Debreceni Egyetem

Természettudományi és Technológiai Kar

Kalkulus I.

Gselmann Eszter

Debrecen, 2011

„A matematikában a gondolat, ami számít."
(Szofja Vasziljevna Kovalevszkaja)

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Halmazok, relációk, függvények

1.1. Halmazelméleti alapok

1.1.1. Jelölések, elnevezések

A **halmaz** és a **halmaz eleme** fogalmakat adottnak, matematikai absztrakciónak tekintjük.

A halmazokat általában nagybetűkkel, például $A, B, C, \ldots$, míg elemeiket általában kisbetűkkel, például $a, b, c, \ldots$ jelöljük.

$a \in A$ jelöli azt, hogy a **eleme az** A **halmaznak**
$a \notin A$ pedig azt, hogy a **nem eleme az** A **halmaznak**

1.1.1. Definíció. *Egyetlen olyan halmaz van, melynek nincsen eleme, ezt* ***üres halmaz****nak nevezzük és az* $\emptyset$ *szimbólummal jelöljük.*

Halmazok megadása

— Elemeik felsorolásával, például $A = \{a, b, c\}$.

— Valamilyen ismert halmaz elemeire vonatkozó T tulajdonság, illetve állítás segítségével. Például, ha $T(x)$ az X halmaz minden x eleme esetén igaz vagy hamis értéket vesz fel, akkor

$$\{x \mid T(x)\}$$

az X olyan elemeinek halmazát jelöli, melyre a T állítás igaz.

1.1.2. Definíció. *Ha A és B halmazok és az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, akkor azt mondjuk, hogy A* ***részhalmaza*** *B**-nek**, erre az $A \subseteq B$ jelölést használjuk.*
Ha a B halmaznak van olyan eleme, amely nem tartozik az A halmazhoz, akkor A ***valódi részhalmaza*** *B**-nek**, erre az $A \subsetneq B$ jelölést alkalmazzuk.*

1.1.1. Példa. *Legyenek*

$$A = \{1, 2\} \qquad \textit{és} \qquad B = \{0, 1, 2, 3\}\,.$$

Ekkor $A \subsetneq B$.

1.1.1. Megjegyzés. *Tetszőleges A halmaz esetén*

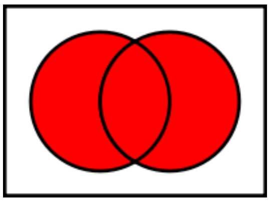
$$A \subseteq A \quad \textit{és} \quad \emptyset \subset A.$$

1.1.3. Definíció. *Ha az A és B halmazok olyanok, hogy $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor azt mondjuk, hogy az A* ***és*** *B* ***halmazok egyenlőek****, erre az $A = B$ jelölést használjuk. Ellenkező esetben azt írjuk, hogy $A \neq B$.*

1.1.2. Halmazműveletek

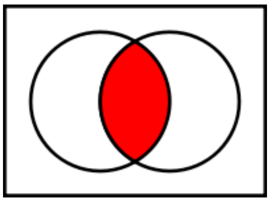
1.1.4. Definíció. *Ha A és B halmazok, akkor azt a halmazt, amely pontosan azokat az elemeket tartalmazza, amelyek A és B valamelyikéhez hozzátartoznak, az* ***A és B halmazok uniójá****nak nevezzük és $A \cup B$-vel jelöljük, azaz,*

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

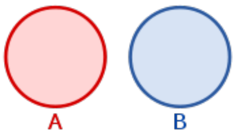


1.1.5. Definíció. *Ha A és B halmazok, akkor azt a halmazt, amely pontosan azokat az elemeket tartalmazza, amelyek A és B mindegyikéhez hozzátartoznak, az* ***A és B halmazok metszeté****nek nevezzük és $A \cap B$-vel jelöljük, azaz,*

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ és } x \in B\}.$$



1.1.6. Definíció. *Ha két halmaz metszete üres, akkor a szóban forgó két halmazt* ***diszjunkt****nak hívjuk.*



1.1.1. Tétel. *Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok. Ekkor*

(i) (kommutativitás)

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{és} \quad A \cap B = B \cap A$$

(ii) (asszociativitás)

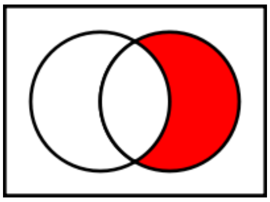
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \text{és} \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(iii) (disztributivitás)

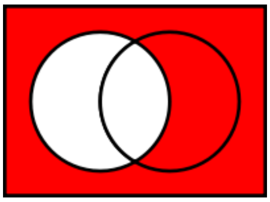
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{és} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1.1.7. Definíció. *Ha A és B két halmaz, akkor az A és B halmaz* ***különbségé****n, vagy más szavakkal* ***a B halmaz A halmazra vonatkozó komplementerén*** *az A olyan elemeinek $A \setminus B$-vel jelölt halmazát értjük, melyek nem tartoznak bele a B halmazba, azaz,*

$$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$



1.1.2. Megjegyzés. *Ha X egy halmaz és $A \subset X$, akkor az $X \setminus A$ komplementumra a tömörebb A^C jelölést használjuk.*



1.1.2. Tétel. *Legyenek $A, B \subset X$ tetszőleges halmazok, ekkor*

(i)

$$\emptyset^C = X, \quad X^C = \emptyset, \quad \left(A^C\right)^C = A$$

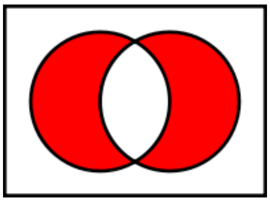
(ii) (de Morgan-azonosságok)

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \quad \text{és} \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

1.1.8. Definíció. *Legyen X egy nemüres halmaz és $A, B \subset X$. Ekkor az*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

halmazt az A és B halmazok ***szimmetrikus differenciájá****nak hívjuk.*



1.1.1. Állítás. *Legyen X egy nemüres halmaz és $A, B \subset X$. Ekkor*

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1.1.2. Állítás. *Legyen X egy nemüres halmaz és $A, B, C \subset X$. Ekkor*

(i)

$$A \Delta B = B \Delta A. \qquad (\text{kommutativitás})$$

(ii)

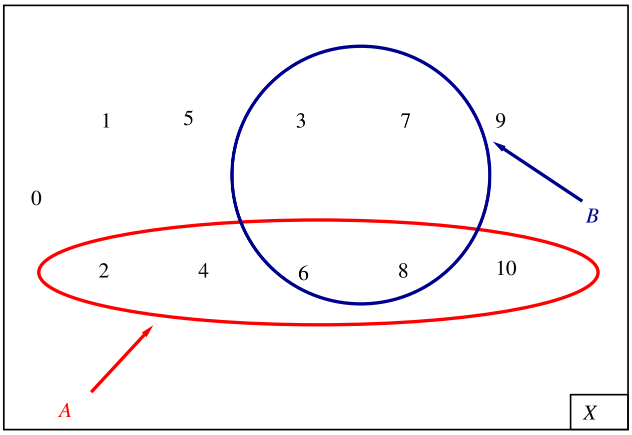
$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) \qquad (\text{asszociativitás})$$

(iii)

$$A \Delta A = \emptyset \quad \text{és} \quad A \Delta \emptyset = A$$

(iv)

$$(A \Delta B) \Delta (B \Delta C) = A \Delta C$$



(v)

$$A \Delta B = \emptyset \Longleftrightarrow A = B$$

1.1.2. Példa. *Legyenek*

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad \text{és} \quad B = \{3, 6, 7, 8\}$$

Ekkor

$$A \cap B = \{6, 8\},$$
$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\},$$
$$X \setminus A = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\},$$
$$X \setminus B = \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 10\},$$
$$B \cap (X \setminus A) = \{3, 7\},$$
$$A \cap (X \setminus B) = \{2, 4, 10\},$$
$$A \setminus B = \{2, 4, 10\},$$
$$B \setminus A = \{3, 7\}$$

és

$$A \Delta B = \{2, 3, 4, 7, 10\}$$

1.2. Rendezett elempárok, Descartes-szorzat, relációk

1.2.1. Rendezett elempárok

1.2.1. Definíció. *Az a és b elemekből képzett (a, b) szimbólumot **rendezett elempár**nak nevezzük, a-t, illetve b-t a rendezett elempár **első**, illetve **második komponensé**nek hívjuk.*

*Két rendezett elempárt **egyenlő**nek mondunk, ha a megfelelő komponenseik rendre megegyeznek, azaz például*

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ és } b = c.$$

1.2.1. Megjegyzés. *Az $(a, b) = (b, a)$ összefüggés pontosan akkor teljesül, ha $a = b$.*

1.2.2. Descartes-szorzat

1.2.2. Definíció. *Ha A és B két halmaz, akkor az*

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A,\ b \in B\}$$

halmazt az A és B halmazok ***Descartes-szorzat****ának hívjuk.*

1.2.2. Megjegyzés. *Ha $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$, akkor $A \times B = \emptyset$.*

1.2.1. Példa. *Legyenek*

$$X = \{a, b, c\} \qquad \textit{és} \qquad Y = \{1, 2\}.$$

Ekkor

$$X \times Y = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\},$$

$$Y \times X = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (3, c)\}$$

$$X \times X = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

$$Y \times Y = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

1.2.3. Relációk

1.2.3. Definíció. *Ha A és B két halmaz, akkor az $A \times B$ Descartes-szorzat egy R részhalmazát* ***A és B közötti reláció****nak nevezzük.*
Ha $A = B$, akkor azt mondjuk, hogy ***R reláció A-n****.*
Az $(a, b) \in R$ tartalmazást az aRb szimbólummal is fogjuk majd jelölni, ez utóbbit úgy olvassuk ki, hogy ***a relációban van b-vel****.*

1.2.4. Definíció. *Ha $R \subset A \times B$, akkor a*

$$\mathcal{D}_R = \{a \in A \,|\, \text{létezik olyan } b \in B, \text{ hogy } (a, b) \in R\}$$

és az

$$\mathcal{R}_R = \{b \in B \,|\, \text{létezik olyan } a \in A, \text{ hogy } (a, b) \in R\}$$

az R reláció ***értelmezési tartományá****nak, illetve* ***értékkészleté****nek nevezzük.*

1.2.5. Definíció. *Ha $C \subset A$, akkor az*

$$R(C) = \{b \in B \,|\, \text{létezik olyan } c \in C, \text{ hogy } (a, b) \in R\}$$

halmazt a ***C halmaz R reláció általi képé****nek hívjuk.*

1.2.3. Megjegyzés. *Nyilván*

$$R(A) = \mathcal{R}_R.$$

1.2.6. Definíció. *Az $R \subset A \times B$* ***reláció inverzé****n, az*

$$R^{-1} = \{(b, a) \,|\, (a, b) \in R\}$$

relációt értjük.

1.2.4. Megjegyzés. *(i)* *$(a, b) \in R$ pontosan akkor, ha $(b, a) \in R^{-1}$;*

(ii) R^{-1} *reláció B és A között;*

(iii) $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$;

(iv) $R^{-1}(B) = \mathcal{D}_f$.

1.2.2. Példa. *Legyenek*

$$X = \{a, b, c\} \qquad Y = \{1, 2\} \qquad \text{és} \qquad R = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\} \subset X \times Y.$$

Ekkor

$$\mathcal{D}_R = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{R}_R = \{1\}$$

$$R^{-1} = \{(1, a), (1, b), (1, c)\}$$

1.2.7. Definíció. *Legyenek* $R \subset A \times B$ *és* $S \subset B \times C$ *adott relációk, ekkor az*

$$S \circ R = \{(a, c) \,|\, \text{létezik olyan } b \in B, \text{ hogy } (a, b) \in R, \ (b, c) \in S\}$$

relációt az ***R és S relációk kompozíciójá****nak hívjuk.*

1.2.5. Megjegyzés. $S \circ R$ *reláció A és C között.*

1.2.1. Tétel. *Legyenek* $R \subset A \times B$ *és* $S \subset B \times C$ *adott relációk, ekkor*

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

Tegyen továbbá $T \subset C \times D$ *egy harmadik reláció, ekkor*

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

Ekvivalenciarelációk

1.2.8. Definíció. *Egy* $R \subset A \times A$ *relációt* ***ekvivalenciareláció****nak hívunk, ha*

(i) ***reflexív****, azaz, bármely* $a \in A$ *esetén* aRa;

(ii) ***szimmetrikus****, azaz,* aRb *pontosan akkor teljesül, ha* bRa;

(iii) ***tranzitív****, azaz, ha* aRb *és* bRc*, akkor* aRc *is teljesül.*

1.2.3. Példa. *Legyen* $A \neq \emptyset$ *tetszőleges és az R relációt értelmezzük a következőképpen*

$$aRb \iff a = b.$$

Ekkor R ekvivalenciareláció A-n.

Rendezési relációk

1.2.9. Definíció. *Egy $R \subset A \times A$ relációt* ***parciális rendezés****nek hívunk, ha*

(i) ***reflexív****, azaz, bármely $a \in A$ esetén aRa;*

(ii) ***antiszimmetrikus****, azaz, aRb és bRa együttes teljesülése maga után vonja, hogy $a = b$;*

(iii) ***tranzitív****, azaz, ha aRb és bRc, akkor aRc is teljesül.*

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy A egy ***parciálisan rendezett halmaz*** *az R relációval. A továbbiakban az R relációra a $\leq$ jelölést alkalmazzuk.*

1.2.10. Definíció. *Ha az $R \subset A \times A$ reláció rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, továbbá*
(iv) lineáris*, azaz, tetszőleges $a, b \in A$ esetén aRb és bRa közül legalább az egyik teljesül,*
akkor azt mondjuk, hogy R ***rendezési reláció****.*
Ebben az esetben az A halmazt ***rendezett halmaz****nak nevezzük.*

1.2.4. Példa. *Legyen $X \neq \emptyset$ és jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz* ***hatványhalmazát****, azaz az X halmaz összes részhalmazainak a halmazát. Értelmezzük $\mathcal{P}(X)$-en az R relációt az alábbi módon*

$$ARB \iff A \subseteq B.$$

Ekkor R egy olyan parciális rendezési reláció, mely nem lineáris.

1.2.11. Definíció. *Legyen $(A, \leq)$ egy parciálisan rendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy a $B \subset A$ halmaz* ***felülről korlátos****, ha létezik olyan $a \in A$, hogy tetszőleges $b \in B$ esetén $b \leq a$ teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy az a elem a* ***B halmaz felső korlátja****.*

1.2.6. Megjegyzés. *Egy B halmaznak nem mindig van B-beli felső korlátja, de ha van, akkor pontosan egy létezik.*
Ha a B halmaznak van B-beli felső korlátja, akkor ezt az elemet a B halmaz ***maximumá****nak hívjuk és $\max B$-vel jelöljük.*

1.2.12. Definíció. *Legyen $(A, \leq)$ egy parciálisan rendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy a $B \subset A$ halmaz* ***alulról korlátos****, ha létezik olyan $a \in A$, hogy tetszőleges $b \in B$ esetén $a \leq b$ teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy az a elem a* ***B halmaz alsó korlátja****.*

1.2.7. Megjegyzés. *Egy B halmaznak nem mindig van B-beli alsó korlátja, de ha van, akkor pontosan egy létezik.*
Ha a B halmaznak van B-beli alsó korlátja, akkor ezt az elemet a B halmaz ***minimumá****nak hívjuk és $\min B$-vel jelöljük.*

1.2.13. Definíció. *Legyen $(A, \leq)$ egy parciálisan rendezett halmaz és $B \subset A$ egy felülről korlátos halmaz. Ekkor a B halmaz felső korlátainak a minimumát a B halmaz* ***pontos felső korlát****jának hívjuk. Erre a $\sup B$ jelölést használjuk.*

1.2.8. Megjegyzés. *A B halmaz pontos felső korlátja – ha létezik, akkor – egyértelmű.*

1.2.14. Definíció. *Legyen $(A, \leq)$ egy parciálisan rendezett halmaz és $B \subset A$ egy alulról korlátos halmaz. Ekkor a B halmaz alsó korlátainak a maximumát a B halmaz* ***pontos alsó korlát****jának hívjuk. Erre az $\inf B$ jelölést használjuk.*

1.2.9. Megjegyzés. *A B halmaz pontos alsó korlátja – ha létezik, akkor – egyértelmű.*

Mivel az üreshalmaznak minden szám alsó és egyben felső korlátja is, ezért a továbbiakban az

$$\inf \emptyset = +\infty \quad \text{és} \quad \sup \emptyset = -\infty.$$

megállapodással fogunk élni.

