

Név, Neptun-kód:

Gyakorlatvezető neve:

Összpontszám	Érdemjegy

Minden egyes kérdés megválaszolására maximum 5 pont adható. Ha a vizsga során kérdezett tételek valamelyikét bizonyítással együtt ismerteti, további 5 pontot szerezhetsz bizonyításonként.

I. Definíciók

1. Legyenek A és B halmazok. Definiálja ezen halmazok szimmetrikus differenciáját.

Megoldás. Legyen X egy nemüres halmaz és $A, B \subset X$. Ekkor az

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

halmazt az A és B halmazok **szimmetrikus differenciájának** hívjuk. □

2. Mit értünk azon, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat?

Megoldás. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat **Cauchy-sorozat**, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $N > 0$ szám, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N$, akkor

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

□

3. Mely esetben nevezzük a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sort feltételesen konvergensenek?

Megoldás. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor a szóban forgó sort **feltételesen konvergensenek** hívjuk. □

4. Definiálja az exponenciális függvényt.

Megoldás. Az

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **exponenciális függvénynek** hívjuk. □

5. Mikor nevezzük az $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ függvényt konkávnak?

Megoldás. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **konkáv**, ha minden $x, y \in I$ és minden $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

teljesül. □

II. Tételek

1. Ismertessen egy olyan tételt, mely relációk kompozíciójáról szól.

Megoldás. Legyenek $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$ és $T \subset C \times D$ adott relációk,

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

teljesül. □

2. Fogalmazza meg az abszolút érték tulajdonságairól szóló tételt.

Megoldás. Legyen R egy rendezett test. Ekkor minden $x, y \in R$ esetén

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{és} \quad |xy| = |x| \cdot |y|.$$

□

3. Ismertesse a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot.

Megoldás. A $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ valós sor akkor és csakis akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N(\varepsilon) > 0$ szám, hogy

$$\left| \sum_{k=n+1}^m x_k \right| < \varepsilon$$

teljesül, amennyiben $n, m > N(\varepsilon)$. □

4. Fogalmazza meg az Átviteli elvet.

Megoldás. Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Az f függvény akkor és csakis akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha tetszőleges $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ D halmazbeli elemekből álló, x_0 -hoz konvergáló sorozat esetén az $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $f(x_0)$ -hoz konvergál. □

5. Ismertesse a L'Hospital-szabályt.

Megoldás. Legyenek $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, melyek differenciálhatóak az $]a, b[$ intervallumon és tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0.$$

Ha $g'(x) \neq 0$ minden $x \in]a, b[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(véges vagy végtelen) határérték, akkor $g(x) \neq 0$ minden $x \in]a, b[$ esetén és létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is és

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

III. Feladatok

1. Adjon példát olyan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatokra, melyekre az alábbiak egyidejűleg teljesülnek.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty.$$

Megoldás. Legyenek

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad y_n = -\frac{1}{n^2}.$$

Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0,$$

továbbá,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n^2}} = -n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$$

□

2. Vizsgálja meg, hogy konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^3}$$

sor.

Megoldás. Legyen

$$x_n = \frac{\pi^n}{n^3} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\pi^n}{n^3} \right|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{(\sqrt[n]{n})^3} = \pi > 1,$$

így a Cauchy-féle gyökkritérium miatt a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^3}$ sor divergens.

□

3. Számítsa ki a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^5 + 8x^4 - 3x^3 + 10x^2 + 2x - 15}{x^3 + 16x^2 + 49x - 270}$$

határértéket.

Megoldás.

$$\begin{aligned} & \frac{6x^5 + 8x^4 - 3x^3 + 10x^2 + 2x - 15}{x^3 + 16x^2 + 49x - 270} \\ &= \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{6x^2 + 8x - 3 + 10\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2} - 15\frac{1}{x^3}}{1 + 16\frac{1}{x} + 49\frac{1}{x^2} - 270\frac{1}{x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} = +\infty. \end{aligned}$$

Így,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^5 + 8x^4 - 3x^3 + 10x^2 + 2x - 15}{x^3 + 16x^2 + 49x - 270} = +\infty.$$

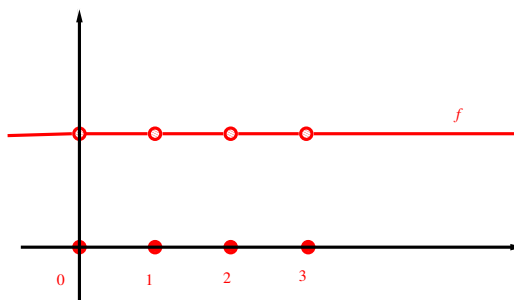
□

4. Készítsen olyan valós függvényt, mely a $\{0, 1, 2, 3\}$ halmaz pontjaitól eltekintve mindenhol folytonos.

Megoldás. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{ha } x = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

Ekkor az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény a $\{0, 1, 2, 3\}$ halmaz pontjaitól eltekintve mindenhol folytonos.



□

5. Legyen

$$f(x) = x \ln(x).$$

Határozza meg f''' -at.

Megoldás.

$$f'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

□