A Gersgorin-tétel alapján mit mondhatunk az A mátrix sajátértékeiről és a mátrix regularitásáról?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

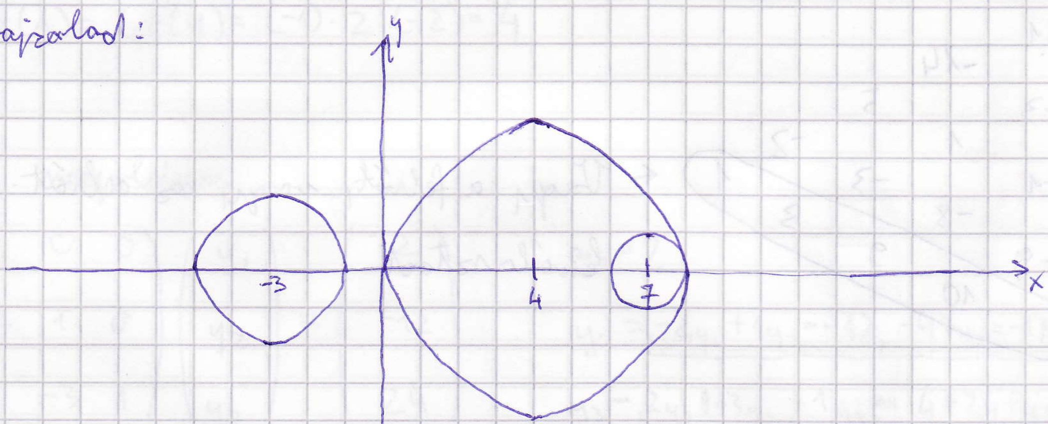
A körök középpontja az X tengelyen a főátlóban lévő értékek. Sugaruk az egyes sorokban a maradék elemek abszolútértékeinek összege. Így:

4 középpontú, $\underbrace{4}_{|-1|+|3|}$ sugarú kör

-3 középpontú, 2 sugarú kör

7 középpontú, 1 sugarú kör.

Ezt felrajzolva:



A mátrix sajátértékei ezen körök uniójában helyezkednek el. A 0 beleesik a 4 középpontú körbe, így lehet, hogy nem invertálható és szinguláris (ha nem esik bele, akkor reguláris és invertálható).

A diszjunkt (egymást nem fedő) körökben 1-1 valós, az egymást fedő körökben komplex sajátérték van (annyi, ahány kör fedi egymást). Így:

- 1 valós
- 2 komplex

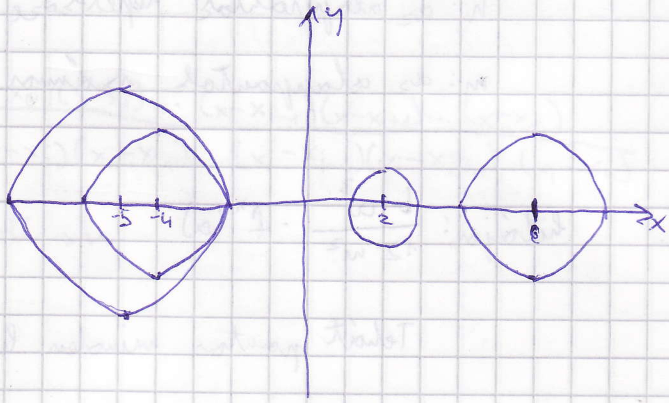
} sajátértéke van.

A Gersgorin-tétel alapján mit mondhatunk az A mátrix sajátértékeiről és a mátrix regularitásáról? Adjon meg az A mátrix $v=(1,0,4,0)^T$ közelítő sajátvektorához tartozó közelítő sajátértékét!

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Gersgorin-körök:

középpont	sugár
6	2
-4	2
2	1
-5	3



A mátrix invertálható és reguláris, mert a 0 nem lehet a sajátértéke. 2 valós, valamint még 2 sajátértéke van.

Most kiszámoljuk $A\cdot v$-t:

$$A\cdot v=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

A v-hez tartozó közelítő sajátérték: (Rayleigh-hányadost számolok)

$$\lambda=\frac{\langle Av,v\rangle}{\langle v,v\rangle}=\frac{34}{17}=2$$

$$\langle Av,v\rangle = 2\cdot 1+(-3)\cdot 0+8\cdot 4+(-3)\cdot 0 = 2+32=34$$

$$\langle v,v\rangle = 1\cdot 1+0\cdot 0+4\cdot 4+0\cdot 0=17$$

$$\cancel{A\cdot v=\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}}$$ ~~valószeg szerű~~