1.3. Függvények

1.3.1. Definíció. *Legyenek A és B halmazok. Az $f \subset A \times B$ relációt **függvény**nek nevezzük, ha tetszőleges $\mathcal{D}_f$ esetén az $f(\{a\})$ halmaz egyelemű.*
*Ha $\mathcal{D}_f = A$, akkor azt mondjuk, hogy f **az A-ból B-be képező függvény**, és ezt az $f\colon A \to B$ szimbólummal jelöljük.*

1.3.2. Definíció. *Legyenek A és B halmazok, $f\colon A \to B$ függvény. Ha az f függvénynek, mint relációnak az inverze is függvény, akkor az mondjuk, hogy f **invertálható**.*

1.3.3. Definíció. *Legyenek A és B halmazok és $f\colon A \to B$ függvény. Az f függvényről azt mondjuk, hogy*

(i) ***injektív** ha $a, a^* \in A$, $a \neq a^*$ esetén $f(a) \neq f(a^*)$;*

(ii) ***szürjektív**, ha $f(A) = B$;*

(iii) ***bijektív (kölcsönösen egyértelmű)**, ha injektív és szürjektív.*

1.3.1. Példa. *Legyenek*

$$A = \{a, b, c\} \qquad \text{és} \qquad B = \{0, 1, 2\}.$$

Ekkor az

$$f_1 = \{(a, 0), (b, 0), (a, 2), (c, 1)\}$$

*reláció **nem** függvény, hiszen $f_1(\{a\}) = \{0, 2\}$. Az*

$$f_2 = \{(a, 0), (b, 0), (c, 1)\}$$

reláció olyan függvény, mely se nem injektív, se nem szürjektív, az

$$f_3 = \{(a, 2), (b, 0), (c, 1)\}$$

reláció azonban olyan függvény, mely injektív és szürjektív is.

2. fejezet

A valós számok axiómarendszere

2.1. Testaxiómák

2.1.1. Definíció. *Legyen R egy halmaz. Azt mondjuk, hogy $*$* ***binér művelet** R**-en**, *ha $*: R \times R \to R$ függvény.*
Más szavakkal, ez azt jelenti, hogy minden $(x, y) \in R \times R$ rendezett elempárhoz hozzá van rendelve egy egyértelműen meghatározott, $*((x, y))$-nal jelölt R-beli elem. Erre az elemre a továbbiakban az $x * y$ jelölést alkalmazzuk.

2.1.2. Definíció. *Egy R halmazt* ***test****nek nevezünk, ha adott rajta két, $+$-szal és $\cdot$-tal jelölt,* ***összeadás****nak, illetve* ***szorzás****nak nevezett művelet, melyekre*

A(i) *az* ***összeadás kommutatív****, azaz, tetszőleges $x, y \in R$ esetén*

$$x + y = y + x;$$

A(ii) *az* ***összeadás asszociatív****, azaz, minden $x, y, z \in R$ esetén*

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

A(iii) *az összeadásnak létezik* ***egységelem****e, vagyis van olyan 0-val jelölt R-beli elem, hogy minden $x \in R$ esetén*

$$x + 0 = x;$$

A(iv) *bármely R-beli elemnek létezik az összeadásra nézve* ***inverzelem****e, azaz, bármely $x \in R$ esetén létezik egy olyan $-x$-szel jelölt R-beli elem, hogy*

$$x + (-x) = 0$$

M(i) *a* ***szorzás kommutatív****, azaz, tetszőleges $x, y \in R$ esetén*

$$x \cdot y = y \cdot x;$$

M(ii) *a* ***szorzás asszociatív****, vagyis minden $x, y, z \in R$ esetén*

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

M(iii) *a szorzásnak létezik* ***egységeleme****, azaz, létezik egy olyan 1-gyel jelölt R-beli elem, hogy tetszőleges $x \in R$ esetén*

$$x \cdot 1 = x.$$

M(iv) *bármely* 0*-tól különböző* R*-beli elemnek létezik a szorzásra nézve* ***inverzeleme****, vagyis, minden* $x \in R$, $x \neq 0$ *esetén van olyan* x^{-1}*-gyel jelölt* R*-beli elem, hogy*

$$x \cdot (x^{-1}) = 1.$$

M(v) *a szorzás* ***disztributív*** *az összeadásra nézve, azaz, minden* $x, y, z \in R$ *esetén*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

2.1.1. Állítás. *Legyen* R *egy test, ekkor az összeadás és a szorzás egységeleme egyértelműen meghatározott.*

2.1.2. Állítás. *Legyen* R *egy test, ekkor minden* $x \in R$ *elem összeadásra vonatkozó inverzeleme egyértelműen meghatározott.*

2.1.3. Állítás. *Legyen* R *egy test, ekkor minden* $x \in R$, $x \neq 0$ *elem szorzásra vonatkozó inverzeleme egyértelműen meghatározott.*

2.1.4. Állítás. *Egy test két elemének szorzata pontosan akkor nulla, ha az elemek valamelyike nulla.*

2.2. Rendezési axiómák

2.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* R *test egy* ***rendezett test****, ha* R *egy rendezett halmaz a* $\leq$ *rendezéssel és teljesülnek az alábbiak*

(i) ***az összeadás monoton****, azaz ha* $x, y \in R$ *olyanok, hogy* $x \leq y$*, akkor minden* $z \in R$ *esetén*

$$x + z \leq y + z.$$

(ii) ***a szorzás monoton****, vagyis ha* $x, y \in R$ *olyanok, hogy* $0 \leq x$ *és* $0 \leq y$*, akkor*

$$0 \leq xy.$$

2.2.1. Állítás. *Ha* $x, y, z \in R$ *és* $x < y$*, akkor*

$$x + z < y + z.$$

2.2.2. Állítás. *Ha* $x, y \in R$ *olyanok, hogy* $0 < x$ *és* $0 < y$*, akkor*

$$0 < xy.$$

2.2.3. Állítás. *Ha* $x, y, z, u \in R$ *olyanok, hogy* $x < y$ *és* $z \leq u$*, akkor*

$$x + z < y + u.$$

2.2.4. Állítás. *Legyenek* $x, y, z \in R$ *olyanok, hogy* $x < y$ *és* $0 < z$*. Ekkor*

$$xz < yz.$$

2.2.2. Definíció. *Az* R *rendezett test*

$$\{x \in R \,|\, 0 \leq x\}, \; R_{+} = \{x \in R \,|\, 0 < x\}, \; \{x \in R \,|\, x \leq 0\}, \; R_{-} = \{x \in R \,|\, x < 0\},$$

alakú halmazait rendre R*-beli* ***nemnegatív, pozitív, nempozitív****, illetve* ***negatív*** *elemek halmazának hívjuk.*

2.2.3. Definíció. *Legyen R egy rendezett test, $a, b \in R$, $a \neq b$, ekkor az*

$$[a,b] = \{x \in R \,|\, a \leq x \leq b\}$$

$$[a,b[= \{x \in R \,|\, a \leq x < b\}$$

$$]a,b] = \{x \in R \,|\, a < x \leq b\}$$

$$]a,b[= \{x \in R \,|\, a < x < b\}$$

halmazokat rendre ***zárt, balról zárt, jobbról nyílt, balról nyílt jobbról zárt****, illetve* ***nyílt*** *intervallumoknak nevezzük.*

2.2.4. Definíció. *Legyen R egy rendezett test, az $x \in R$ elem* ***abszolút érték****é**n** az*

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

elemet értjük.

2.2.1. Megjegyzés. *(i)*

$$|x| = \begin{cases} x, & ha\ 0 \leq x \\ -x, & egyébként \end{cases}$$

(ii) Tetszőleges $x \in R$ esetén $0 \leq |x|$.

2.2.1. Tétel. *Legyen R egy rendezett test. Ekkor minden $x, y \in R$ esetén*

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{és} \quad |xy| = |x| \cdot |y|.$$

2.2.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(R, \leq)$ rendezett halmaz (a rendezésre nézve)* ***teljes****, ha benne minden nemüres felülről korlátos halmaznak létezik pontos felső korlátja.*

2.2.6. Definíció. *Létezik rendezett test, mely a rendezésre nézve teljes, egy ilyen halmazt* ***valós számtest****nek nevezünk, elemeit pedig* ***valós számok****nak hívjuk. Továbbá, a valós számok halmazára innentől kezdve az $\mathbb{R}$ jelölést fogjuk használni.*

2.2.2. Tétel (Cantor-féle metszettétel). *Legyen I egy tetszőleges nemüres halmaz és $\mathcal{H} = \{[a_i, b_i] \,|\, i \in I\}$ egy $\mathbb{R}$-beli nemüres* ***intervallumlánc****, azaz bármely $i, j \in I$ esetén vagy $[a_i, b_i] \subset [a_j, b_j]$ vagy $[a_j, b_j] \subset [a_i, b_i]$ teljesül. Ekkor*

$$\bigcap \mathcal{H} \neq \emptyset,$$

azaz, van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy

$$x \in [a_i, b_i] \qquad (i \in I).$$

2.3. A természetes számok halmaza

2.3.1. Definíció. *Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmazt* ***induktív****nek nevezünk, ha teljesülnek az alábbiak*

(i) $1 \in A$;

(ii) ha $x \in A$, akkor $x + 1 \in A$.

2.3.1. Tétel. *A valós számok $\mathbb{R}$ halmazában létezik legszűkebb induktív halmaz.*

2.3.2. Definíció. *A fentiek szerint egyértelműen meghatározott legszűkebb induktív halmazt a* ***természetes számok halmazá****nak hívjuk és az $\mathbb{N}$ szimbólummal jelöljük, elemeit* ***természetes számok****nak mondjuk.*

2.3.2. Tétel. *$\mathbb{N}$ alulról korlátos és*
$$\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 1.$$

2.3.3. Tétel. *$\mathbb{N}$ felülről nem korlátos.*

2.3.1. Következmény (Archimedesi-tulajdonság). *Bármely $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy*
$$y < nx.$$

2.3.4. Tétel. *$\mathbb{N}$ teljesíti a **Peano-axiómák**at, azaz,*

(i) $1 \in \mathbb{N}$*;*

(ii) ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $(n+1) \in \mathbb{N}$;

*(iii) ha $A \subseteq \mathbb{N}$ olyan halmaz, mely teljesíti az **(i)** és **(ii)** tulajdonságokat, akkor $A = \mathbb{N}$.*

2.3.5. Tétel (A teljes indukció elve). *Tegyük fel, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén adva van egy T_n állítás, úgy, hogy*

(i) T_1 igaz;

(ii) feltéve, hogy T_n igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén, a T_{n+1} állítás is igaz.

Ekkor T_n minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül.

2.3.1. Példa. *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén*
$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ezt az állítást a teljes indukció elve segítségével lehet igazolni. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a T_n állítás legyen az, hogy
$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Ekkor a T_1 állítás
$$1 = \frac{1(1+1)}{2},$$
ami nyilvánvalóan igaz. Tegyük most fel, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre a T_n állítás igaz. Ekkor azt kell megmutatnunk, hogy a T_{n+1} állítás, azaz,
$$1 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
is igaz. Induljunk ki a T_{n+1} állítás bal oldalából,
$$1 + \cdots + (n+1) = \overbrace{1 + \cdots + n}^{T_n \text{ bal oldala}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$
ami éppen azt jelenti, hogy a T_{n+1} állítás is igaz. Így, a teljes indukció elve szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a T_n állítás igaz, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
teljesül.

2.3.6. Tétel. *A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és a szorzásra nézve, azaz, tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén*

$$n + m \in \mathbb{N} \quad \text{és} \quad n \cdot m \in \mathbb{N}$$

is teljesül.

2.3.3. Definíció. *Legyen $x \in \mathbb{R}$, ekkor legyen*

$$x^1 = x, \qquad x^{n+1} = x^n \cdot x, \text{ ha } n \in \mathbb{N}.$$

Az x^n valós számot az x ***n-edik hatványá****nak nevezzük.*

2.3.1. Állítás. *Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$ és $n, m \in \mathbb{N}$, ekkor*

$$(xy)^n = x^n y^n, \quad x^n x^m = x^{n+m}, \quad (x^n)^m = x^{nm},$$

továbbá, ha $y \neq 0$, akkor

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}.$$

2.4. Az egész számok halmaza

2.4.1. Definíció. *A*

$$\mathbb{Z} = \{n - m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

halmazt az ***egész számok halmazá****nak nevezzük, elemeit pedig* ***egész számok****nak mondjuk.*

2.4.1. Állítás. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

2.4.2. Állítás. *Az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza sem alulról sem felülről nem korlátos.*

2.4.3. Állítás. *Az egész számok halmaza zárt az összeadásra, a szorzásra és a kivonásra nézve, azaz, ha $k, l \in \mathbb{Z}$, akkor*

$$k + l \in \mathbb{Z}, \quad k \cdot l \in \mathbb{Z} \quad k - l \in \mathbb{Z}.$$

2.5. A racionális és az irracionális számok halmaza

2.5.1. Definíció. *A* ***racionális számok halmazá****n a*

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{k}{l} \mid k, l \in \mathbb{Z}, \, l \neq 0\right\}$$

halmazt értjük.

2.5.1. Állítás. *A racionális számok halmaza test, továbbá $\mathbb{Q}$ az $\mathbb{R}$ legszűkebb részteste.*

2.5.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz* ***mindenütt sűrű $\mathbb{R}$-ben****, ha tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ esetén van olyan $h \in H$, hogy $x < h < y$.*

2.5.1. Tétel. *A racionális számok halmaza mindenütt sűrű a valós számok halmazában.*

2.5.3. Definíció. *Az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazt az* ***irracionális számok halmazá****nak hívjuk, elemeit* ***irracionális számok****nak mondjuk.*

2.5.2. Tétel. *(i) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nemüres;*

(ii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *mindenütt sűrű* $\mathbb{R}$*-ben.*

2.5.4. Definíció. *Ha* $n \in \mathbb{N}$ *és* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, akkor az*

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

valós számot az x $-n$***-edik hatványá****nak hívjuk.*

2.5.5. Definíció. *Legyen* $n \in \mathbb{N}$ *és* $0 \leq x$*, ekkor azt az* $0 \leq y$ *számot, melyre* $x^n = y$ *teljesül, az x* ***n-edik gyöké****nek hívjuk és rá az* $\sqrt[n]{x}$ *jelölést alkalmazzuk.*

2.5.1. Megjegyzés. *Ha n páratlan, akkor negatív számok n-edik gyökét is értelmezhetjük, az*

$$\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$$

formulával.

