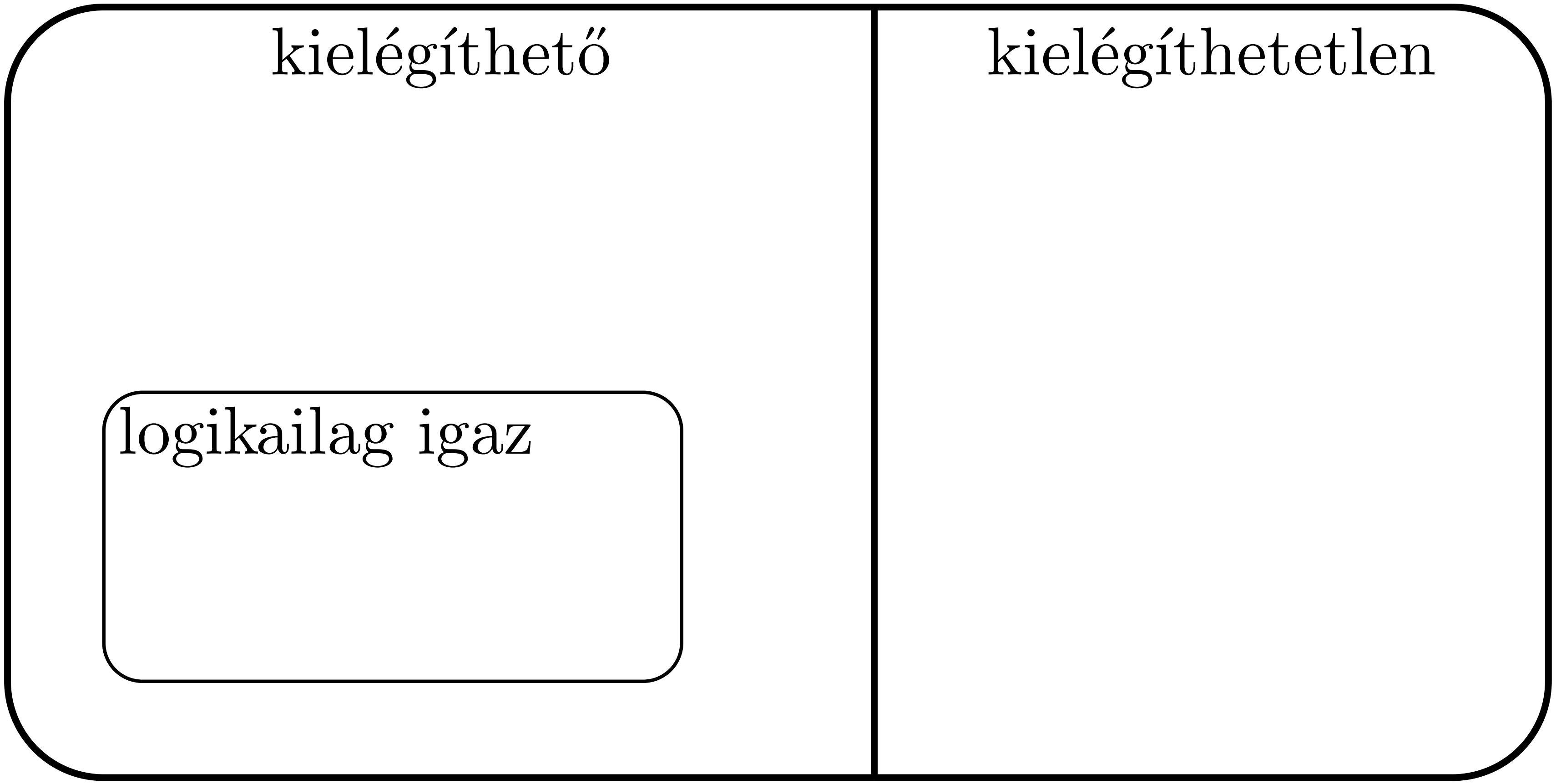
1. Ha $\mathcal{I}$ kielégíti a $\forall x P(x)$-et, akkor $\mathcal{I}$ minden változókiértékelése mellett, tehát κ mellett is $|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, azaz

$$|\forall x P(x) \supset P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = |\forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} \supset |P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = i.$$

