Beugró rész: pont,	**Vizsgadolgozat összesen:** **pont.**	**Vizsgajegy: 1 2 3 4 5**

Kalkulus 1 vizsgadolgozat (minta)

NÉV: ....

Az alábbi feladatok összpontszáma 50, megoldási idő 120 perc. Tankönyv, jegyzet nem használható.

Értékelés: Ha a beugró kérdések összpontszáma 5-nél kisebb, a vizsgajegy elégtelen. Ha a beugró rész összpontszáma legalább 5 (a megszerezhető 10 pontból), a dolgozat összpontszáma alapján a vizsgajegy a következőképpen alakul.

5	—	24	pont	...	1
25	—	30	pont	...	2
31	—	37	pont	...	3
38	—	44	pont	...	4
45	—	50 (+)	pont	...	5

Beugró kérdések

1. Legyen (x_n) egy valós számsorozat és $y \in \mathbb{R}$ (valós szám)!
(a) Mit értünk azon, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$ (azaz x_n konvergál y-hoz)?
(b) Mit értünk azon, hogy az (x_n) sorozat konvergens?
Ismertesse a megfelelő definíció(ka)t! A két, összetartozó fogalmat egy definícióban vagy külön-külön (egyikben a másikra hivatkozva) is értelmezheti. *(3+1=4 pont)*

2. Legyen $f\colon\,]a\,,b[\,\to \mathbb{R}$ és $A \in \mathbb{R}$. Mit értünk azon, hogy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ (azaz A a f függvény határértéke a a pontban)? Ismertesse a megfelelő definíciót! *(3 pont)*

3. Fogalmazza meg a (valamely pontban) differenciálható függvények hányadosának differenciálhatóságára és a hányados deriváltjának kiszámítására vonatkozó tételt!
(3 pont, bizonyítás + 3 pont)

További elméleti kérdések

4. **(a)** Hogyan értelmezzük egy valós szám abszolút értékét?
(b) Ismertesse az abszolút értékkel kapcsolatos nevezetes (összeg, szorzat, reciprok abszolút értékére illetve abszolút értékek különbségére vonatkozó) azonosságokat illetve egyenlőtlenségeket! *(2+4=6 pont)*

5. Mit értünk azon hogy a $\sum a_n$ valós számsor konvergens illetve abszolút konvergens? Ismertesse a két definíciót, majd fogalmazza meg a két fogalom logikai kapcsolatát leíró tételt! *(3+1+1=5 pont, bizonyítás + 2 pont)*

6. Fogalmazza meg (és ha tudja, igazolja) a Cauchy–Hadamard-tételt! *(4 pont, bizonyítás + 4 pont)*

Feladatok

7. Legyen $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = [0, 2]$, $C = [-1, 1]$, $D = [0, 4]$ és $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Határozzuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $f(A)$, $f(B)$, $f(A \cup B)$, $f(A \cap B)$, $f(A) \cup f(B)$, $f(A) \cap f(B)$, $C \cup D$, $C \cap D$, $D \setminus C$, $f^{-1}(C)$, $f^{-1}(D)$, $f^{-1}(C \cup D)$, $f^{-1}(C \cap D)$, $f^{-1}(D \setminus C)$, $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ és $f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(C)$ halmazokat! Találunk-e közöttük megegyezőket? *(4 pont)*

8. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékeit:

$$a_n = \frac{7^{n+1} - 3^{2n}}{3^{2n+1} + 2^{3n+5}}, \qquad b_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n+1}, \qquad c_n = \sqrt{n^2 + 5n + 3} - \sqrt{n^2 + n + 2}.$$

(2+2+3=7 pont)

9. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-3)^n}{2^{2n+1}}$ sor összegét! *(2 pont)*

10. Konvergens-e a $\displaystyle\sum \frac{n^3}{3^n}$ számsor? *(2 pont)*

11. Határozza meg a $\displaystyle\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$ határértéket! *(2 pont)*

12. Legyen

$$h(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) \qquad (-1 < x < 1),$$
$$g(x) = \sqrt{1 - \operatorname{th}(x^2)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Meghatározandók a h' és g' deriváltfüggvények. *(2+2=4 pont)*

13. Legyen

$$f(x) = x^3 e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Végezzük el az f függvény teljes vizsgálatát a következő szempontok szerint: zérushelyek (illetve előjelek); határértékek ($+\infty$-ben, $-\infty$-ben); az első és második derivált meghatározása; a függvény monoton szakaszainak és lokális szélsőérték-helyeinek meghatározása; a függvény konvex/konkáv szakaszainak és inflexiós helyeinek meghatározása; vázlatos ábrázolás; az érték-készlet meghatározása. *(4 pont)*