2.5.3. Tétel (Az ***n*****-edik gyök létezése és egyértelműsége).** *Bármely* $n \in \mathbb{N}$ *és* $0 \leq x$ *esetén pontosan egy olyan* $0 \leq y$ *létezik, melyre* $x^n = y$*.*

2.5.6. Definíció. *Legyen* $0 \leq x$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *és* $n \in \mathbb{N}$*, ekkor*

$$x^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{x^k}.$$

2.6. Nevezetes egyenlőtlenségek $\mathbb{R}$-ben

2.6.1. Tétel (Bernoulli-egyenlőtlenség). *Legyen* $n \in \mathbb{N}$ *és* $x \geq -1$*. Ekkor*

$$1 + nx \leq (1 + x)^n,$$

továbbá, az egyenlőtlenségben pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha $n = 1$ *vagy* $x = 0$*.*

2.6.1. Definíció. *Legyen* $n \in \mathbb{N}$ *és* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *pozitív valós számok, ekkor az*

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots x_n}{n},$$

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

és

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

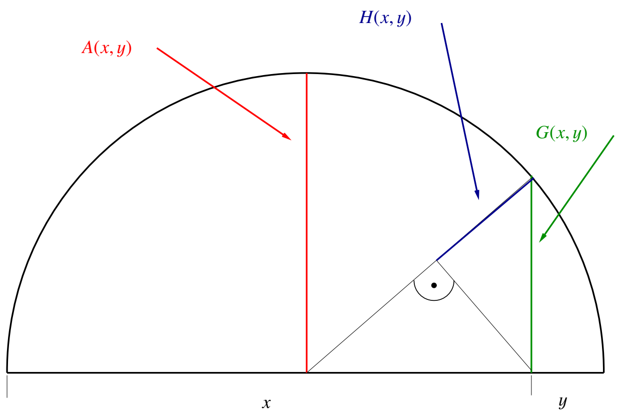
mennyiségeket rendre a fenti számok ***számtani (aritmetikai), mértani (geometriai)****, illetve* ***harmonikus középé****nek hívjuk.*

2.6.2. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}$ *és* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *pozitív valós számok, ekkor*

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq H(x_1, \ldots, x_n) \leq G(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n) \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\}$$

2.6.3. Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség). *Legyen* $n \in \mathbb{N}$ *és* $x_1, \ldots, x_n$*,* $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$*, ekkor*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$



A(x, y)
H(x, y)
G(x, y)
x
y

3. fejezet

A komplex számok halmaza

3.0.2. Definíció. *Legyen*

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

és $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ *esetén legyen*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{és} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Ekkor a $\mathbb{C}$ *halmaz elemeit* ***komplex számok**nak, magát* $\mathbb{C}$*-t pedig a* ***komplex számok halmazá**nak hívjuk.*

3.0.1. Állítás. *A komplex számok halmaza a fenti műveletekkel testet alkot.*

3.0.3. Definíció. *Az*

$$i = (0, 1)$$

komplex számot ***képzetes egység**nek nevezzük.*

A fenti jelölést figyelembe véve azt írhatjuk, hogy

$$(a, b) = a + bi \qquad (a, b \in \mathbb{R}),$$

amit a komplex számok **algebrai alak**jának nevezünk. Figyeljük meg továbbá, hogy ekkor

$$i^2 = -1$$

3.0.4. Definíció. *Ha* $z = a + bi \in \mathbb{C}$*, akkor a*

$$\mathrm{Re}(z) = a, \quad \mathrm{Im}(z) = b, \quad \overline{z} = a - bi, \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

mennyiségeket rendre a z komplex szám ***valós**, illetve* ***képzetes részé**nek,* ***konjugáltjá**nak, valamint* ***abszolút értéké**nek nevezzük.*

3.0.4. Tétel. *Ha* $z, w \in \mathbb{C}$*, akkor*

(i)

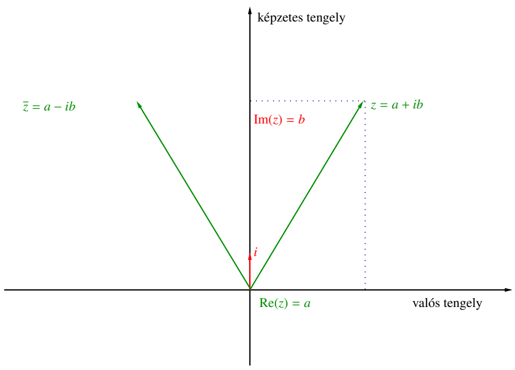
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

(ii)

$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

(iii)

$$|\overline{z}| = |z|, \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad |zw| = |z| \cdot |w|$$


képzetes tengely
$\bar{z} = a - ib$
$z = a + ib$
$\mathrm{Im}(z) = b$
i
$\mathrm{Re}(z) = a$
valós tengely

4. fejezet

Számhalmazok számossága

4.0.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az A és B halmazok* ***ekvivalensek****, ha létezik közöttük egy bijektív megfeleltetés. Ha az A és B halmazok ekvivalensek, akkor erre az $A \sim B$ jelölést használjuk.*

4.0.5. Tétel. *Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz. Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció $\mathcal{P}(X)$-en.*

4.0.6. Definíció. *Legyen A és B halmazok, ha létezik olyan $C \subset B$ halmaz, hogy $A \sim C$, akkor azt mondjuk, hogy az A halmaz* ***kisebb vagy egyenlő számosságú****, mint a B halmaz. Erre az $A \preceq B$ jelölést alkalmazzuk.*

4.0.6. Tétel. *$A \preceq B$ pontosan akkor teljesül, ha létezik $\varphi \colon A \to B$ injektív leképezés.*

4.0.7. Tétel (Schröder–Bernstein-tétel). *Legyenek A és B olyan halmazok, hogy $A \preceq B$ és $B \preceq A$ is teljesül. Ekkor $A \sim B$.*

4.0.8. Tétel. *Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz. Ekkor $\preceq$ rendezési reláció $\mathcal{P}(X)$-en.*

4.0.7. Definíció. *Egy halmazt* ***véges****nek nevezünk, ha nincs önmagával ekvivalens valódi részhalmaza. Ellenkező esetben* ***végtelen halmaz****ról beszélünk.*

4.0.9. Tétel. *Véges halmaz minden részhalmaza is véges.*

4.0.10. Tétel. *Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén az*

$$\{1, 2, \ldots, n\}$$

halmaz véges.

4.0.11. Tétel. *A természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza végtelen halmaz.*

4.0.12. Tétel. *Ha A egy nemüres, véges halmaz, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $A \sim \{1, \ldots, n\}$.*

4.0.8. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, azt mondjuk, hogy az A halmaz* ***n-elemű****, ha $A \sim \{1, \ldots, n\}$, erre a továbbiakban a $\mathrm{card}(A) = n$ jelölést alkalmazzuk.*

4.0.9. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az A halmaz* ***megszámlálhatóan végtelen****, ha $A \sim \mathbb{N}$. Erre a $\mathrm{card}(A) = \aleph_0$ jelölést fogjuk használni.*

4.0.10. Definíció. *Ha egy halmaz véges, vagy megszámlálhatóan végtelen számosságú, akkor a szóban forgó halmazt* ***megszámlálható****nak hívjuk.*

4.0.13. Tétel. *Ha az A és B halmazok megszámlálhatóak, akkor az $A \times B$ halmaz is megszámlálható.*

4.0.1. Következmény. *(i)*
$$\mathrm{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0$$

(ii)
$$\mathrm{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$$

4.0.11. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az A halmaz* ***kontinuum számosságú****, ha* $A \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$*, erre a továbbiakban a* $\mathrm{card}(A) = \mathfrak{c}$ *jelölést használjuk.*

4.0.14. Tétel. *A valós számok halmaza kontinuum számosságú.*

4.0.2. Következmény. *(i)* $\mathrm{card}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathfrak{c}$

(ii) $\mathrm{card}(\mathbb{C}) = \mathfrak{c}$

(iii) $\mathrm{card}(]a, b[) = \mathfrak{c}$*, tetszőleges* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a \neq b$ *esetén.*

5. fejezet

Valós számsorozatok

5.0.12. Definíció. *__Valós számsorozat__on egy a természetes számok halmazán értelmezett $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt értünk.*

Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $f(n)$ helyett általában az x_n jelölést használjuk, magára a sorozatra pedig az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jelölést alkalmazzuk. Továbbá, az x_n valós számot az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **sorozat n-edik elem**ének mondjuk.

5.1. Valós számsorozatok konvergenciája

5.1.1. Definíció. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **sorozat határértéke (vagy limesze)** $x \in \mathbb{R}$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N > 0$ szám, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$, akkor*

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Erre a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ jelölést használjuk.

5.1.2. Definíció. *Egy sorozatot **konvergens**nek nevezünk, ha van olyan $x \in \mathbb{R}$, ami a szóban forgó sorozat limesze. Ellenkező esetben **divergens** sorozatról beszélünk.*

5.1.1. Példa. *Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor az*

$$x_n = c \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

5.1.2. Példa. *Az*

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

valós számsorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

5.1.3. Példa. *Az*

$$x_n = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

valós számsorozat divergens.

5.1.3. Definíció. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***$+\infty$-hez divergál****, ha bármely* $K \in \mathbb{R}$ *számhoz található olyan* $N > 0$ *szám, hogy ha* $n \in \mathbb{N}$ *és* $n > N$*, akkor*

$$x_n > K.$$

Erre a $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *jelölést alkalmazzuk.*

5.1.4. Definíció. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***$-\infty$-hez divergál****, ha bármely* $k \in \mathbb{R}$ *számhoz található olyan* $N > 0$ *szám, hogy ha* $n \in \mathbb{N}$ *és* $n > N$*, akkor*

$$x_n < k.$$

Erre a $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *jelölést alkalmazzuk.*

5.1.5. Definíció. *Az*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

halmazt a ***bővített valós számok halmazá****nak nevezzük.*

5.1.6. Definíció. *Egy* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *bővített valós szám* ***környezetei****n a következő alakú intervallumokat értjük.*

$$\begin{array}{rl}]\, x-\varepsilon, x+\varepsilon\, [\,, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \\ ]\, \varepsilon, +\infty\,]\,, & \text{ha } x = +\infty \\ [\, -\infty, \varepsilon\, [\,, & \text{ha } x = -\infty \end{array} \qquad (\varepsilon \in \mathbb{R})\,.$$

5.1.1. Állítás. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy valós számsorozat. Ebben az esetben* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *pontosan akkor teljesül, ha az* x *tetszőleges* V *környezete esetén* $x_n \in V$ *teljesül legfeljebb véges sok* $n \in \mathbb{N}$ *kivételével.*

5.1.1. Tétel (A határérték egyértelműsége). *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy olyan valós számsorozat, mely egyaránt tart az* x *és* y *bővített valós számokhoz. Ekkor* $x = y$*.*

5.2. Részsorozatok

5.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat* ***részsorozat****a, ha létezik egy olyan* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *szigorúan monoton függvény, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$y_n = x_{\varphi(n)}$$

teljesül.

5.2.1. Tétel. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy olyan valós számsorozat, mely az* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *bővített valós számhoz tart. Ekkor az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat tetszőleges* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *részsorozata esetén*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x$$

teljesül.

5.3. Korlátosság

5.3.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat* ***alulról korlátos****, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$ szám, hogy*

$$k \le x_n \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat ***felülről korlátos****, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$ szám, hogy*

$$x_n \le K \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatot ***korlátos****nak nevezzük, ha mind alulról, mind felülről korlátos.*

5.3.1. Tétel (Konvergencia $\Longrightarrow$ korlátosság). *Bármely konvergens valós számsorozat korlátos.*

5.3.1. Megjegyzés (Korlátosság $\not\Rightarrow$ konvergencia). *Az*

$$x_n = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

valós számsorozat korlátos és divergens.

5.4. Monotonitás

5.4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat* ***monoton növekedő****, ha tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ esetén*

$$x_n \le x_m$$

teljesül.
Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat ***monoton csökkenő****, ha tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ esetén*

$$x_n \ge x_m$$

teljesül.

Ha a fenti egyenlőtlenségek minden $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ esetén szigorúak, úgy a szóban forgó sorozatot ***szigorúan monoton növekedő****nek, illetve* ***szigorúan monoton csökkenő****nek hívjuk.*

5.4.1. Megjegyzés. *(i) Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat monoton növekedő, akkor alulról korlátos.*

(ii) Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat monoton csökkenő, akkor felülről korlátos.

5.4.1. Tétel. *(i) Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat monoton növekedő, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

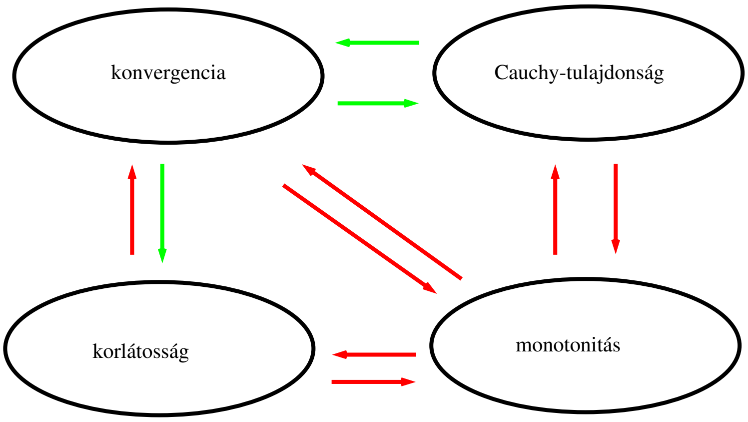
(ii) Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat monoton csökkenő, akkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

5.4.1. Következmény. *Egy monoton sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos.*

5.4.2. Tétel. *Minden valós számsorozatnak létezik monoton részsorozata.*

5.4.2. Következmény (Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Minden korlátos valós számsorozatnak létezik konvergens részsorozata.*



5.5. Cauchy-sorozatok

5.5.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat **Cauchy-sorozat**, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $N(\varepsilon) > 0$ szám, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N(\varepsilon)$, akkor*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

5.5.1. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium). *Egy valós számsorozat **akkor és csakis akkor** konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

5.6. Konvergencia és műveletek

5.6.1. Tétel. *Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$ és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, illetve $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan valós számsorozatok, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ és $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Legyen továbbá $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor*

(i) az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$;

(ii) a $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty}(\lambda x_n) = \lambda x$;

(iii) az $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$;

(iv) ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $y_n \neq 0$ és $y \neq 0$, akkor az $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$.

5.6.1. Következmény. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan valós számsorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ekkor tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén az $\left(x_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = x^k.$$

5.6.2. Következmény. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan valós számsorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ és legyen P egy valós polinom. Ebben az esetben a $(P(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n) = P(x).$$

5.6.3. Következmény. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy korlátos, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pedig egy nullsorozat. Ekkor az $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

5.7. Konvergencia és rendezés

5.7.1. Tétel. *Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan valós számsorozatok, melyeknek létezik az $x \in \overline{\mathbb{R}}$ és $y \in \overline{\mathbb{R}}$ határértéke. Ha*

$$x_n \leq y_n$$

teljesül legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével, akkor

$$x \leq y.$$

5.7.1. Következmény (A jeltartás tétele). *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan valós számsorozat, melynek létezik a bővített valós számok halmazában a határértéke. Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$, ekkor*

$$\mathrm{sign}(x_n) = \mathrm{sign}(x)$$

teljesül legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével.

5.7.2. Tétel (Rendőr-elv). *Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan valós számsorozatok, hogy*

(i)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n;$$

(ii) minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n \leq z_n \leq y_n.$$

Ekkor a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

5.8. Nevezetes sorozatok és határértékeik

5.8.1. Állítás. *Legyen $r \in \mathbb{Q}, r > 0$ és*

$$x_n = \frac{1}{n^r} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0.$$

5.8.2. Állítás. *Legyen $r \in \mathbb{Q}, r > 0$ és*

$$x_n = n^r \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens és

$$\lim_{n\to\infty} n^r = +\infty.$$

5.8.1. Következmény. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ és $a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tekintsük az*

$$x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens és

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha} \quad a_k > 0 \\ -\infty, & \text{ha} \quad a_k < 0. \end{cases}$$

5.8.3. Állítás. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és tekintsük az*

$$x_n = \frac{a^n}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat minden $a \in \mathbb{R}$ esetén konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

5.8.4. Állítás. *Tekintsük az*

$$x_n = \sqrt[n]{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

5.8.5. Állítás. *Legyen*

$$x_n = \sqrt[n]{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

5.8.6. Állítás. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, mely esetén léteznek olyan $a, b > 0$ és $N > 0$ számok, hogy minden $n > N$ esetén $a < x_n < b$. Tekintsük az*

$$y_n = \sqrt[n]{x_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

Speciálisan, tetszőleges $a > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

5.8.1. Tétel. *Tekintsük az*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Ez a sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

5.8.2. Következmény. *Legyen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan sorozat, mely vagy $+\infty$–hez, vagy $-\infty$–hez divergál, és tekintsük az*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e.$$

5.8.7. Állítás. *Tekintsük az*

$$x_n = \frac{n!}{n^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Ekkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

5.8.8. Állítás. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és tekintsük az*

$$x_n = \frac{n^k}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat minden $k \in \mathbb{N}$ esetén konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0.$$

5.8.9. Állítás. *Tekintsük az*

$$x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Ekkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n}} = e.$$

5.8.2. Tétel. *Tekintsük az $x_n = q^n, n \in \mathbb{N}$ úgynevezett **geometriai sorozat**ot.*

- *ha $|q| < 1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$;*
- *ha $q = 1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke 1;*
- *ha $q > 1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $+\infty$–hez divergál;*
- *ha $q = -1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos és divergens;*
- *ha $q < -1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos és divergens.*

5.8.3. Tétel. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan konvergens sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n \in]-1, 1[$ és tekintsük az*

$$y_n = x_n^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot. Ekkor az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} x_n^n = 0.$$

5.9. Sorozatok torlódási pontjai

5.9.1. Definíció. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy az $x \in \overline{\mathbb{R}}$ bővített valós szám az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **torlódási pont**ja, ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak van olyan $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, melyre*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

5.9.1. Tétel. *Az $x \in \overline{\mathbb{R}}$ bővített valós szám pontosan akkor torlódási pontja az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, ha az x tetszőleges környezetében végtelen sok sorozatelem van.*

5.9.1. Megjegyzés.
- *Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, akkor a sorozat határéterke torlódási pontja az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak.*
- *A bővített valós számok halmazában minden valós számsorozatnak van torlódási pontja.*

5.9.2. Definíció. *Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat torlódási pontjai halmazának pontos alsó korlátját a sorozat **limesz inferior**ának hívjuk, és rá a $\liminf_{n\to\infty} x_n$ jelölést használjuk.*
*Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat torlódási pontjai halmazának pontos felső korlátját a sorozat **limesz superior**ának hívjuk, és rá a $\limsup_{n\to\infty} x_n$ jelölést használjuk.*

5.9.2. Megjegyzés. *Tetszőleges* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat esetén*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

5.9.2. Tétel. *Az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat akkor és csakis akkor konvergens, ha*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

teljesül.