2. Ha pedig $\mathcal{I}$ nem elégíti ki a $\forall x P(x)$-et, azaz $|\forall x P(x)|^{\mathcal{I}} = h$, akkor szintén

$$|\forall x P(x) \supset P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = |\forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} \supset |P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = i.$$

Hasonlóan az ítéletlogikához, egy elsőrendű logikai nyelv formuláit is osztályozhatjuk szemantikai tulajdonságuk alapján:



Az ítéletlogikában használtuk a prímformula fogalmát. A prímformulákból a $\neg, \wedge, \vee, \supset$ logikai összekötőjelek segítségével minden ítéletlogikai formulát fel tudtunk építeni. Egy elsőrendű logikai nyelvben is vannak ilyen formulák: a nyelv atomi formulái és a kvantált formulák. Ezek a formulák az **elsőrendű logikai nyelv prímformulái**.

3.33. PÉLDA. A harmadik példanyelvben prímformulák:

$$P(x), Q(y, \tilde{x}), \exists \tilde{x} Q(y, \tilde{x}), \forall x \neg \exists \tilde{x} Q(y, \tilde{x}), \ldots$$

3.34. DEFINÍCIÓ. Egy formula azon részformuláit, amelyek prímformulák és amelyekből a formula csupán a $\neg, \wedge, \vee, \supset$ logikai összekötőjelek segítségével felépíthető, a formula **prímkomponenseinek** nevezzük.

3.35. PÉLDA.

- A $\forall x \neg \exists \tilde{x} Q(x, \tilde{x})$ formula egyetlen prímkomponense önmaga.
- A $\neg \exists \tilde{x}(Q(x, \tilde{x}) \vee R(\tilde{x}, \tilde{x})) \supset Q(x, \tilde{x})$ prímkomponensei a $\exists \tilde{x}(Q(x, \tilde{x}) \vee R(\tilde{x}, \tilde{x}))$ és a $Q(x, \tilde{x})$ formulák.

Legyenek az A formula prímkomponensei $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ha a különböző prímkomponenseket ítéletváltozóknak tekintenénk, az így kapott ítéletlogikai formulához megadhatnánk az igazságtáblát. Az elsőrendű formulához így megkonstruált táblázatot *Quine-féle táblázatnak* hívjuk.

- Ebben a táblázatban a sorokban szereplő igazságértékekről azonban nem tudhatjuk, hogy van-e egyáltalán olyan interpretáció és az interpretációban olyan változókiértékelés, ami mellett a prímkomponensek igazságértékei rendre ezek lennének.
- Az viszont nyilvánvaló, hogy minden interpretáció és minden változókiértékelés esetén a prímkomponensek igazságértékei a Quine-táblázat valamelyik sorában a prímkomponensekhez tartozó oszlopban rendre megtalálhatók.

3.36. PÉLDA. A $\neg\exists x \neg P(x) \supset \forall x P(x)$ formula prímkomponensei $\exists x \neg P(x)$ és $\forall x P(x)$. A formula Quine-féle táblázata a következő:

$\exists x \neg P(x)$	$\forall x P(x)$	$\neg\exists x \neg P(x) \supset \forall x P(x)$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Jellemezzük most a Quine-táblázat segítségével az elsőrendű formulákat.

3.37. DEFINÍCIÓ. Az elsőrendű logikai nyelv egy A formulája **tautologikusan igaz** (tautológia), ha a formula Quine-táblázatában A oszlopában csupa i igazságérték található. Jelölése: $\models_0 A$.

