Gyakorló feladatok az első zárthelyi dolgozathoz

1. A valós számok axiómarendszere

1. Mutassuk meg, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

   (a) $n + m \in \mathbb{N}$

   (b) $n \cdot m \in \mathbb{N}$.

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges $k, l \in \mathbb{Z}$ esetén

   (a) $k + l \in \mathbb{Z}$

   (b) $k - l \in \mathbb{Z}$

   (c) $k \cdot l \in \mathbb{Z}$

3. Bizonyítsuk be, hogy minden $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén

   (a) $p + q \in \mathbb{Q}$

   (b) $p - q \in \mathbb{Q}$

   (c) $p \cdot q \in \mathbb{Q}$

   (d) $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, feltéve, hogy $q \neq 0$.

4. Igazoljuk, hogy ha $r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor

   (a) $r + x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

   (b) $r - x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

   (c) $r \cdot x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, feltéve, hogy $r \neq 0$

   (d) $\frac{r}{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, feltéve, hogy $r \neq 0$.

2. Teljes indukció

1. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 3 \cdot 5^n = \frac{3}{4}\left(5^{n+1} - 1\right).$$

2. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

3. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(2n + 1)(2n + 3)}{3}.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}.$$

5. Mutassuk meg, hogy az
$$n^3 - n$$
kifejezés minden $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén osztható hattal.

6. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az
$$n^5 - n$$
kifejezés osztható öttel.

7. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ esetén
$$n^2 \geq 2n + 1.$$

8. Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n(n + 1)$ páros szám.

9. Mutassuk meg, hogy minden $n > 4$ esetén
$$2^n > n^2.$$

10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$$

3. Sorozatok

1. Vizsgáljuk meg korlátosság, monotonitás és konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat.

(a)
$$\left(11 \cdot 2^n - 36\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\frac{88}{\sqrt{n+1}} - 7\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left((-1)^n n^2 + 3\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(3(n!)^2 - 26\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(10 - \frac{2}{\sqrt{n+5}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(n^2 - 2n + 10\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

2. Adjunk meg olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós divergens sorozatot, melyre az $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens.

3. Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens sorozatok.
   (a) Igaz–e, hogy az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is divergens?
   (b) Igaz–e, hogy az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens?
   (c) Igaz–e, hogy az $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens?
   (d) Igaz–e, hogy az $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens?

4. Adjunk példát olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra, melyekre
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$
úgy, hogy
   (a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$;
   (b) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$;
   (c) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = c$, ahol c egy előre rögzített valós szám.
   (d) az előző esetek egyike sem teljesül.

5. Adjunk példát olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra, melyekre
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$
úgy, hogy
   (a) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = +\infty$;
   (b) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = -\infty$;
   (c) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = c$, ahol c egy előre rögzített valós szám;
   (d) az $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos és divergens;
   (e) az $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos és divergens.

6. Adjunk példát olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra, melyekre
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$
úgy, hogy
   (a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = +\infty$;
   (b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = -\infty$;
   (c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = c$, ahol c egy előre rögzített valós szám;
   (d) a fentiek egyike sem teljesül.

7. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

(a)
$$\left(\frac{5n^2 + 3n + 2}{-n^2 - n - 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\frac{3n^3 + 5n^2 + 3n}{7n^4 + 8}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(\frac{2n^2+3n+2}{-n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\frac{-5n^3+7n+1}{-n^2-n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\frac{-5n^2+3n+1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(\frac{2n^2+3n+2}{5n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\frac{-2n^2+5n+1}{3n^3+n^2+4n+4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\frac{-6n^4+3n^2+1}{4n^2+n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

8. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

(a)
$$\left(\frac{n^2-\sqrt{n^2+1}+1}{n^2-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\frac{\sqrt[3]{n^2-1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\frac{\sqrt{n^4+n^3}-n^2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\frac{(n+1)^2-n^2}{\sqrt{n^2+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i)
$$\left(\frac{\sqrt{n^4+n^3}-n^2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

9. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét.

(a)
$$\left(\sqrt{n+\pi}-\sqrt{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\sqrt{3n^2+4}-\sqrt{n^2+15}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\sqrt{n^2+13}-n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\sqrt{n^3+2}-n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+n^3}}-\sqrt{2}n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^2-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i)
$$\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+n^2}}-n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j)
$$\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

10. Számítsuk az az alábbi sorozatok határértékét.

(a)
$$\left(\frac{\sin^2(n)}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\frac{n+\cos(n)}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(\frac{n^2-\cos(n)}{n+\sin(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{2n+1}\cos(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\frac{n+\cos(n)}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(\frac{2n^2+n\cos(n)-1}{n^2-\sin(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g) $$\left(\frac{n\sin(n^2+1)}{n^2+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h) $$\left(\sqrt[n]{n^3+n^2+2n+11}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i) $$\left(\sqrt[n]{n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j) $$\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(k) $$\left(\sqrt[n-3]{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(l) $$\left(\sqrt[n]{3\cdot 11^n+20\cdot 5^n+19\cdot\pi^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(m) $$\left(\sqrt[2n]{10n^2+55}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(n) $$\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2+10n+7}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

11. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

(a) $$\left(\frac{(-1)^n+2^{2n}}{3^{n+1}+5^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b) $$\left(\frac{(-2)^n+20^{n-1}}{(-20)^{n+1}+2^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c) $$\left(\frac{2^n-3^n}{3^n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d) $$\left(2^{2n}-3\cdot 3^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e) $$\left(\frac{\pi^n+e^{n-1}}{2\pi^{n-2}+5e^{n+5}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f) $$\left(\frac{e^n-e^{2n}}{e^n+e^{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g) $$\left(\frac{e^{n+1}+\sin(n)}{e^n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

12. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határérétkét.

(a) $$\left(\left(1-\frac{5}{n}\right)^{3n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b) $$\left(\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^{11n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c) $$\left(\left(1-\frac{11}{n}\right)^{3n+8}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d) $$\left(\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{4n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e) $$\left(\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f) $$\left(\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g) $$\left(\left(1+\frac{5}{n+1}\right)^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h) $$\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{23n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i) $$\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n-2012}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j) $$\left(\left(1+\frac{e}{n}\right)^{en}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$