6. fejezet

Valós számsorok

6.1. Alapfogalmak és kapcsolatuk

6.1.1. Definíció. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat, és*

$$\sigma_1 = x_1, \qquad \sigma_n = x_1 + \cdots + x_n \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)\,.$$

A $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot a $\sum x_n$ ***sor részletösszeg-sorozatá****nak hívjuk. Ha a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak létezik a határértéke, akkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

értéket a ***sor összegé****nek nevezzük, és ebben az esetben azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor* ***konvergens****.*

6.1.2. Definíció. *Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy valós sor. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ sor konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$* ***sor abszolút konvergens****. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor a szóban forgó sort* ***feltételesen konvergens****nak hívjuk.*

6.1.1. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

valós sor konvergens és a sor összege 1*. Ugyanis az $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ $(n \in \mathbb{N})$ jelöléssel $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ és*

$$\sigma_n = x_1 + \cdots x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

így a fenti sor $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részletösszeg-sorozat konvergens és a határértéke egy, ezért a fenti sor konvergens és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

6.1.2. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

valós sor divergens. Ugyanis az $x_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$ jelöléssel

$$\sigma_n = x_1 + \cdots x_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty,$$

így a fenti sor $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részletösszeg-sorozat divergens ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = +\infty.$$

6.1.1. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium sorokra). *A $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ valós sor akkor és csakis akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N(\varepsilon) > 0$ szám, hogy*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| < \varepsilon$$

teljesül, amennyiben $n, m > N(\varepsilon)$.

6.1.2. Tétel (Abszolút konvergencia $\Longrightarrow$ konvergencia). *Ha egy valós számsor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

6.1.1. Következmény. *Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.*

6.2. Műveletek sorokkal

6.2.1. Tétel. *Legyenek $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergens sorok és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + y_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$ sorok is konvergensek és*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

valamint

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| .$$

6.2.1. Definíció. *Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy valós sor és $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy szigorúan monoton növekedő természetes számokból álló sorozat. Ekkor a*

$$\sum \left(\sum_{l=k_{n-1}+1}^{k_n} x_l \right)$$

*sort a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor **csoportosított sorá**nak nevezzük.*

6.2.2. Tétel. *Egy konvergens sor bármely csoportosított sora konvergens, és a csoportosított sor összege megegyezik az eredeti sor összegével.*

6.2.2. Definíció. *Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy valós sor és $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy bijektív leképezés. Ekkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$$

*sort a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor **átrendezésé**nek hívjuk.*

6.2.3. Tétel. *Egy abszolút konvergens sor bármely átrendezése is abszolút konvergens, és az átrendezett sor összege megegyezik az eredeti sor összegével.*

6.2.4. Tétel (Riemann-féle átrendezési tétel). *Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy feltételesen konvergens valós számsor. Ekkor bármely két $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \leq \beta$ bővített valós szám esetén létezik a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sornak olyan $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ átrendezése, hogy*

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)} \quad \textit{és} \quad \beta = \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}.$$

6.3. Konvergenciakritériumok

6.3.1. Tétel (Összehasonlító kritérium). *Legyenek $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ olyan nemnegatív tagú sorok, hogy $x_n \leq y_n$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor,*

— *ha $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ is konvergens;*

— *ha $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ is divergens.*

6.3.2. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). *Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy valós sor.*

— *Ha $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens.*

— *Ha $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens.*

6.3.1. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$$

sor abszolút konvergens, hiszen, ha $x_n = \dfrac{2n}{3^n}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2n}{3^n}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

így a Cauchy-féle gyökkritérium miatt a fenti valós számsor valóban abszolút konvergens.

6.3.3. Tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium). *Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ egy olyan valós sor, melynek minden tagja nullától különböző.*

— *Ha $\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens.*

— *Ha $\liminf_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens.*

6.3.2. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$$

valós számsor divergens, hiszen, ha $x_n = \dfrac{n!}{5^n}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = +\infty > 1,$$

így a D'Alembert-féle hányadoskritérium miatt a fenti sor valóban divergens.

6.3.4. Tétel (Cauchy-féle ritkítási kritérium). *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy nemnegatív tagú, monoton csökkenő valós számsorozat. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ valós sor pontosan akkor konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ sor konvergens.*

6.3.3. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$

valós számsor divergens, hiszen, ha $x_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$*, akkor*

$$2^n x_{2^n} = \frac{2^n}{n\ln(2)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Azonban a $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n\ln(2)}$ *sor divergens (ez például a Cauchy-féle gyökkritérium segítségével látható be), ezért a Cauchy-féle ritkítási kritérium felhasználásával adódik, hogy a fenti sor valóban divergens.*

6.3.5. Tétel (Leibniz-kritérium alternáló sorokra). *Legyen* (x_n) *egy monoton nullsorozat, ekkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$$

sor konvergens.

6.3.4. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{3^n}$$

sor konvergens, hiszen az

$$x_n = \frac{2}{3^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

valós számsorozat egy monoton nullsorozat. Így az alternáló sorokra vonatkozó Leibniz kritérium miatt a fenti sor konvergens. Könnyű igazolni, hogy ez a sor nemcsak konvergens, hanem abszolút konvergens is.

Ezzel szemben a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n}$ *sor egy olyan valós számsorozat, ami konvergens, de nem abszolút konvergens, egyszóval feltételesen konvergens. Ennek igazolásához szintén az alternáló sorokra vonatkozó Leibniz kritérium használható, az pedig, hogy ez a sor nem abszolút konvergens, a harmonikus sorok konvergenciájára vonatkozó állítás azonnal következménye.*

6.3.6. Tétel. *Legyenek* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *olyan pozitív tagú sorok, melyekre létezik és pozitív a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

határérték. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *sorok egyszerre konvergensek, illetve egyszerre divergensek.*

6.3.5. Példa. *A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n^2 + 1}$$

valós sor konvergens, hiszen, ha

$$x_n = \frac{1}{n^3 - n^2 + 1} \quad \text{és} \quad y_n = \frac{1}{n^3} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n^3 - n^2 + 1}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{n^3}{n^3 - n^2 + 1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 > 0$$

Mivel létezik és pozitív a $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ *határérték és a* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ *sor konvergens, ezért a* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 - n^2 + 1}$ *sor is az.*

6.3.7. Tétel (A harmonikus sor). *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$, ekkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

sor

— *abszolút konvergens, ha $\alpha > 1$*

— *divergens, ha $\alpha \leq 1$.*

6.3.8. Tétel (A geometriai sor). *Legyen $q \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|q| < 1$, ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ sor konvergens, és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

7. fejezet

Topológiai alapfogalmak $\mathbb{R}$-ben

7.0.1. Definíció. *Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, ekkor a*

$$G(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\},$$

illetve a

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq r\},$$

halmazokat rendre az x_0 pont r sugarú ***nyílt****, illetve* ***zárt környezet****einek nevezzük.*

7.0.1. Megjegyzés. *Ha $x_0 \in \mathbb{R}$ és $r > 0$, akkor*

$$G(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[\quad \text{és} \quad B(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r].$$

7.0.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $D \subset \mathbb{R}$ halmaz* ***nyílt****, ha bármely $x_0 \in D$ esetén van olyan $r > 0$, hogy $G(x_0, r) \subset D$ teljesül.*

7.0.3. Definíció. *Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont* ***torlódási pont****ja a D halmaznak, ha bármely $r > 0$ esetén $G(x_0, r) \cap D \neq \emptyset$. A D halmaz torlódási pontjainak halmazára a továbbiakban a D' jelölést fogjuk alkalmazni.*

7.0.4. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, az $x_0 \in D$ pontot a D halmaz* ***izolált pont****jának hívjuk, ha van olyan $r > 0$, hogy $G(x_0, r) \cap D = \{x_0\}$.*

7.0.5. Definíció. *A $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmazt* ***zárt****nak nevezzük, ha $D = D \cup D'$ teljesül.*

7.0.1. Állítás. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, ekkor az alábbi két állítás ekvivalens*

(i) D nyílt halmaz;

(ii) $\mathbb{R} \setminus D$ zárt halmaz.

7.0.6. Példa. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ekkor*

— $]a, b[$ *nyílt halmaz;*

— $[a, b]$ *zárt halmaz;*

— *minden véges halmaz zárt;*

— $[a, b[$ *se nem nyílt, se nem zárt.*

7.0.6. Definíció. *A $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz **nyílt lefedés**én nyílt halmazok egy olyan $\left(G_\gamma\right)_{\gamma\in\Gamma}$ rendszerét értjük, melyre*

$$D \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma.$$

7.0.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $D \subset \mathbb{R}$ halmaz **kompakt**, ha a D halmaz minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedés.*

7.0.7. Példa. — *a* $]0, 1[$ *halmaz nem kompakt;*

— *a* $[0, +\infty[$ *halmaz nem kompakt;*

— *tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén az $[a, b]$ halmaz kompakt;*

— *minden véges halmaz kompakt.*

7.0.9. Tétel (Heine–Borel). *A $D \subset \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

7.0.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $D \subset \mathbb{R}$ halmaz **összefüggő**, ha D nem állítható elő két nemüres diszjunkt nyílt halmaz uniójaként.*

7.0.8. Példa. — *a* $[0, 1]$ *halmaz összefüggő;*

— *a* $]0, 1[\cup]1, 2[$ *halmaz nem összefüggő.*

7.0.10. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *D összefüggő halmaz;*

(ii) *ha $x, y \in D$ és $z \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $x < z < y$, akkor $z \in D$.*

8. fejezet

Valós függvények folytonossága

8.1. Alapfogalmak és kapcsolatuk

8.1.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, ekkor az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvényt* ***valós függvény****nek nevezzük.*

8.1.2. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény* ***folytonos az*** *$x_0 \in D$* ***pontban****, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ olyan, hogy $|x - x_0| < \delta$, akkor*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ha az f függvény a D halmaz minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény ***folytonos a*** *D* ***halmazon****.*

8.1.1. Példa. *A*

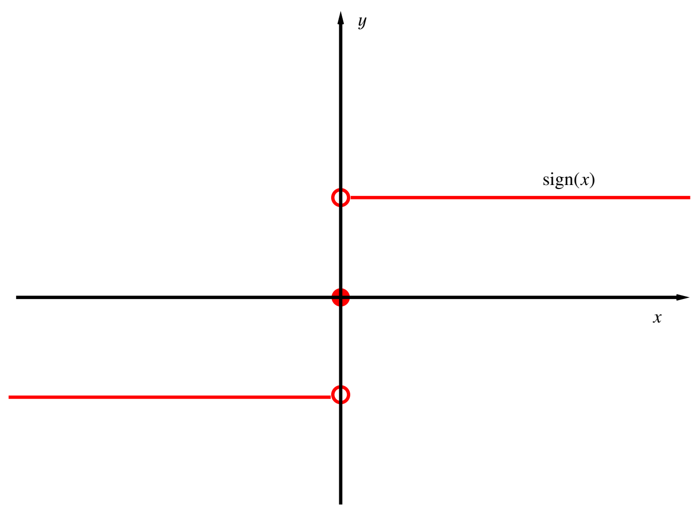
$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

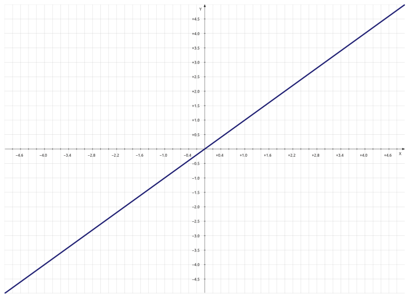
signum függvény nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

8.1.2. Példa. *Az*

$$f(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

identikus függvény minden pontban folytonos.





8.1.3. Példa. *Az*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & ha\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

úgynevezett ***Dirichlet-függvény*** *egyetlen pontban sem folytonos.*

8.1.1. Tétel (Átviteli elv). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Az f függvény akkor és csakis akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D halmazbeli elemekből álló, x_0-hoz konvergáló sorozat esetén az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $f(x_0)$-hoz konvergál.*

8.1.1. Megjegyzés. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Az f függvény akkor és csakis akkor nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D halmazbeli elemekből álló, x_0-hoz konvergáló sorozat, melyre az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem $f(x_0)$-hoz konvergál.*

8.2. Folytonosság és műveletek

8.2.1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz. Ha az $f, g : D \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in D$ pontban, akkor*

(i) az $f + g$ függvény is folytonos az x_0 pontban;

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a λf függvény is folytonos az x_0 pontban;

(iii) az $f \cdot g$ függvény is folytonos az x_0 pontban;

(iv) ha tetszőleges $x \in D$ esetén $g(x) \neq 0$, akkor az $\dfrac{f}{g}$ függvény is folytonos az x_0 pontban.

8.2.2. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz és legyenek $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : f(D) \to \mathbb{R}$ adott függvények. Ha az f függvény folytonos az $x_0 \in D$ pontban, a g pedig az $f(x_0) \in f(D)$ pontban, akkor a $g \circ f$ függvény folytonos az x_0 pontban.*

8.3. Folytonosság és topologikus fogalmak

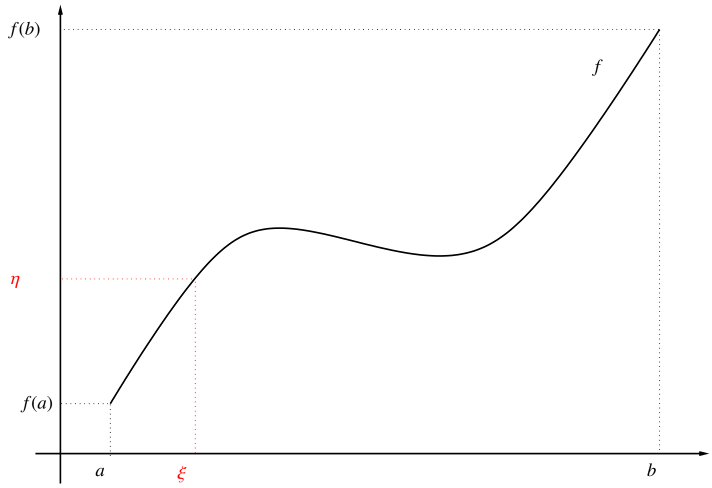
8.3.1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, ekkor az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos a D halmazon, ha tetszőleges $V \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz esetén az $f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}$ halmaz nyílt.*

8.3.2. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az $f(D) \subset \mathbb{R}$ halmaz kompakt.*

8.3.3. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f korlátos függvény.*

8.3.4. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ összefüggő halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az $f(D) \subset \mathbb{R}$ halmaz is összefüggő.*

8.3.1. Következmény (Bolzano-féle középértéktétel). *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha $f(a) < f(b)$ és $\eta \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(a) < \eta < f(b)$, akkor van olyan $\xi \in]a, b[$, melyre $f(\xi) = \eta$ teljesül.*



8.4. Egyenletes folytonosság

8.4.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény a D* ***halmazon egyenletesen folytonos****, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$ úgy, hogy ha $x, y \in D$ olyanok, hogy $|x - y| < \delta$, akkor*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

8.4.1. Állítás. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Ha az f függvény a D halmazon egyenletesen folytonos, akkor f a D halmaz minden pontjában folytonos.*

8.4.1. Megjegyzés. *Az*

$$f(x) = x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban folytonos, azonban ez a függvény nem egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en.