3.38. LEMMA. *Ha az A elsőrendű formula tautologikusan igaz (tautológia), akkor elsőrendű logikai törvény, azaz ha $\models_0 A$, akkor $\models A$.*

Egy formula Quine-táblázatában lehetnek olyan sorok is, melyekben szereplő igazságértékeket az egyes oszlopokhoz tartozó prímkomponensek egyszerre egyetlen interpretációban egyetlen változókiértékelés mellett sem vehetik fel. Az ilyen formula bár nem tautológia, elsőrendű logikai törvény még lehet.

3.39. PÉLDA.

(a) A $(\exists x P(x) \supset \forall x P(x)) \supset \neg\exists x P(x) \vee \forall x P(x)$ formula prímkomponensei $\exists x P(x)$ és $\forall x P(x)$. A formula Quine-féle táblázata a következő:

$\exists x P(x)$	$\forall x P(x)$	$(\exists x P(x) \supset \forall x P(x)) \supset \neg\exists x P(x) \vee \forall x P(x)$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	i

A formula oszlopában csupa i igazságérték található, tehát a formula tautologikusan igaz, azaz logikai törvény.

(b) Láttuk, hogy a $\neg\exists x\neg P(x) \supset \forall x P(x)$ nem tautologikusan igaz formula, pedig logikai törvény. Egy tetszőlegesen rögzített $\mathcal{I}$ interpretációban ugyanis

1. vagy $|\neg\exists x\neg P(x)|^{\mathcal{I}} = h$, így $|\neg\exists x\neg P(x) \supset \forall x P(x)|^{\mathcal{I}} = i$,
2. vagy $|\neg\exists x\neg P(x)|^{\mathcal{I}} = i$, ekkor viszont $|\exists x\neg P(x)|^{\mathcal{I}} = h$. Ez pedig azt jelenti, hogy minden κ változókiértékelés mellett $|\neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = h$, azaz $|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, tehát $|\forall x P(x)|^{\mathcal{I}} = i$. Így viszont ebben az esetben is $|\neg\exists x\neg P(x) \supset \forall x P(x)|^{\mathcal{I}} = i$,

tehát a $\neg\exists x\neg P(x) \supset \forall x P(x)$ formula logikai törvény.

3.40. TÉTEL. *Legyenek A, B és C elsőrendű logikai formulák, ekkor a következő formulák elsőrendű logikai törvények:*

bővítés előtaggal	$\models A \supset (B \supset A)$
implikációlánc-törvény	$\models (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
	$\models A \supset (B \supset A \wedge B)$
	$\models A \wedge B \supset A$ *és* $\models A \wedge B \supset B$
	$\models (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$
	$\models A \supset A \vee B$ *és* $\models B \supset A \vee B$
reductio ad absurdum	$\models (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
a kétszeres tagadás törvénye	$\models \neg\neg A \supset A$
a kizárt harmadik törvénye	$\models A \vee \neg A$
ellentmondás törvénye	$\models \neg(A \wedge \neg A)$
az azonosság törvénye	$\models A \supset A$
tranzitivitás	$\models (A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset (A \supset C)$
ellentmondásból bármi következik	$\models A \supset (\neg A \supset B)$
Peirce-törvény	$\models ((A \supset B) \supset A) \supset A$

3.41. TÉTEL. *Legyenek A és B az $\mathcal{L}$ nyelv tetszőleges formulái. Ekkor*

$$\models \forall x A \lor \forall x B \supset \forall x (A \lor B)$$

$$\models \exists x (A \land B) \supset \exists x A \land \exists x B$$

$$\models \exists y \forall x A \supset \forall x \exists y A$$

3.42. DEFINÍCIÓ. Legyenek A és B az $\mathcal{L}$ nyelv tetszőleges formulái. Azt mondjuk, hogy az A és a B elsőrendű formulák **logikailag ekvivalensek**, és ezt a tényt úgy jelöljük, hogy $A \sim B$, ha minden $\mathcal{I}$ interpretációban és κ változókiértékelés mellett $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = |B|^{\mathcal{I},\kappa}$.

