

## 2. beadandó program

### Köbös spline-interpoláció

Legyenek adottak az  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  alappontok és az  $f_0, f_1, \dots, f_n$ , illetve  $y_0$  és  $y_n$  értékek. Olyan  $S(x)$  kétszer folytonosan differenciálható függvényt keresünk, melyre

$$S(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (1)$$

és

$$S'(x_0) = y_0, \quad S'(x_n) = y_n, \quad (2)$$

teljesül, továbbá

$$S(x) = s_i(x), \quad \text{ha } x \in [x_i, x_{i+1}],$$

ahol  $s_i(x)$  legfeljebb harmadfokú polinom.

Adottak tehát az

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_{n-2}$	$x_{n-1}$	$x_n$
$S$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$\dots$	$f_{n-2}$	$f_{n-1}$	$f_n$
$S'$	$y_0$			$\dots$			$y_n$

adatok. Egészítsük ki a táblázatot az  $y_1, \dots, y_{n-1}$  ismeretlen mennyiségekkel:

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_{n-2}$	$x_{n-1}$	$x_n$
$S$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$\dots$	$f_{n-2}$	$f_{n-1}$	$f_n$
$S'$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_{n-2}$	$y_{n-1}$	$y_n$

Legyen  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ . Az (1) és (2) feltételekből levezethető, hogy az  $[x_i, x_{i+1}]$  intervallumon a polinom a következő alakú lesz:

$$s_i(x) = f_i + y_i(x - x_i) + \frac{1}{h_i}([x_i, x_{i+1}]f - y_i)(x - x_i)^2 + \frac{1}{h_i^2}(y_{i+1} - 2[x_i, x_{i+1}]f + y_i)(x - x_i)^2(x - x_{i+1}),$$

ahol az ismeretlen  $y_1, \dots, y_{n-1}$  paramétereket egy

$$Ay = c$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk, melynek  $A$  mátrixa tridiagonális:

$$\begin{pmatrix} 2(h_1 + h_0) & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_2 & 2(h_2 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_3 + h_2) & h_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-2} + h_{n-3}) & h_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_{n-2}) \end{pmatrix},$$

az egyenletrendszer jobb oldala:

$$c = \begin{pmatrix} 3(h_0[x_1, x_2]f + h_1[x_0, x_1]f) - h_1y_0 \\ 3(h_1[x_2, x_3]f + h_2[x_1, x_2]f) \\ 3(h_2[x_3, x_4]f + h_3[x_2, x_3]f) \\ \vdots \\ 3(h_{n-3}[x_{n-2}, x_{n-1}]f + h_{n-2}[x_{n-3}, x_{n-2}]f) \\ 3(h_{n-2}[x_{n-1}, x_n]f + h_{n-1}[x_{n-2}, x_{n-1}]f) - h_{n-2}y_n \end{pmatrix},$$

(tehát az első és utolsó komponens a többitől eltérő alakú), az  $y$  vektort pedig a kiszámítandó  $y_1, \dots, y_{n-1}$  értékek alkotják:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

### Az algoritmus:

Adottak az  $x_0, \dots, x_n$ ,  $f_0, \dots, f_n$  és  $y_0, y_n$  értékek, ezenkívül  $m$  darab szám:  $z_1, \dots, z_m$ .

**A feladat:** az  $x_0, \dots, x_n$ ,  $f_0, \dots, f_n$  és  $y_0, y_n$  adatokat felhasználva számítsuk ki az  $S(x)$  harmadfokú spline értékét a  $z_1, \dots, z_m$  pontokban. (Tehát nem a szakaszonként harmadfokú  $S(x)$  polinomot kell visszaadnia a programnak, hanem az  $S(z_1), \dots, S(z_m)$  értékeket).

**1.** Számítsuk ki a  $h_i = x_{i+1} - x_i$  mennyiségeket ( $i = 0, \dots, n-1$ ). Ha  $h_i \leq 0$  valamely  $i$ -re, akkor a feladat megoldása befejeződik **alappontok** hibaüzenettel.

Ha a  $z_j$  pontok valamelyike ( $j = 1, \dots, m$ ) kívül van az  $[x_0, x_n]$  intervallumon (azaz  $z_j < x_0$ , vagy  $z_j > x_n$ ), akkor a feladat megoldása befejeződik **z-ertekek** üzenettel.

**2.** Számítsuk ki az  $[x_i, x_{i+1}]f$  osztott differenciákat ( $i = 0, \dots, n-1$ ).

**3.** A tridiagonális algoritmussal oldjuk meg az  $Ay = c$  lineáris egyenletrendszert, ahol az  $(n-1) \times (n-1)$ -es  $A$  mátrix és az  $(n-1)$  komponensből álló  $c$  vektor az előzőekben adott.