8.5. Folytonosság és monotonitás

8.5.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Ha az f függvény az $x_0 \in D$ pontban nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont az f függvénynek* ***szakadási helye****.*

8.5.1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ monoton függvény. Ekkor azoknak a pontoknak a halmaza, melyek az f függvénynek szakadási helyei, megszámlálható számosságú.*

9. fejezet

Függvények határértéke

9.1. Alapfogalmak

9.1.1. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek* ***az x_0 pontban a határértéke*** *α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*

9.1.2. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$. az f függvénynek* ***az x_0 pontban a határértéke*** *$+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) > K$. Erre a $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

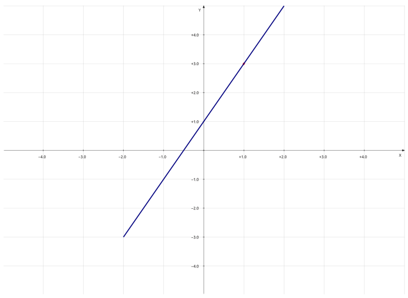
9.1.3. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek* ***az x_0 pontban a határértéke*** *$-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) < k$. Erre a $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

9.1.1. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = 2x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

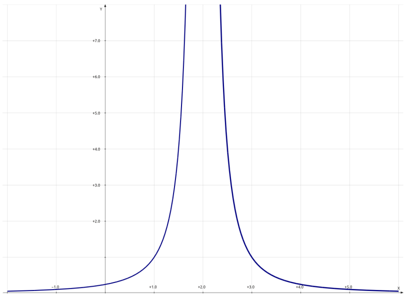


9.1.2. Példa. *Legyen*

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Ekkor

$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty.$$



9.1.4. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geq K$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*

9.1.5. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leq k$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*

9.1.6. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $K^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geq K^*$, akkor $f(x) \geq K$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

9.1.7. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely felülről nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $K^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geq K^*$, akkor $f(x) \leq k$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

9.1.8. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $k^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leq k^*$, akkor $f(x) \geq K$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

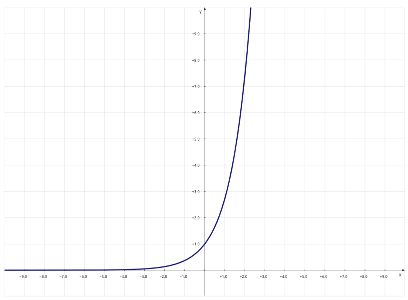
9.1.9. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ egy olyan halmaz, mely alulról nem korlátos, $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $k^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leq k^*$, akkor $f(x) \leq k$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

9.1.3. Példa. *Legyen*

$$f(x) = e^x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ekkor

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

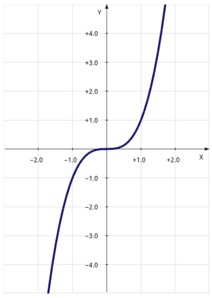


9.1.4. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$



9.1.1. Tétel (Átviteli elv). *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, *illetve* $x_0 \in D'$ *és* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Ekkor* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ *pontosan akkor teljesül, ha tetszőleges* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D*–beli,* x_0*–hoz konvergáló sorozat esetén* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ *teljesül.*

9.2. Határértéke és folytonosság kapcsolata

9.2.1. Tétel. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ *és* $x_0 \in D$. *Ekkor az* f *függvény pontosan akkor folytonos az* x_0 *pontban, ha létezik a* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *határérték, és*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

9.3. Határérték és műveletek

9.3.1. Tétel. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ $f, g : D \to \mathbb{R}$, *illetve* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Ha az* f *és* g *függvényeknek létezik a határértéke az* x_0 *pontban és*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \beta,$$

akkor

(i) az $f + g$ *függvénynek is létezik az* x_0 *pontban a határértéke*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta;$$

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ *esetén a* $\lambda \cdot f$ *függvénynek is létezik az* x_0 *pontban a határértéke és*

$$\lim_{x\to x_0} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \alpha;$$

(iii) az $f \cdot g$ *függvénynek is létezik az* x_0 *pontban a határértéke és*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$$

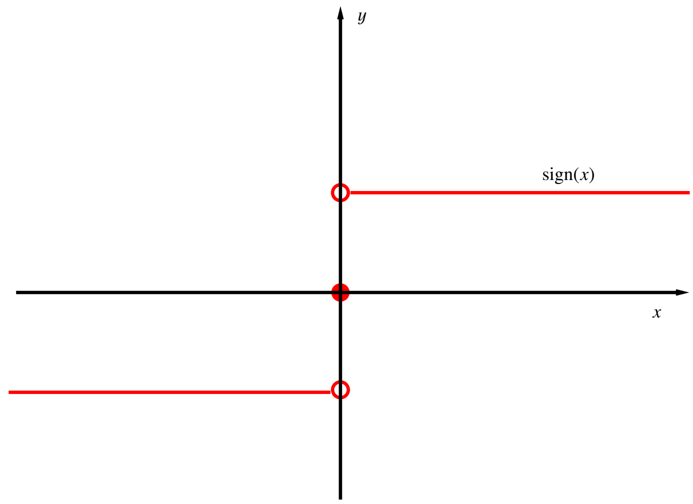
(iv) az $\dfrac{f}{g}$ *függvénynek is létezik a határértéke az* x_0 *pontban és*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta},$$

feltéve, hogy $\beta \neq 0$ *és* $g(x) \neq 0$ *teljesül minden* $x \in D$ *esetén.*

9.3.1. Definíció. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ $f : D \to \mathbb{R}$. *Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek az* x_0 *pontban létezik a* ***jobboldali határértéke****, ha van olyan* $\alpha \in \mathbb{R}$, *hogy bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik olyan* $\delta > 0$, *hogy ha* $x \in D$ *olyan, hogy* $x_0 < x < x_0 + \delta$, *akkor* $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ *teljesül.*

Erre a $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \alpha$ *jelölést fogjuk használni.*



9.3.2. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ $f : D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban létezik a* ***baloldali határértéke****, ha van olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ olyan, hogy $x_0 - \delta < x < x_0$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ teljesül.*

Erre a $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \alpha$ jelölést fogjuk használni.

9.3.1. Példa. *Tekintsük a*

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x > 0 \\ 0, & ha\ x = 0 \\ -1, & ha\ x < 0 \end{cases}$$

módon megadott $\operatorname{sign} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor

$$\lim_{x \to 0+0} \operatorname{sign}(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 0-0} \operatorname{sign}(x) = -1$$

9.3.1. Állítás. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ $f : D \to \mathbb{R}$. Ha az f függvénynek létezik az x_0 pontban a határértéke, akkor f-nek az x_0 pontban létezik a bal- és a jobboldali határértéke is és*

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

9.4. Szakadási helyek osztályozása

9.4.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f \colon D \to \mathbb{R}$. Ha az x_0 pont az f függvénynek szakadási helye és léteznek a $\lim_{x \to x_0-0} f(x)$ és $\lim_{x \to x_0+0} f(x)$ bal- és jobboldali határértékei az f függvénynek az x_0 pontban, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban* ***elsőfajú szakadás*** *van.*

Ha még az is teljesül, hogy

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = \lim_{x \to x_0+0} f(x),$$

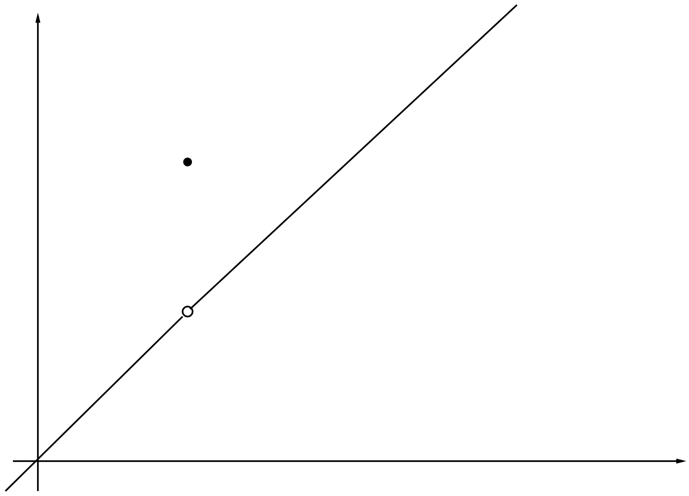
akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban ***megszüntethető szakadás****a van.*

Ha az f függvénynek az x_0 pontban szakadása van és az nem elsőfajú, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban ***másodfajú szakadás****a van.*

9.4.1. Példa. *Az*

$$f(x) = \begin{cases} x, & ha\ x \neq 2 \\ 4, & ha\ x = 2 \end{cases}$$

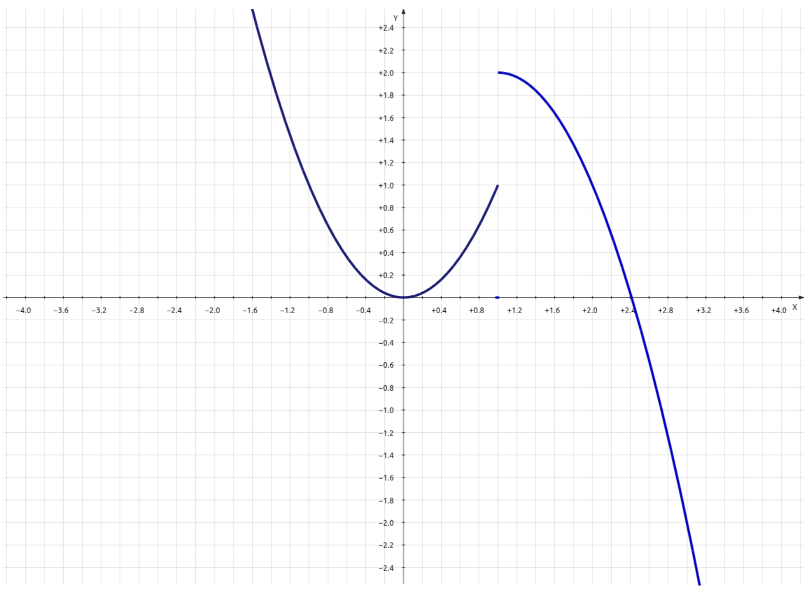
módon megadott $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 = 2$ pontban megszüntethető szakadása van.



9.4.2. Példa. *Az*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & ha\ x < 1 \\ 0, & ha\ x = 1 \\ 2 - (x-1)^2, & ha\ x > 1 \end{cases}$$

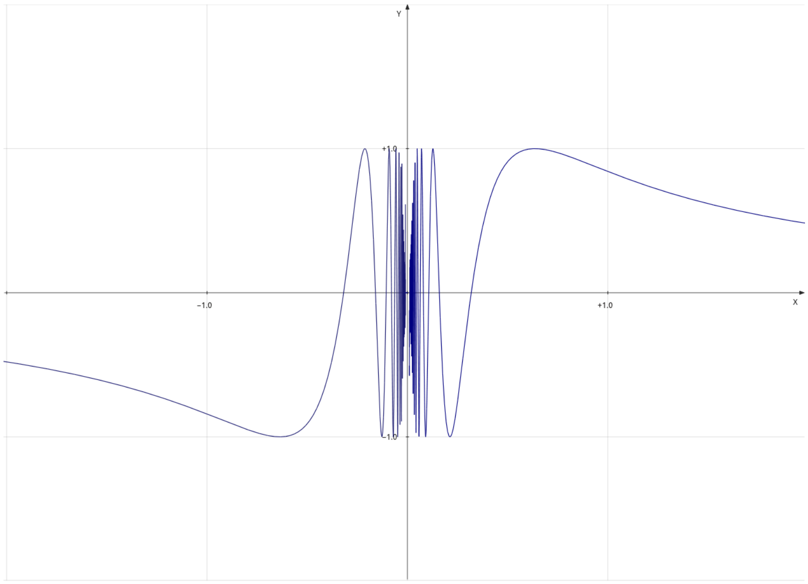
módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $x_0 = 1$ *pontban elsőfajú, nem megszüntethető szakadása van.*



9.4.3. Példa. *Az*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & ha\ x \neq 0 \\ 0, & ha\ x = 0 \end{cases}$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $x_0 = 0$ *pontban másodfajú szakadása van.*


Y
+1.0
−1.0
X
+1.0
−1.0

10. fejezet

Függvénysorozatok és függvénysorok

10.1. Függvénysorozatok

10.1.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, ($n \in \mathbb{N}$) és $x \in D$. Ha az $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat konvergens, akkor azt mondjuk, hogy* ***az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az x pontban konvergens****.*

Ha ez a D halmaz minden pontjában teljesül, akkor azt mondjuk, hogy ***az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a D halmazon pontonként konvergens****.*

A

$$\{x \in D \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergens}\}$$

halmazt pedig az az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat ***konvergenciahalmaz****ának hívjuk.*

10.1.2. Definíció. *Ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a D halmazon pontonként konvergens, akkor az*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in D)$$

módon értelmezett $f \colon D \to \mathbb{R}$ függvényt az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat ***határfüggvény****ének nevezzük.*

10.1.1. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium függvénysorozatok pontonkénti konvergenciájára). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, ($n \in \mathbb{N}$) és $x \in D$. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor konvergens az x pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N > 0$, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N$, akkor*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

10.1.3. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, ($n \in \mathbb{N}$). Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a D halmazon pontonként konvergens, és jelölje a határfüggvényét f. Akkor mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a D halmazon* ***egyenletesen konvergens****, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N > 0$, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $n > N$, akkor*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

teljesül ***minden*** *$x \in D$ esetén.*

10.1.1. Megjegyzés. *Egyenletes konvergencia $\Longrightarrow$ pontonkénti konvergencia*

10.1.2. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium függvénysorozatok egyenletes konvergenciájára). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens a D halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N > 0$, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N$, akkor*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

10.1.3. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ és*

$$M_n = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \,.$$

Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor konvergál egyenletesen az f függvényhez, ha

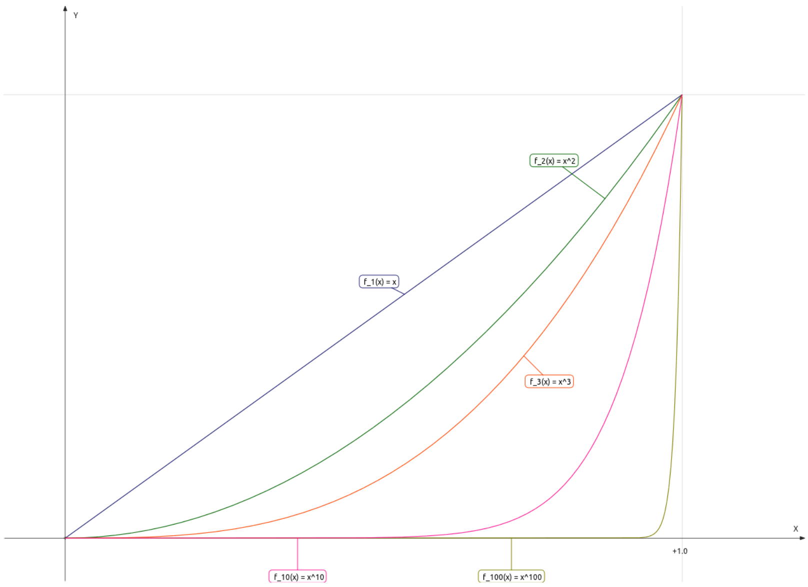
$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

10.1.1. Példa. *Legyen*

$$f_n(x) = x^n \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}) \,.$$

Ekkor az $(f_n)_n$ függvénysorozat a $[0,1]$ halmazon pontonként konvergens, de egyenletesen nem. A függvénysorozat határfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x = 1 \\ 0, & ha\ x \in [0,1[\end{cases}$$



10.1.2. Példa. *Legyen*

$$f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos(m!x\pi))^{2n} = \begin{cases} 1, & ha\ m!x \in \mathbb{Z} \\ 0, & egyébként \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N})$$

Ekkor az $(f_m)_m$ függvénysorozat pontonként konvergens a valós számok halmazán, de egyenletesen nem. A függvénysorozat határfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & ha\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

10.2. Függvénysorok

10.2.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ és $x \in D$. A*

$$\sigma_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) \qquad (x \in D,\ n \in \mathbb{N})$$

*módon értelmezett $(\sigma_n)_n$ függvénysorozatot az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat **részletösszeg-sorozatának** hívjuk.*

*Azt mondjuk, hogy **a $\sum f_n$ függvénysor az** $x \in D$ **pontban konvergens**, ha a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysor az $x \in D$ pontban konvergens. Ekkor a $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)$ valós számot a $\sum f_n$ függvénysor x **pontbeli összegének** hívjuk, és a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ módon jelöljük.*

*Akkor mondjuk, hogy a $\sum f_n$ függvénysor az $x \in D$ pontban **abszolút konvergens**, ha a $\sum |f_n|$ függvénysor az x pontban konvergens.*

*Ha a $\sum f_n$ függvénysor a D halmaz minden pontjában konvergens, akkor azt mondjuk, hogy ez a függvénysor a D halmazon **pontonként konvergens**.*

Ha a $\sum f_n$ függvénysor a D halmazon pontonként konvergens, akkor az

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in D)$$

*módon értelmezett $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvényt a $\sum f_n$ függvénysor **határfüggvényének** nevezzük.*

10.2.1. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium függvénysorok pontonkénti konvergenciájára). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ és $x \in D$. Az $\sum f_n$ függvénysor pontosan akkor konvergens az x pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N > 0$, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N$, akkor*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

teljesül.