3.43. PÉLDA.

(a) A $\neg\forall x P(x)$ és a $\exists x \neg P(x)$ formulák ekvivalensek, ugyanis tetszőlegesen rögzített $\mathcal{I}$ interpretációban és κ változókiértékelés mellett ha

1. $|\neg\forall x P(x)|^{\mathcal{I}} = i$, akkor $|\forall x P(x)|^{\mathcal{I}} = h$, azaz van κ-nak olyan κ^* x-variánsa, hogy $|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa^*} = h$, tehát $|\neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i$, azaz $|\exists x \neg P(x)|^{\mathcal{I}} = i$.
2. $|\neg\forall x P(x)|^{\mathcal{I}} = h$, akkor $|\forall x P(x)|^{\mathcal{I}} = i$, azaz κ-nak minden κ^* x-variánsa olyan, hogy $|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i$, tehát $|\neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa^*} = h$, azaz $|\exists x \neg P(x)|^{\mathcal{I}} = h$.

(b) A $\forall x \exists y Q(x,y)$ formula viszont nem ekvivalens a $\exists y \forall x Q(x,y)$ formulával. Vizsgáljuk meg a formulákat az $\mathcal{I}'$ interpretációban.

1. $|\forall x \exists y Q(x,y)|^{\mathcal{I}'} = i$, mert „mindhárom" x-variáns változókiértékeléshez van olyan y-variáns változókiértékelés, hogy mellette $Q(x,y)$ i igazságértékű. Legyen ugyanis κ_1 olyan, hogy $\kappa_1(x) = \mathbf{a}$, $\kappa_1(y) = \mathbf{a}$, κ_2 olyan, hogy $\kappa_2(x) = \mathbf{b}$, $\kappa_2(y) = \mathbf{b}$ és κ_3 olyan, hogy $\kappa_3(x) = \mathbf{c}$, $\kappa_3(y) = \mathbf{a}$. Ekkor
$$|Q(x,y)|^{\mathcal{I}',\kappa_1} = |Q(x,y)|^{\mathcal{I}',\kappa_2} = |Q(x,y)|^{\mathcal{I}',\kappa_3} = i.$$
2. $|\exists y \forall x Q(x,y)|^{\mathcal{I}'} = h$, mert „mindhárom" y-variáns változókiértékeléshez van olyan x-variáns változókiértékelés, hogy mellette $Q(x,y)$ h igazságértékű. Legyen ugyanis κ_1 olyan, hogy $\kappa_1(y) = \mathbf{a}$, $\kappa_1(x) = \mathbf{b}$, κ_2 olyan, hogy $\kappa_2(y) = \mathbf{b}$, $\kappa_2(x) = \mathbf{a}$ és κ_3 olyan, hogy $\kappa_3(y) = \mathbf{c}$, $\kappa_3(x) = \mathbf{a}$. Ekkor
$$|Q(x,y)|^{\mathcal{I}',\kappa_1} = |Q(x,y)|^{\mathcal{I}',\kappa_2} = |Q(x,y)|^{\mathcal{I}',\kappa_3} = h.$$

Legyenek A és B elsőrendű formulák.

3.44. LEMMA. *$A \sim B$ pontosan akkor, ha $\models (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.*

3.45. TÉTEL. *Ha $A \approx B$, akkor $A \sim B$.*

3.46. TÉTEL. *Ha A olyan formula, hogy $x \notin \mathrm{Par}(A)$, akkor*

$$\forall x A \sim A \quad \textit{és} \quad \exists x A \sim A.$$

3.47. TÉTEL.

$$\forall x \forall y A \sim \forall y \forall x A \quad \textit{és} \quad \exists x \exists y A \sim \exists y \exists x A.$$

3.48. TÉTEL. (KVANTOROK KÉTOLDALI KIEMELÉSE.)

$$\forall x A \wedge \forall x B \sim \forall x (A \wedge B) \textit{ és } \exists x A \vee \exists x B \sim \exists x (A \vee B).$$

3.49. tétel. (De Morgan kvantoros törvényei.)

$$\neg\exists xA \sim \forall x\neg A \quad \text{\textit{és}} \quad \neg\forall xA \sim \exists x\neg A.$$

3.50. tétel. (Kvantorok egyoldali kiemelése.)

