Beugró: pont, Össz.:	pont, Gyak.: +	pont; **Vizsga:**	**pont.**	**Vizsgajegy:**	**1 2 3 4 5**

Kalkulus 2 vizsgadolgozat (minta)

NÉV: ....

Az alábbi feladatok összpontszáma 50, megoldási idő 120 perc. Tankönyv, jegyzet nem használható.

Értékelés: Ha a beugró kérdések összpontszáma 5-nél kisebb, a vizsgajegy elégtelen. Ha a beugró rész összpontszáma legalább 5 (a megszerezhető 10 pontból), a dolgozat összpontszáma (ami első alkalommal tartalmazza a gyakorlati eredményért kapott többletpontokat is) alapján a vizsgajegy a következőképpen alakul.

5	—	24	pont	...	1
25	—	30	pont	...	2
31	—	37	pont	...	3
38	—	44	pont	...	4
45	—	50 (+)	pont	...	5

Beugró kérdések

1. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ és $P = \{\, x_j \mid j = 0, 1, ..., n \,\}$. Mit értünk egy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvénynek a P beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összegén illetve felső Darboux-integrálján? Mikor nevezzük az f függvényt Riemann-integrálhatónak? *(3+1+1=5 pont)*

2. Legyen $k \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz, $x_0 \in D$ és $u \in \mathbb{R}^k$ (úgy, hogy $\|u\| = 1$). Mit értünk egy $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény x_0 pontban tekintett u irány menti deriváltján? *(2 pont)*

3. Fogalmazza meg a Newton–Leibniz-formulát tartalmazó tételt! *(3 pont, bizonyítás + 3 pont)*

További elméleti kérdések

4. Tegyük fel, hogy $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható és legyen

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in [a,b]).$$

Mit állíthatunk ilyen feltételek mellett a F függvényről? Milyen elegendő feltétel mellett állíthatjuk, hogy F differenciálható valamely $x_0 \in [a,b]$ pontban és ekkor mivel egyenlő a $F'(x_0)$ differenciálhányados? *(1+1+2=4 pont)*

5. Írja fel az elsőrendű inhomogén illetve homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakját! Milyen kapcsolatot állapíthatunk meg ezeknek a differenciálegyenleteknek a megoldásai között? *(3+2=5 pont)*

6. Fogalmazza meg (és ha tudja, igazolja) a helyettesítéses integrálás tételét Riemann-integrálra! *(3 pont, bizonyítás + 3 pont)*

7. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ konvex, nyílt halmaz, $x = (x_1\,,\, x_2) \in D$ és $u = (u_1\,,\, u_2) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy $x + u \in D$, valamint $f\colon D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható. Milyen összefüggést írhatunk fel a Taylor-tétel szerint $f(x+u)$ értéke és az $f(x)$, $D_1 f(x)$, $D_2 f(x)$ értékek között, a másodrendű (tiszta illetve vegyes) parciális deriváltak valamely közbeeső pontbeli értékei segítségével? *(3 pont)*

Feladatok

8. Oldja meg az

$$(x^2-1)y'(x) + 2x\big(y(x)\big)^2 = 0\,,\ \ y(0) = 1$$

kezdetiérték-feladatot! *(4 pont)*

9. Határozza meg az alábbi differenciálegyenletek megoldásait:
(a) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0$
(b) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = e^{4x}$ *(3+2=5 pont)*

10. Határozza meg az alábbi integrálok értékét:

$$\int_0^3 \int_0^1 x\,dy\,dx\,, \quad \int_0^3 \int_0^x x\,dy\,dx\,, \quad \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} x\,dy\,dx\,.$$

(2+2+3=7 pont)

11. Legyen $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)\,.$
(a) Meghatározandók f lokális maximum- és minimum-helyei, nyeregpontjai.
(b) Határozza meg $f(x,y)$ feltételes minimumát (és minimum-helyét) az $x > 0$, $y > 0$, $xy = 1$ feltételre nézve!

(4+3=7 pont)

12. Tekintsük azt az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f(x,y) = \begin{cases} y(x^2+1)\,, & \text{ha } \ x \neq 0\,, \\ y^2\,, & \text{ha } \ x = 0\,. \end{cases}$$

Igazolja, hogy az f függvénynek nem létezik határértéke a $(0,2)$ pontban! *(2 pont)*