10.2.2. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium függvénysorok egyenletes konvergenciájára). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ és $x \in D$. Az $\sum f_n$ függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens a D halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N > 0$, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N$, akkor*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

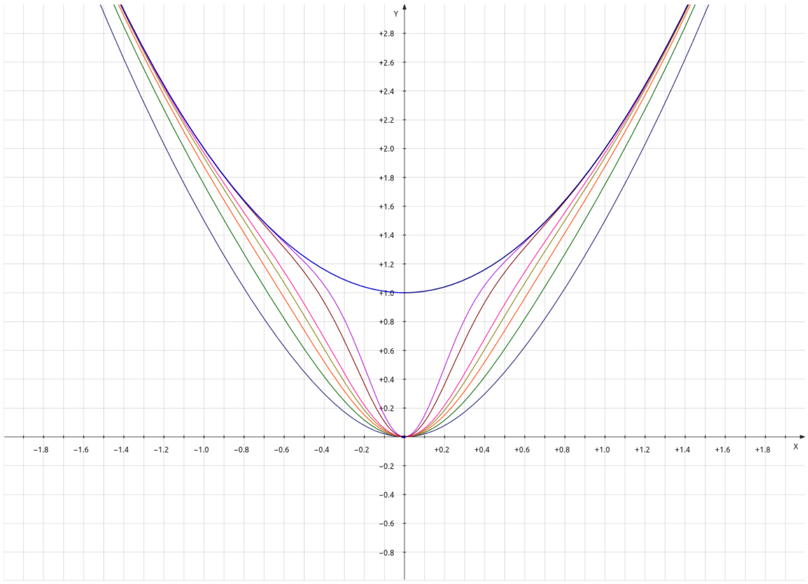
*teljesül **minden** $x \in D$ esetén.*

10.2.1. Példa. *Legyen*

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1 + x^2)^n} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor a $\sum f_n$ függvénysor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens és

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^n} = \begin{cases} 0, & ha\ x = 0 \\ 1 + x^2, & ha\ x \neq 0 \end{cases}$$



10.3. Egyenletes konvergencia és folytonosság

10.3.1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a D halmazon egyenletesen konvergens, és jelölje a határfüggvényét f. Ekkor az $f \colon D \to \mathbb{R}$ határfüggvény folytonos a D halmazon.*

10.3.2. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$. Ha a $\sum f_n$ függvénysor a D halmazon egyenletesen konvergens, akkor a függvénysor összegfüggvénye folytonos függvény.*

10.3.3. Tétel (Weierstrass-kritérium függvénysorok egyenletes konvergenciájára). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat, hogy*

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad (x \in D,\ n \in \mathbb{N})\,.$$

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ valós számsor konvergens, akkor a $\sum f_n$ függvénysor az egész D halmazon egyenletesen konvergens.

10.3.4. Tétel (Weierstrass approximációs tétele). *Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $\varepsilon > 0$. Ekkor létezik egy olyan P valós polinom, melyre*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

teljesül minden $x \in [a,b]$ esetén

10.3.1. Következmény. *Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik egy olyan polinomokból álló $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, mely az $[a,b]$ intervallumon egyenletesen konvergál az f függvényhez.*

10.4. Hatványsorok

10.4.1. Definíció. *Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat, $x_0 \in \mathbb{R}$ és*

$$f_n(x) = \begin{cases} a_0, & \text{ha } n = 0 \\ a_n(x-x_0)^n, & \text{ha } n \neq 0. \end{cases}$$

Ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ függvénysorozathoz tartozó függvénysort ***hatványsor****nak nevezzük. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ sorozat tagjai a hatványsor* ***együtthatói****, x_0 pedig a hatványsor* ***középpont****ja. A hatványsort a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

szimbólummal is szokás jelölni.

10.4.1. Tétel (Cauchy–Hadamard). *Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ egy hatványsor és*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ekkor

(i) Ha $\alpha = 0$, akkor a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens;

(ii) Ha $0 < \alpha < +\infty$, akkor a hatványsor minden olyan $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens, melyre

$$\alpha\,|x-x_0| < 1$$

és minden olyan $x \in \mathbb{R}$ pontban divergens, melyre $\alpha\,|x-x_0| > 1$;

(iii) Ha $\alpha = +\infty$, akkor a hatványsor csak az x_0 pontban konvergens.

10.4.2. Definíció. *Az fenti jelölések megtartása mellett legyen*

$$\rho = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } \alpha = 0 \\ \dfrac{1}{\alpha}, & \text{ha } 0 < \alpha < +\infty \\ 0, & \text{ha } \alpha = +\infty. \end{cases}$$

A ρ bővített valós számot a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor ***konvergenciasugar****ának hívjuk.*

Ha $\rho > 0$, akkor az

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| < \rho\}$$

halmazt a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor ***konvergenciatartomány****ának nevezzük.*

10.4.1. Példa. *Tekintsük a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^{n+1}}$$

hatványsort. Ekkor a fenti jelölésekkel

$$x_0 = -3 \quad \text{és} \quad a_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ (n \in \mathbb{N}).$$

Így

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{2},$$

ezért a hatványsor konvergenciasugara 2. Így a fenti hatványsor konvergenciatartománya a $]-5,-1[$ intervallum. Ha $x = -5$, akkor a fenti hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2}$, ami divergens. Hasonlóan, ha $x = -1$, akkor a fenti hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$, ami szintén divergens. Ezért a fenti hatványsor konvergenciahalmaza a $]-5,-1[$ intervallum.

10.4.2. Tétel. *A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor a konvergenciatartomány minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens.*

10.4.3. Tétel. *Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara nem nulla, akkor a hatványsor összegfüggvénye egy a konvergenciatartományon folytonos függvény.*

11. fejezet

Elemi függvények

11.1. Az exponenciális függvény

11.1.1. Definíció. *Az*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt* ***exponenciális függvény****nek hívjuk.*

11.1.1. Tétel. *Az exponenciális függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal*

(i)

$$\exp(0) = 1;$$

(ii)

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R});$$

(iii)

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

11.1.2. Tétel. *Az exponenciális függvény*

(i) folytonos;

(ii) szigorúan monoton növekedő;

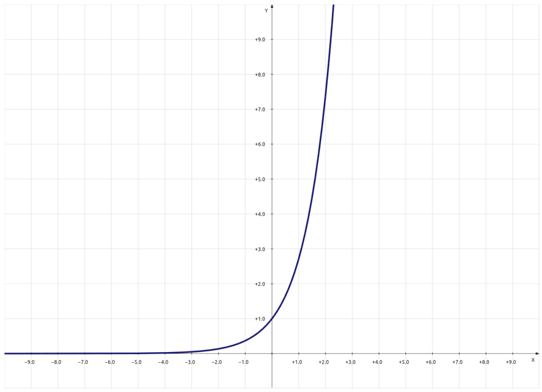
(iii) értékkészlete a pozitív valós számok halmaza;

(iv)

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$

11.1.3. Tétel.

$$\exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$



11.2. A logaritmus függvény

11.2.1. Definíció. *Az exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, így invertálható. Az inverzét **logaritmus függvény**nek nevezzük, és rá az* $\ln$ *jelölést használjuk.*

Tehát a logaritmus függvény az az $\ln\colon\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\exp(\ln(x)) = x \qquad (x\in]0,+\infty[)\,.$$

11.2.1. Tétel. *Az* $\ln\colon\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal*

(i)
$$\ln(1) = 0;$$

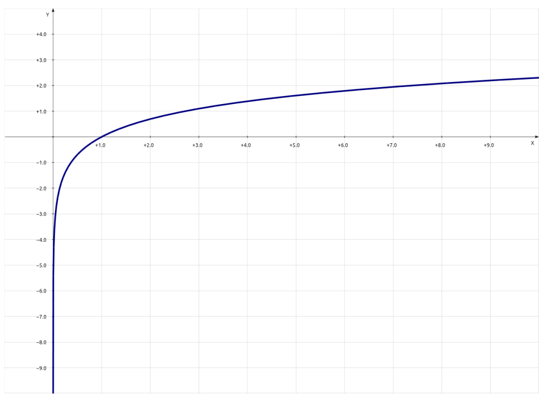
(ii)
$$\ln(x\cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \qquad (x,y\in]0,+\infty[)\,;$$

(iii)
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \qquad (x\in]0,+\infty[)\,;$$

(iv) folytonos;

(v) szigorúan monoton növekedő;

(vi)
$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to0+}\ln(x) = -\infty.$$



11.3. A hiperbolikus függvények

11.3.1. Definíció. *A*

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

illetve a

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott függvényeket rendre ***cosinus hiperbolicus****, illetve* ***sinus hiperbolicus*** *függvényeknek nevezzük.*

11.3.1. Tétel. *Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

11.3.2. Tétel. *A cosinus hiperbolicus, illetve a sinus hiperbolicus függvények rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal*

(i) *mindkét függvény folytonos;*

(ii) $\cosh(0) = 1$ *és* $\sinh(0) = 0$;

(iii) $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(x) + \sinh(x)\sinh(x) \qquad (x, y \in \mathbb{R});$

(iv) $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$

(v) $\cosh(x) = \cosh(-x)$ *és* $\sinh(x) = -\sinh(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$

(vi) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$

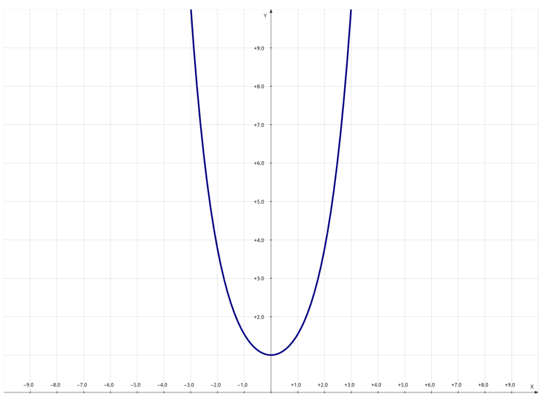
11.3.2. Definíció. *A*

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cos(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

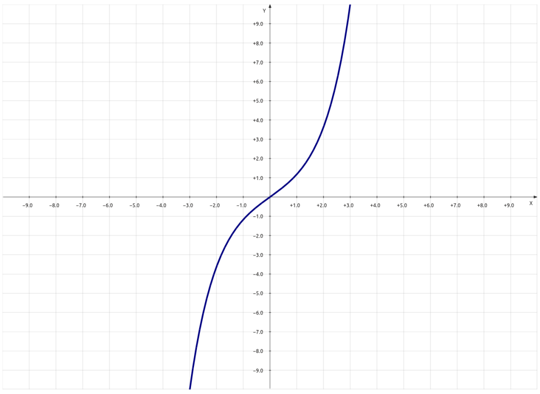
illetve a

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

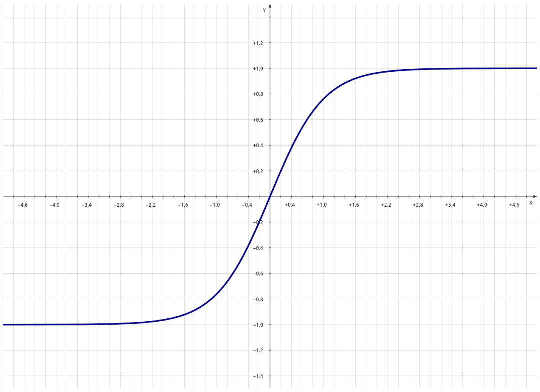
módon megadott függvényeket ***tangens hiperbolicus****, illetve* ***cotangens hiperbolicus*** *függvényeknek hívjuk.*



11.1. ábra. A cosinus hiperbolicus függvény



11.2. ábra. A sinus hiperbolicus függvény



11.3. ábra. A tangens hiperbolicus függvény

11.4. A trigonometrikus függvények

11.4.1. Definíció. *A*

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

illetve a

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon értelmezett függvényeket rendre ***cosinus****, illetve* ***sinus*** *függvényeknek nevezzük.*

11.4.1. Tétel. *(i)*

$$\cos(0) = 1 \quad \textit{és} \quad \sin(0) = 0;$$

(ii)

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

(iii)

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \qquad (x, y \in \mathbb{R});$$

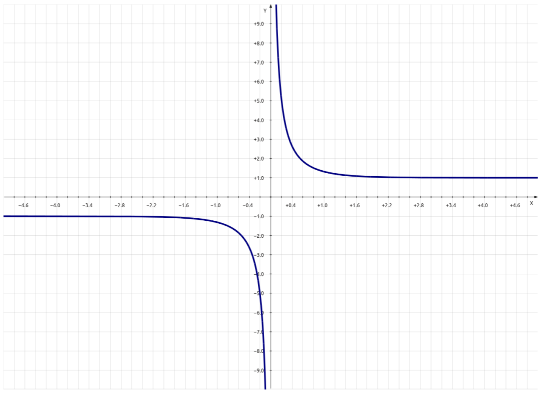
(iv)

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \textit{és} \quad \sin(-x) = -\sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R});$$

(v)

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

11.4.1. Állítás. *Létezik olyan α valós szám, melyre $0 < \alpha < 2$ és $\cos(\alpha) = 0$.*



11.4. ábra. A cotangens hiperbolicus függvény

11.4.2. Állítás. *A cosinus függvény pozitív zérushelyei között van legkisebb.*

11.4.2. Definíció. *A cosinus függvény legkisebb pozitív zérushelyének kétszeresét π-vel jelöljük.*

11.4.2. Tétel. *(i) a cosinus és a sinus függvény értékkészlete* $[-1, 1]$*;*

(ii)

$$\sin(0) = \sin(\pi) = 0$$

(iii)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

11.4.3. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $p \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $x \in D$ esetén $x + p \in D$ is teljesül. Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény p* ***szerint periodikus****, ha minden $x \in D$ esetén*

$$f(x + p) = f(x)$$

teljesül.