Ha $x \notin \mathrm{Par}(A)$, *akkor*

$$\begin{array}{ll} A \wedge \forall xB \sim \forall x(A \wedge B) & A \wedge \exists xB \sim \exists x(A \wedge B) \\ A \vee \forall xB \sim \forall x(A \vee B) & A \vee \exists xB \sim \exists x(A \vee B) \\ A \supset \forall xB \sim \forall x(A \supset B) & A \supset \exists xB \sim \exists x(A \supset B) \\ \forall xB \supset A \sim \exists x(B \supset A) & \exists xB \supset A \sim \forall x(B \supset A) \end{array}$$

3.3.1. Formulák prenex alakja

Egy $Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_nA$ $(n \geq 0)$ alakú formulát, ahol a A kvantormentes formula, **prenex alakú formulá**nak nevezünk.

Példa.
A $\forall x\forall y(P(x,y) \supset \neg Q(x))$, a $\exists x\forall y(P(x,y) \vee R(x,z))$, a $\neg P(x,x)$ formulák prenexformulák, viszont a $\forall x\forall yP(x,y) \supset \neg Q(x)$ formula nem prenexformula.

Lemma.
Egy elsőrendű logikai nyelv tetszőleges formulájához konstruálható vele logikailag ekvivalens prenex alakú formula.

A konstrukció lépései:

1. változó-tiszta alakra hozzuk a formulát;
2. alkalmazzuk De Morgan kvantoros és az egyoldali kvantorkiemelésre vonatkozó logikai törvényeket.

Példa.

$$\forall x P(x) \supset \neg \exists x Q(x)$$

$\downarrow$ változó-tiszta alakra hozás

$$\forall x P(x) \supset \neg \exists y Q(y)$$

$\downarrow$ egyoldali kvantorkiemelés

$$\forall x P(x) \supset \forall y \neg Q(y)$$

$$\exists x (P(x) \supset \forall y \neg Q(y))$$

$$\exists x \forall y (P(x) \supset \neg Q(y))$$

3.4. Szemantikus következményfogalom

3.51. DEFINÍCIÓ. Legyen Γ egy elsőrendű nyelv formuláinak halmaza és B formula.
B *logikai következménye* a Γ formulahalmaznak (vagy a Γ-beli formuláknak), ha a nyelv minden olyan interpretációja és változókiértékelése, amely kielégít minden Γ-beli formulát, az kielégíti a B formulát is.
Jelölése: $\Gamma \models B$.

3.52. PÉLDA.

(a) A $\{P(c), \forall x(P(x) \supset \exists\tilde{x}Q(x,\tilde{x}))\}$ formulahalmaznak logikai következménye a $\exists\tilde{x}Q(c,\tilde{x})$ formula. Ugyanis ha $\mathcal{I}$ egy olyan interpretáció, hogy

$$|P(c)|^{\mathcal{I}} = i \text{ és } |\forall x(P(x) \supset \exists\tilde{x}Q(x,\tilde{x}))|^{\mathcal{I}} = i,$$

akkor bármely x-variáns κ mellett $|P(x) \supset \exists\tilde{x}Q(x,\tilde{x})|^{\mathcal{I},\kappa} = i$. Legyen $\kappa(x) = |c|^{\mathcal{I}}$. De

$$|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = |P(c)|^{\mathcal{I}} \text{ és } |\exists\tilde{x}Q(x,\tilde{x})|^{\mathcal{I},\kappa} = |\exists\tilde{x}Q(c,\tilde{x})|^{\mathcal{I}},$$

így világos, hogy $|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = i$ miatt $|\exists\tilde{x}Q(x,\tilde{x})|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, tehát $|\exists\tilde{x}Q(c,\tilde{x})|^{\mathcal{I}} = i$.