**4.** Minden egyes  $j$ -re ( $j = 1, \dots, m$ ) határozzuk meg, hogy a  $z_j$  érték melyik  $[x_i, x_{i+1}]$  intervallumba esik. Ha meghatároztuk  $i$  értékét, akkor tudjuk, hogy  $S(z_j) = s_i(z_j)$ . Számítsuk ki az  $s_i(z_j)$  értéket:

$$s_i(z_j) = f_i + y_i(z_j - x_i) + \frac{1}{h_i}([x_i, x_{i+1}]f - y_i)(z_j - x_i)^2 + \frac{1}{h_i^2}(y_{i+1} - 2[x_i, x_{i+1}]f + y_i)(z_j - x_i)^2(z_j - x_{i+1})$$

**5.** Írjuk ki az  $S(z_j)$  értékeket ( $j = 1, \dots, m$ ).

**Az input:**

Az első sorban a megoldandó feladatok száma:  $N$ . Ezt követi  $N \cdot 5$  sor, azaz minden megoldandó feladathoz 5 sor tartozik, a köv. módon:

$n \ m$

$x_0 \ \dots \ x_n$

$f_0 \ \dots \ f_n$

$y_0 \ y_n$

$z_1 \ \dots \ z_m$

ahol a használt jelölések megegyeznek az algoritmus leírásánál használt jelölésekkel (csak  $N$ ,  $n$  és  $m$  egész típusú!).

**Az output:** Annyi sorból áll, ahány feladatot oldottunk meg ( $N$ ). Minden feladathoz 1 sor tartozik, amely vagy az

**alappontok**

vagy a

**z-érték**

hibaüzenetet, vagy az

$S(z_1) \ \dots \ S(z_m)$

értékeket tartalmazza 8 tizedesjegyre kiírva.

**Példa:** Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline értékét a

$$-1.6, -0.5, 0.75, -0.25, 2.4, 1.8$$

pontokban!

$x_i$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$
$S$	$4$	$1$	$7$	$4$	$12$	$9$
$S'$	$15$					$8$

Ebben az esetben az input adatok:

5 6

-2 -1 0 1 2 3

4 1 7 4 12 9

15 8

-1.6 -0.5 0.75 -0.25 2.4 1.8

**1.** A  $h_0, \dots, h_4$  értékek mindegyikére azt kapjuk, hogy 1-gyel egyenlő, és az összes  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, 5$  érték benne van a  $[-2, 3]$  intervallumban.

**2.** Az osztott differenciák:  $[x_0, x_1]f = -3$ ,  $[x_1, x_2]f = 6$ ,  $[x_2, x_3]f = -3$ ,  $[x_3, x_4]f = 8$ ,  $[x_4, x_5]f = -3$ .

3. Az  $A$  mátrix és a  $c$  vektor:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix},$$

ahol az  $A$  mátrixnak csak három átlóját tároljuk 3 vektorban. Az egyenletrendszer megoldása után azt kapjuk, hogy  $y_1 = -2$ ,  $y_2 = 2$ ,  $y_3 = 3$ ,  $y_4 = 1$ .

4.  $z_1$  az  $[x_0, x_1]$  intervallumban van, azaz  $i = 0$ , így  $S(z_1) = s_0(z_1) = s_0(-1.6) = 5.296$ ,  
 $z_2$  az  $[x_1, x_2]$  intervallumban van, azaz  $i = 1$ , így  $S(z_2) = s_1(z_2) = s_1(-0.5) = 3.5$ ,  
 $z_3$  az  $[x_2, x_3]$  intervallumban van, azaz  $i = 2$ , így  $S(z_3) = s_2(z_3) = s_2(0.75) = 4.140625$ ,  
 $z_4$  az  $[x_1, x_2]$  intervallumban van, azaz  $i = 1$ , így  $S(z_4) = s_1(z_4) = s_1(-0.25) = 5.6875$ ,  
 $z_5$  az  $[x_4, x_5]$  intervallumban van, azaz  $i = 4$ , így  $S(z_5) = s_4(z_5) = s_4(2.4) = 10.32$ ,  
 $z_6$  az  $[x_3, x_4]$  intervallumban van, azaz  $i = 3$ , így  $S(z_6) = s_3(z_6) = s_3(1.8) = 11.136$ .

Tehát az output:

5.29600000 3.50000000 4.14062500 5.68750000 10.32000000 11.13600000