11.4.3. Tétel. *A cosinus és a sinus függvények 2π szerint periodikusak.*

11.4.4. Tétel. *A cosinus függvény zérushelyei a $\frac{\pi}{2}$ páratlan egész számú többszörösei. A sinus függvény zérushelyei a π egész számú többszörösei.*

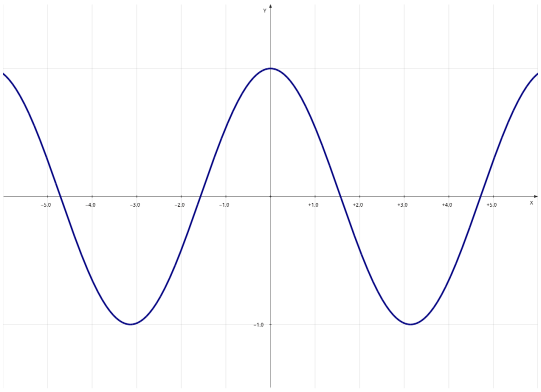
11.4.4. Definíció. *A*

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \left(x \in \mathbb{R}, x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right),$$

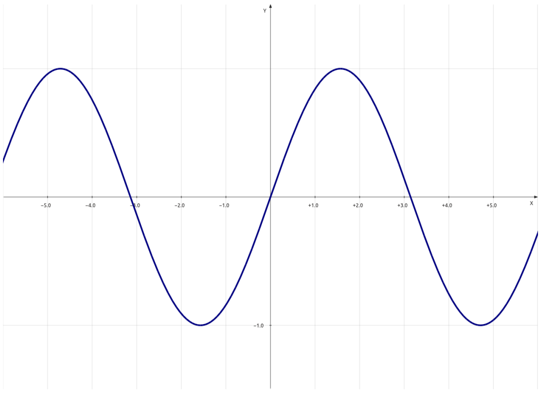
illetve a

$$\mathrm{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi)$$

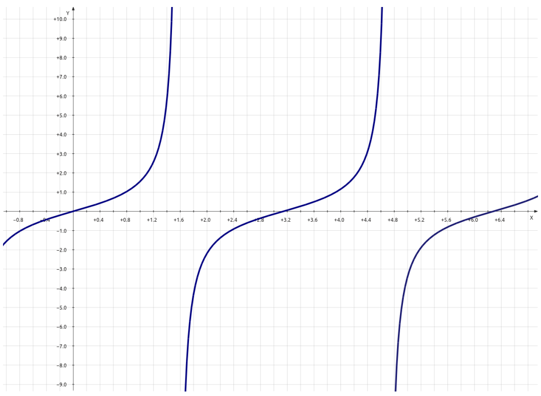
módon megadott függvényeket rendre ***tangens****, illetve* ***cotangens*** *függvényeknek hívjuk.*



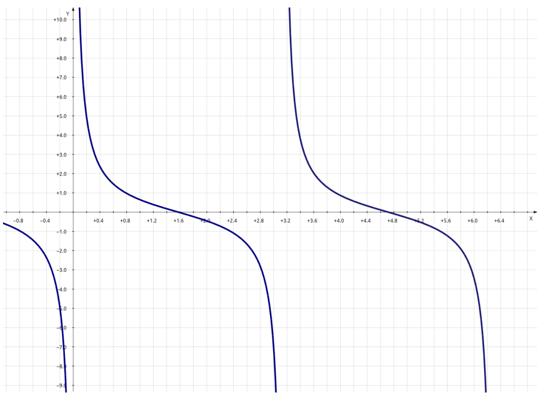
11.5. ábra. A cosinus függvény



11.6. ábra. A sinus függvény



11.7. ábra. A tangens függvény



11.8. ábra. A cotanges függvény

12. fejezet

Valós függvények differenciálhatósága

12.1. Alapfogalmak és kapcsolatuk

12.1.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor a*

$$\varphi(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (x, x_0 \in D,\ x \neq x_0)$$

mennyiséget az f függvény x és x_0 pontokhoz tartozó ***differenciahányados függvény****ének nevezzük.*

12.1.2. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz és $x_0 \in D$. Azt mondjuk, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény* ***differenciálható az** $x_0 \in D$ **pontban**, ha létezik és véges a*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték. Erre a továbbiakban az $f'(x_0)$ jelölést használjuk és az f függvény x_0 ***pontbeli differenciálhányadosá****nak nevezzük.*

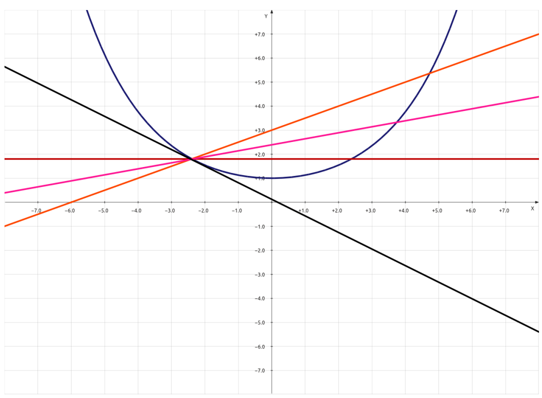
12.1.3. Definíció. *Az előző definíció jelölései mellett azt mondjuk, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény* ***balról differenciálható az** $x_0 \in D$ **pontban**, ha létezik és véges a*

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték. Azt mondjuk továbbá, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény ***jobbról differenciálható az** $x_0 \in D$ **pontban**, ha létezik és véges a*

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték.



12.1.1. Példa. *Legyen $c \in \mathbb{R}$, ekkor az*

$$f(x) = c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0,$$

azaz, tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x_0) = 0.$$

12.1.2. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0,$$

azaz, a fenti f függvény minden pontban differenciálható és

$$f'(x_0) = 2x_0 \qquad (x_0 \in \mathbb{R}).$$

12.1.4. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz és $x_0 \in D$. Azt mondjuk, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény **lineárisan approximálható az** $x_0 \in D$ **pontban**, ha létezik egy olyan $A \in \mathbb{R}$ és egy olyan $\omega\colon D \to \mathbb{R}$, hogy*

$$\lim_{x\to x_0} \omega(x) = 0$$

és

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0) \qquad (x \in D)$$

teljesül.

12.1.1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in D$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

— *az f függvény differenciálható az x_0 pontban;*

— *az f függvény lineárisan approximálható az x_0 pontban.*

12.1.2. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in D$. Ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor az f ebben a pontban folytonos is.*

12.1.1. Megjegyzés. *Az előző tétel **megfordítása nem igaz**, ugyanis az*

$$f(x) = |x| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény minden pontban folytonos, azonban az $x_0 = 0$ pontban nem differenciálható.

12.2. Differenciálhatóság és műveletek

12.2.1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$ és $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek differenciálhatóak az x_0 pontban. Ekkor*

— *az $f + g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

— *tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda \cdot f$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0).$$

— *az $f \cdot g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

— *az $\dfrac{f}{g}$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)},$$

feltéve, hogy az x_0 pontnak van olyan környezete, melyben $g(x) \neq 0$.

12.2.2. Tétel (Az összetett függvény differenciálási szabálya). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$ és $g\colon D \to \mathbb{R}$ és $f\colon g(D) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy g differenciálható az x_0 pontban, f pedig differenciálható a $g(x_0)$ pontban. Ekkor az $f \circ g$ függvény differenciálható az x_0 pontban, továbbá*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

12.2.3. Tétel (Az inverz függvény differenciálási szabálya). *Legyen $]a, b[\subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény. Ha az f függvény differenciálható az $x_0 \in]a, b[$ pontban és $f'(x_0) \neq 0$, akkor az f^{-1} függvény differenciálható az $f(x_0) \in f(]a, b[)$ pontban és*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

12.2.4. Tétel (Hatványsorok differenciálhatósága). *Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ egy valós számsorozat, $x_0 \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

hatványsor konvergenciasugara nem nulla. Ekkor ha f jelöli a hatványsor összegfüggvényét, akkor az f függvény a konvergenciatartomány minden pontjában differenciálható és

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n.$$

Néhány elemi függvény differenciálhányados függvénye

— ha $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ és $f(x) = x^n$, akkor $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$;

— ha $f(x) = \exp(x)$, akkor $f'(x) = \exp(x)$;

— ha $f(x) = a^x$, akkor $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$;

— ha $f(x) = \ln(x)$, akkor $f'(x) = \frac{1}{x}$;

— ha $f(x) = \cos(x)$, akkor $f'(x) = -\sin(x)$;

— ha $f(x) = \sin(x)$, akkor $f'(x) = \cos(x)$;

— ha $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, akkor $f'(x) = \frac{1}{\cos^2}(x)$;

— ha $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$, akkor $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$;

— ha $f(x) = \cosh(x)$, akkor $f'(x) = \sinh(x)$;

— ha $f(x) = \sinh(x)$, akkor $f'(x) = \cosh(x)$;

— ha $f(x) = \tanh(x)$, akkor $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$;

— ha $f(x) = \coth(x)$, akkor $f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$.

12.3. Középértéktételek

12.3.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in D$* ***pontban lokális minimuma*** *van, ha az x_0 pontnak van olyan $B \subset D$ környezete, hogy*

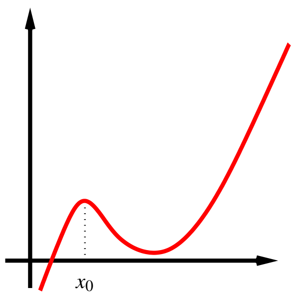
$$f(x_0) \leq f(x)$$

teljesül minden $x \in B$ esetén.

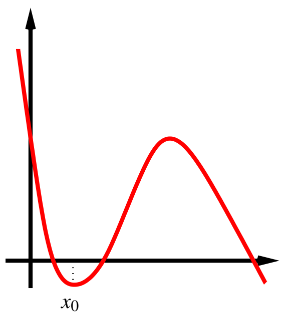
12.3.2. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in D$* ***pontban lokális maximuma*** *van, ha az x_0 pontnak van olyan $B \subset D$ környezete, hogy*

$$f(x_0) \geq f(x)$$

teljesül minden $x \in B$ esetén.



lokális maximumhely



lokális minimumhely

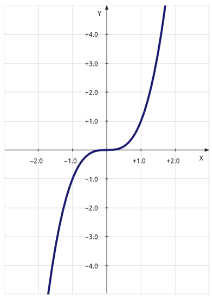
12.3.1. Tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f: D \to \mathbb{R}$ függvény. Ha az f függvénynek az $x_0 \in D$ pontban lokális szélsőértéke van és az f függvény differenciálható ebben a pontban, akkor*

$$f'(x_0) = 0.$$

12.3.1. Megjegyzés. *Az előző tétel **megfordítása nem igaz**, legyen ugyanis*

$$f(x) = x^3 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

*Ekkor az f függvény differenciálható az $x_0 = 0$ pontban és $f'(0) = 0$, azonban az f függvénynek az $x_0 = 0$ pont **nem lokális szélsőértékhelye**.*



12.3.2. Tétel (Darboux). *Legyen $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és legyenek $c, d \in]a, b[$, $c < d$. Ekkor az f függvény differenciálhányados függvénye minden $f'(c)$ és $f'(d)$ közé eső értéket felvesz a $]c, d[$ intervallumban.*

12.3.3. Tétel (Cauchy). *Legyenek $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények melyek differenciálhatóak az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor van olyan $\xi \in]a, b[$ pont, hogy*

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi)$$

teljesül.

12.3.4. Tétel (Lagrange). *Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely differenciálható a $]a, b[$ intervallumon. Ekkor van olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi)$$

teljesül.

12.3.5. Tétel (Rolle). *Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon és tegyük fel, hogy $f(a) = f(b)$. Ekkor van olyan $\xi \in]a, b[$, melyre*

$$f'(\xi) = 0$$

teljesül.

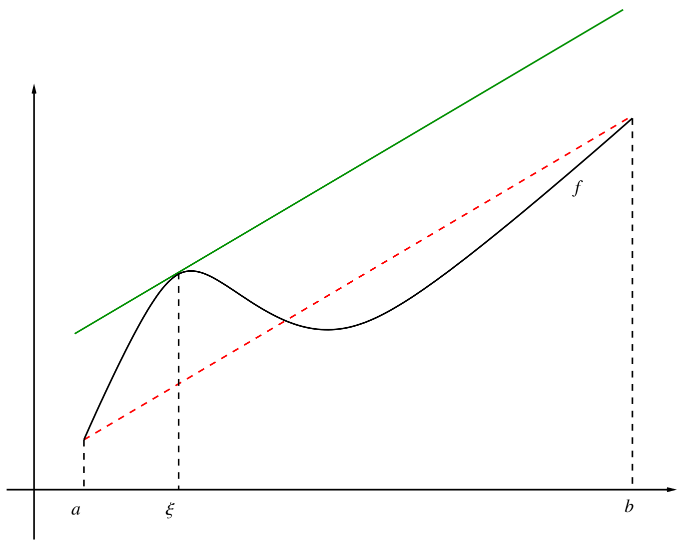
12.3.6. Tétel (Az integrálszámítás alaptétele). *Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ha*

$$f'(x) = 0 \qquad (x \in]a, b[),$$

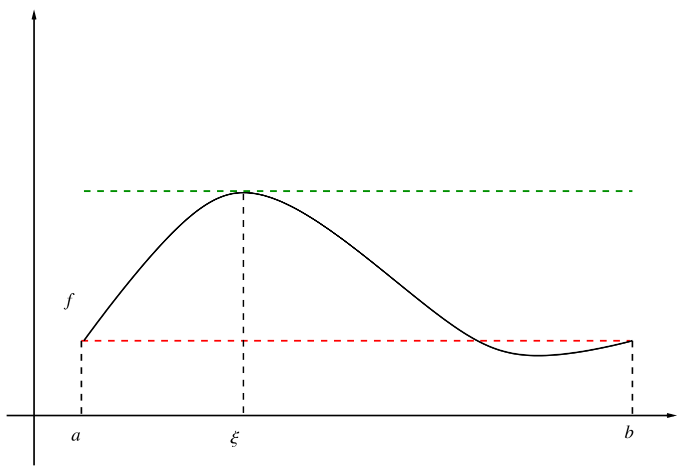
akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$f(x) = c$$

teljesül minden $x \in [a, b]$ esetén.



12.1. ábra. A Lagrange-féle középértéktétel geometriai jelentése



12.2. ábra. A Rolle-féle középértéktétel geometriai jelentése

12.4. Magasabb rendű deriváltak

12.4.1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Ha az f függvény differenciálható az x_0 pont egy környezetében, és az f függvény deriváltja differenciálható az x_0 pontban, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az $x_0 \in D$ pontban* ***kétszer differenciálható****, és $(f')'(x_0)$-t az f függvény x_0 pontbeli* ***második differenciálhányados****ának nevezzük és $f''(x_0)$-lal jelöljük.*

Ha az f függvény a D halmaz minden pontjában kétszer differenciálható, akkor az

$$x \longmapsto f''(x) \qquad (x \in D)$$

függvényt az f függvény ***második derivált****jának hívjuk.*

12.4.2. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Ha az f függvény n-szer differenciálható az x_0 pont egy környezetében, és az f függvény n-edik deriváltja differenciálható az x_0 pontban, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az $x_0 \in D$ pontban* ***$(n+1)$-szer differenciálható****, és $(f^{(n)})'(x_0)$-t az f függvény x_0 pontbeli* ***$(n+1)$-edik differenciálhányados****ának nevezzük és $f^{(n+1)}(x_0)$-lal jelöljük.*

Ha az f függvény a D halmaz minden pontjában $(n+1)$-szer differenciálható, akkor az

$$x \longmapsto f^{(n+1)}(x) \qquad (x \in D)$$

függvényt az f függvény ***$(n+1)$-edik derivált****jának hívjuk.*

12.4.3. Definíció. *Ha az $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ függvény az $]a,b[$ intervallum valamely x_0 pontjában minden $n \in \mathbb{N}$ esetén n-szer differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény* ***akárhányszor differenciálható az x_0 pontban****.*

12.4.4. Definíció. *Ha az $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $]a,b[$ intervallumon és az*

$$x \longmapsto f'(x) \qquad (x \in]a,b[)$$

függvény folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény ***folytonosan differenciálható az $]a,b[$ intervallumon****.*

12.5. A Taylor-tétel

12.5.1. Tétel (Taylor). *Legyen $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ és $x_0 \in]a,b[$. Ha az f függvény $(n+1)$-szer differenciálható, akkor minden $x \in]a,b[$, $x \neq x_0$ esetén van olyan ξ pont x és x_0 között, hogy*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

teljesül.