(b) A $\exists x\forall\tilde{x}R(f(x,\tilde{x}),\tilde{x})$ formulának nem logikai következménye a $\forall\tilde{x}R(\tilde{x},\tilde{x})$ formula, hisz az $\mathcal{I}^{p_1}$ interpretációban a $\exists x\forall\tilde{x}R(f(x,\tilde{x}),\tilde{x})$ formula i, de a $\forall\tilde{x}R(\tilde{x},\tilde{x})$ formula h igazságértékű.

3.53. TÉTEL. *Legyenek* $A_1, A_2, \ldots, A_n, B \quad (n \geq 1)$ *az elsőrendű formulák.* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models B$ *pontosan akkor, ha*

1. *az* $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ *formula kielégíthetetlen.*
2. *az* $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$ *formula logikai törvény.*

3.54. DEFINÍCIÓ. Legyen Γ egy elsőrendű nyelv formuláinak véges halmaza és B tetszőleges formulája. Azt mondjuk, hogy B *tautologikus következménye* Γ-nak, ha a Γ formulahalmaz és B közös Quine-táblázatában azon sorokban, ahol minden Γ-beli formula alatt i igazságérték található, B oszlopában is csupa i igazságérték van. Jelölése: a $\Gamma \models_0 B$.

3.55. LEMMA.
Ha $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models_0 B$*, akkor* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models B$*.*

3.56. PÉLDA.

1. A $\{\forall x \exists \tilde{x} Q(x, \tilde{x}) \supset \forall x P(x), \neg \forall x P(x)\}$ formulahalmaznak tautologikus következménye a $\neg \forall x \exists \tilde{x} Q(x, \tilde{x})$ formula:

$\forall x \exists \tilde{x} Q(x, \tilde{x})$	$\forall x P(x)$	$\forall x \exists \tilde{x} Q(x, \tilde{x}) \supset \forall x P(x)$	$\neg \forall x P(x)$	$\neg \forall x \exists \tilde{x} Q(x, \tilde{x})$
i	i	i	h	h
i	h	h	i	h
h	i	i	h	i
h	h	i	i	i

2. Az 3.52. (a) példájában pedig a következményformula nem tautologikus következménye a feltételformulák halmazának.

3.57. TÉTEL. *Legyenek A, B és C tetszőleges elsőrendű logikai formulák. Az alábbiakban felsorolt elsőrendű következtetésformák helyesek:*

a leválasztási szabály vagy modus ponens	$(\{A \supset B, A\}, B)$
a kontrapozíció vagy modus tollens	$(\{A \supset B, \neg B\}, \neg A)$
reductio ad absurdum	$(\{A \supset B, A \supset \neg B\}, \neg A)$
az indirekt bizonyítás	$(\{\neg A \supset B, \neg A \supset \neg B\}, A)$
feltételes szillogizmus	$(\{A \supset B, B \supset C\}, A \supset C)$
következtetés esetszétválasztással	$(\{A \vee B, A \supset C, B \supset C\}, C)$
modus tollendo ponens	$(\{A \vee B, \neg A\}, B)$
az $\supset$-ra vonatkozó következtetésforma	$(\{B\}, A \supset B)$
a $\neg\neg$-re vonatkozó következtetésformák	$(\{\neg\neg A\}, A)$ *és* $(\{A\}, \neg\neg A)$

a $\vee$-ra vonatkozó következtetésformák $(\{A\}, A \vee B)$ *és* $(\{B\}, A \vee B)$

az $\wedge$-re vonatkozó következtetésformák $(\{A, B\}, A \wedge B)$

$(\{A \wedge B\}, A)$ *és* $(\{A \wedge B\}, B)$

Természetesen vannak olyan elsőrendű következtetésformák is, amely következtetésformákban a formulahalmaznak logikai (de nem tautologikus) következménye a formula.

