Oldja meg az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszert LU-felbontással!
Határozza meg az A mátrix determinánsát!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -7 \\ -2 & -4 & 11 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

<u>Algoritmus:</u>

Sorra vesszük a főátló elemeit (jelöljük a_{ij}-vel):

① A főátló kiválasztott eleme alatti elemeket elosztom a_{ij}-vel.

② Az i. sor elemei ugyanazok maradnak.

③ A többi elemet úgy kapom meg, hogy a számból, ami eredetileg ott állt, kivonom a két szélső szám szorzatát.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

① $$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & & \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & & \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & & \end{pmatrix}$$

② $$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & & \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & & \end{pmatrix}$$

③ $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{13} \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & \boxed{2} & -3 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

a főátlóba 1-esek mennek

L = A jelölés alatti elemeket megtartjuk, a többi 0

U = A jelölés feletti elemeket megtartjuk, a többi 0

$$\cancel{L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}} \qquad U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Most determinánst számolunk:

$\det(A) = \det(U) =$ Az U főátlójában lévő elemek szorzata.

$$\det(A) = \det(U) = (-1) \cdot 2 \cdot (-2) = 4$$

$L \cdot y = b$ megoldása:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 2$

$y_2 = \underbrace{-2y_1 + 1y_2 = -12}, \underbrace{-4 + y_2 = -12} = -8$

$y_3 = \underbrace{2y_1 - 3y_2 + 1y_3 =} \underbrace{4 + 24 + y_3} = -4$

$U \cdot x = y$ megoldása:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$x_3 = \underbrace{-x_1 - 1 + 4 = 2}, \underbrace{-x_1 + 3 = 2} = 1$

$x_2 = \underbrace{2x_2 - 3x_3}, \underbrace{2x_2 - 6 = -8}, \underbrace{x_2 - 3 = -4} = -1$

$x_3 = 2$

Megvan az x:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$