Az előző tételben szereplő

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

polinomot az f függvény x_0 ponthoz tartozó **n-edik Taylor-polinom**jának nevezzük.

Az előző tétel alapján felírható

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

formulát pedig **Taylor-formulá**nak mondjuk, míg az

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

tagot a Taylor-formula **maradéktagjá**nak hívjuk.

12.6. A l'Hospital-szabály

12.6.1. Tétel. *Legyenek $f, g\colon\ ]a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak az $]a, b[$ intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ minden $x \in]a, b[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ minden $x \in]a, b[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

12.6.2. Tétel. *Legyenek $f, g\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak az $]a, b[$ intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b-} g(x) = 0.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ minden $x \in]a, b[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ minden $x \in]a, b[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

12.6.3. Tétel. *Legyenek $f, g\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak az $]a, +\infty[$ intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ minden $x \in]a, +\infty[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ minden $x \in]a, +\infty[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

12.6.4. Tétel. *Legyenek* $f, g\colon]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ *olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak a* $]-\infty, b[$ *intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ *minden* $x \in]-\infty, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ *minden* $x \in]-\infty, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

12.6.5. Tétel. *Legyenek* $f, g\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ *olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak az* $]a, b[$ *intervallumon és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = +\infty.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ *minden* $x \in]a, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ *minden* $x \in]a, b[$ *esetén és létezik a*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

12.6.1. Megjegyzés. *Hasonlóan fogalmazhatóak meg a további*

—
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = -\infty.$$

— $a = -\infty$

— $b = +\infty$

esetek is.

12.6.1. Példa.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Ugyanis a l'Hospital-szabályt alkalmazva,

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\sin(x)]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

12.6.2. Példa.

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = 0.$$

Ugyanis a l'Hospital-szabályt alkalmazva,

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{[\ln(x)]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

12.6.3. Példa.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

Alkalmazzuk a l'Hospital-szabályt,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left[x^2\right]'}{[e^x]'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x}$$

Alkalmazzuk még egyszer a l'Hospital-szabályt,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{[2x]'}{[e^x]'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

12.6.4. Példa.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$$

Alkalmazzuk a l'Hospital-szabályt,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left[\sqrt{1+x^2}\right]'}{[x]'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

A l'Hospital-szabály ***nem vezet eredményre*** *ebben az esetben.*

12.7. Függvényvizsgálat

12.7.1. Monotonitás

12.7.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ függvény az $]a,b[$ intervallumon* ***monoton növekedő****, ha minden $x,y \in]a,b[$, $x\le y$ esetén*

$$f(x)\le f(y)$$

teljesül.

12.7.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ függvény az $]a,b[$ intervallumon* ***monoton csökkenő****, ha minden $x,y \in]a,b[$, $x\le y$ esetén*

$$f(x)\ge f(y)$$

teljesül.

12.7.3. Definíció. *Ha a fenti egyenlőtlenségek minden $x\neq y$ esetén szigorúak, akkor azt mondjuk, hogy a szóban fogó függvény* ***szigorúan monoton növekedő****, illetve* ***szigorúan monoton csökkenő****.*

12.7.1. Tétel. *Legyen $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

— *az f függvény monoton növekedő az $]a,b[$ intervallumon;*

— *tetszőleges* $x \in]a, b[$ *esetén* $f'(x) \geq 0$.

12.7.2. Tétel. *Legyen* $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ *egy olyan függvény, amely differenciálható az* $]a, b[$ *intervallumon. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

— *az* f *függvény monoton csökkenő az* $]a, b[$ *intervallumon;*

— *tetszőleges* $x \in]a, b[$ *esetén* $f'(x) \leq 0$.

12.7.3. Tétel. *Legyen* $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ *egy olyan függvény, amely differenciálható az* $]a, b[$ *intervallumon. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

— *az* f *függvény szigorúan monoton növekedő (szigorúan monoton csökkenő) az* $]a, b[$ *intervallumon;*

— *tetszőleges* $x \in]a, b[$ *esetén* $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$*, és az* $]a, b[$ *intervallumnak nem létezik olyan* $]c, d[$ *részintervalluma, hogy* $f'(x) = 0$ *teljesül, ha* $x \in]c, d[$.

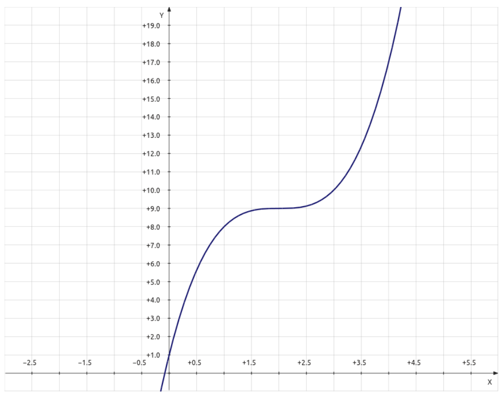
12.7.1. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt. Ekkor* f *differenciálható* $\mathbb{R}$*-en és*

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $f'(x) \geq 0$*, ezért az* f *függvény szigorúan monoton növekedő* $\mathbb{R}$*-en.*



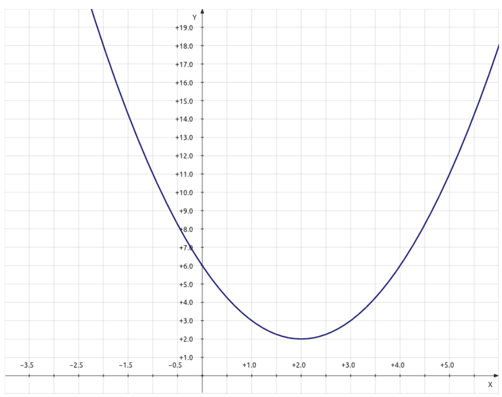
12.7.2. Példa. *Legyen*

$$f(x) = x^2 - 4x + 6 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor f *differenciálható* $\mathbb{R}$*-en és*

$$f'(x) = 2x - 4 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha $x \in [2, +\infty[$*, akkor* $f'(x) \geq 0$*, ha pedig* $x \in]-\infty, 2]$*, akkor* $f'(x) \leq 0$*. Így, az* f *függvény a* $[2, +\infty[$ *intervallumon monoton növekedő, a* $]-\infty, 2]$ *intervallumon pedig monoton csökkenő.*



12.7.2. Szélsőérték

12.7.4. Tétel (Szélsőértékre vonatkozó szükséges feltétel). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Ha az f függvénynek az $x_0 \in D$ pontban szélsőértéke van és az f függvény differenciálható ebben a pontban, akkor $f'(x_0) = 0$.*

12.7.5. Tétel (Szélsőértékre vonatkozó elégséges feltétel). *Legyen $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, $x_0 \in]a,b[$. Ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset]a,b[$, és*

— *ha $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[$ esetén $f'(x) \geq 0$, ha pedig $x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$, akkor $f'(x) \leq 0$ teljesül, akkor az x_0 pont az f függvénynek lokális maximumhelye;*

— *ha $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[$ esetén $f'(x) \leq 0$, ha pedig $x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$, akkor $f'(x) \geq 0$ teljesül, akkor az x_0 pont az f függvénynek lokális minimumhelye.*

12.7.6. Tétel (Szélsőértékre vonatkozó elégséges feltétel). *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, mely az $x_0 \in]a,b[$ pontban n-szer differenciálható. Tegyük fel, hogy*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{és} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ekkor, ha

— *n páratlan, akkor az x_0 pont nem lokális szélsőértékhelye az f függvénynek*

— *n páros és*

- *$f^{(n)}(x_0) > 0$, akkor az x_0 pont az f függvénynek lokális minimumhelye;*
- *$f^{(n)}(x_0) < 0$, akkor az x_0 pont az f függvénynek lokális maximumhelye.*

12.7.3. Példa. *Legyen*

$$f(x) = xe^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

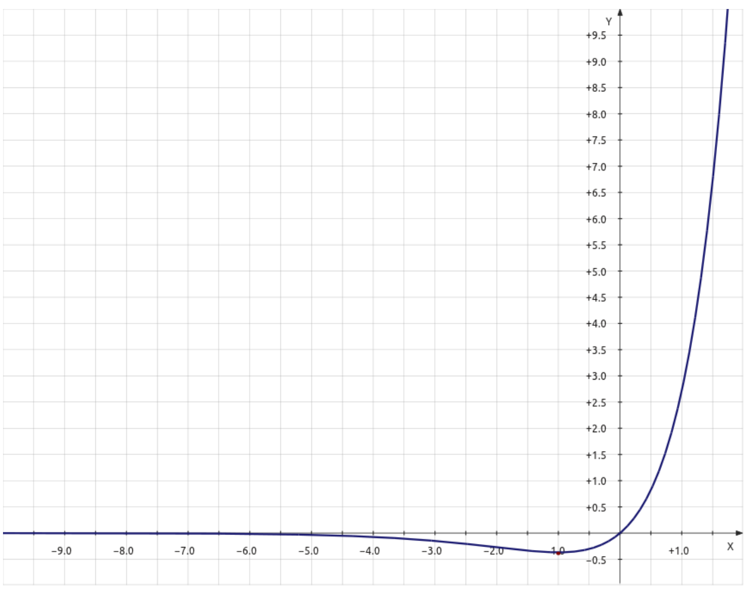
Ekkor

$$f'(x) = (x+1)e^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $f'(x) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = -1$, ezért ha az f függvénynek van szélsőértékhelye, akkor az csak az $x = -1$ pont lehet. Mivel

$$f''(x) = (x+2)e^x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így $f''(-1) = \dfrac{1}{e} > 0$, vagyis az $x = -1$ pont az f függvénynek lokális minimumhelye.



12.7.3. Konvexitás

12.7.4. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény* ***konvex****, ha minden $x, y \in I$ és minden $\lambda \in [0,1]$ esetén*

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda y)\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

teljesül.

12.7.5. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény* ***konkáv****, ha minden $x, y \in I$ és minden $\lambda \in [0,1]$ esetén*

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda y)\right) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

teljesül.

12.7.1. Állítás. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

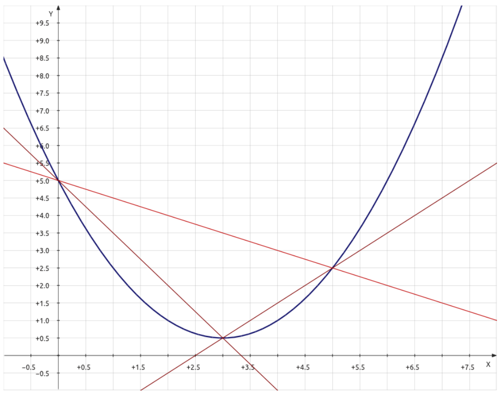
— *az f függvény konvex;*

— *a $-f$ függvény konkáv.*

12.7.7. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor az f függvény pontosan akkor konvex, ha tetszőleges $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ esetén*

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

teljesül.



12.7.8. Tétel. *Legyen $]a,b[\to \mathbb{R}$ konvex függvény. Ekkor*

— *f folytonos az $]a,b[$ intervallumon;*

— *az f függvénynek minden pontban létezik a bal- és a jobboldali deriváltja.*

12.7.9. Tétel. *Legyen $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor*

— *f pontosan akkor konvex, ha f' monoton növekedő az $]a,b[$ intervallumon;*

— *f pontosan akkor konkáv, ha f' monoton csökkenő az $]a,b[$ intervallumon.*

12.7.10. Tétel. *Legyen $f\colon\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ egy kétszer differenciálható függvény. Ekkor*

— *f pontosan akkor konvex, ha $f''(x) \geq 0$ teljesül minden $x \in]a,b[$ esetén;*

— *f pontosan akkor konkáv, ha $f''(x) \leq 0$ teljesül minden $x \in]a,b[$ esetén.*

12.7.4. Inflexió

12.7.6. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont az f függvénynek* ***inflexiós pont****ja, ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy az f függvény az $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ intervallumon konvex, az $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ intervallumon konkáv, vagy megfordítva.*

12.7.11. Tétel (Inflexiós helyre vonatkozó szükséges feltétel). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely differenciálható az x_0 pontban. Ha az x_0 pont inflexiós pontja az f függvénynek, akkor az x_0 pont lokális szélsőértékhelye az f' függvénynek.*

12.7.12. Tétel (Inflexiós helyre vonatkozó elégséges feltétel). *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ háromszor differenciálható függvény. Ha*

$$f''(x_0) = 0$$

és

$$f'''(x_0) \neq 0,$$

továbbá, f''' folytonos az x_0 pontban, akkor x_0 inflexiós pontja az f függvénynek.

12.7.4. Példa. *Tekintsük az*

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$f''(x) = 6x + 4 \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Ezért

$$f''(x) \geq 0 \iff x \in [-2/3\,, +\infty[\quad \text{és} \quad f''(x) \leq 0 \iff x \in]-\infty, -2/3]$$

Így, f konvex a $[-2/3, +\infty[$ intervallumon és konkáv a $]-\infty, -2/3]$ intervallumon.

Továbbá,

$$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) + 4 = 0$$

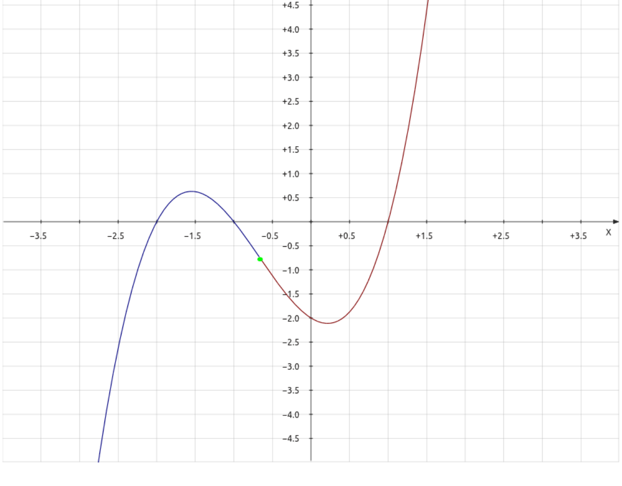
és

$$f'''(x) = 6 \qquad (x \in \mathbb{R})\,,$$

ezért

$$f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6 \neq 0,$$

vagyis az $x_0 = -\dfrac{2}{3}$ pont az f függvénynek inflexiós pontja.



Egy f függvény **teljes függvényvizsgálat**ánál az alábbiakat határozzuk meg

— f értelmezési tartományát ($\mathcal{D}_f$);

— f értékkészletét ($\mathcal{R}_f$);

— f páros, páratlan, periodikus függvény-e;

— f zérushelyeit;

— $\mathcal{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f előjele állandó;

— f határértékeit $\mathcal{D}_f$ határpontjaiban;

— $\mathcal{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f monoton növekedő/csökkenő;

— f szakadási helyeit;

— f differenciálhányados függvényeit;

— f szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit;

— $\mathcal{D}_f$ azon részhalmazait, ahol f konvex/konkáv;

— f aszimptotáit.

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[1] T. M. Apostol, *Calculus. Vol. I: One-variable calculus, with an introduction to linear algebra*, Second edition Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London 1967.

[2] B. P. Gyemidovics, *Matematikai analízis feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, 1974.

[3] Lajkó Károly, *Kalkulus I. (egyetemi jegyzet)*, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2002.

[4] Lajkó Károly, *Kalkulus I. példatár (1.-2. kötet)*, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2002.

[5] E. Mendleson, *3000 Solved Problems in Calculus*, McGraw Hill Professional, 1988.

[6] Rimán János, *Matematikai analízis I.*, EKTF, Líceum Kiadó, Eger, 1998.

[7] Rimán János, *Matematikai analízis feladatgyűjtemény I.-II.*, EKTF, Líceum Kiadó, Eger, 1998.

[8] W. Rudin, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[9] Szabó Tamás, *Kalkulus példák és feladatsorok*, Polygon jegyzettár, Szeged, 2000.