az univerzális kvantor elhagyása $(\{\forall x A\}, [A(x \parallel t)])$

az egzisztenciális kvantor bevezetése $(\{[A(x \parallel t)]\}, \exists x A)$

szillogizmusok

$(\{\forall x(A \supset B), \forall x(B \supset C\}, \forall x(A \supset C))$

$(\{\exists x(A \wedge B), \forall x(B \supset C)\}, \exists x(A \wedge C))$

4. fejezet

A szekventkalkulus

A szekvent

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m,\ (n, m \geq 0)$ egy elsőrendű nyelv formulái. Ekkor a

$$\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m \vee \bot$$

formulát **szekvent**nek nevezzük.
Jelölése:
$A_1, A_2, \ldots, A_n \to B_1, B_2, \ldots, B_m$, vagy rövidebben: $\Gamma \to \Delta$, ahol $\Gamma \rightleftharpoons \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ és $\Delta \rightleftharpoons \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$.

A kalkulus axiómasémái és levezetési szabályai

$$A\Gamma \to \Delta A$$

$$\bot\Gamma \to \Delta$$

$$\Gamma \to \Delta\top$$

$$(\wedge\to)\quad \frac{AB\Gamma\to\Delta}{(A\wedge B)\Gamma\to\Delta} \qquad (\to\wedge)\quad \frac{\Gamma\to\Delta A;\Gamma\to\Delta B}{\Gamma\to\Delta(A\wedge B)}$$

$$(\vee\to)\quad \frac{A\Gamma\to\Delta;B\Gamma\to\Delta}{(A\vee B)\Gamma\to\Delta} \qquad (\to\vee)\quad \frac{\Gamma\to\Delta AB}{\Gamma\to\Delta(A\vee B)}$$

$$(\supset\to)\quad \frac{\Gamma\to\Delta A;B\Gamma\to\Delta}{(A\supset B)\Gamma\to\Delta} \qquad (\to\supset)\quad \frac{A\Gamma\to\Delta B}{\Gamma\to\Delta(A\supset B)}$$

$$(\neg\to)\quad \frac{\Gamma\to\Delta A}{\neg A\Gamma\to\Delta} \qquad (\to\neg)\quad \frac{A\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta\neg A}$$

$$(\forall\to)\quad \frac{A(x||t)\forall xA\Gamma\to\Delta}{\forall xA\Gamma\to\Delta} \qquad (\to\forall)\quad \frac{\Gamma\to\Delta A(x||y)}{\Gamma\to\Delta\forall xA}$$

$$(\exists\to)\quad \frac{A(x||y)\Gamma\to\Delta}{\exists xA\Gamma\to\Delta} \qquad (\to\exists)\quad \frac{\Gamma\to\Delta A(x||t)\exists xA}{\Gamma\to\Delta\exists xA}$$

Egy szekventet a kalkulusban **levezethető**nek nevezünk, ha

- vagy axióma,
- vagy van olyan levezetési szabály, melyben ez vonal alatti szekvent és a vonal feletti szekvent vagy szekventek pedig levezethetőek.

(a) A kalkulus **helyes**, mert ha az
$A_1, A_2, \dots, A_n \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_m$ szekvent levezethető a kalkulusban, akkor a
$\top \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \supset B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m \vee \perp$ formula logikai törvény.

(b) A kalkulus **teljes**, mert ha az
A formula logikai törvény, akkor a
$\rightarrow A$ szekvent levezethető a kalkulusban.

Irodalomjegyzék

[1] Dragálin Albert, Buzási Szvetlána: Bevezetés a matematikai logikába, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 1986.

[2] Pásztorné Varga Katalin, Várterész Magda: A matematikai logika alkalmazás-szemléletű tárgyalása, Panem Kiadó, Budapest, 2003.

[3] Szendrei Ágnes: Diszkrét matematika, Polygon Kiadó, Szeged, 1994.