

Kalkulus II.
Beugró kérdések és válaszok
2012/2013-as tanév II. félév

1. Legyen $]a, b[\subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Hogyan van értelmezve az f függvény primitív függvénye?

Válasz. Legyen $]a, b[\subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Az $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az f függvény **primitív függvényének** vagy **határozatlan integráljának** nevezzük, ha az F függvény differenciálható az $]a, b[$ intervallumon és

$$F'(x) = f(x)$$

teljesül minden $x \in]a, b[$ esetén. Az F függvényre az $\int f$ vagy az $\int f(x)dx$ jelölést használjuk. □

2. Ismertesse a határozatlan integrál linearitására vonatkozó állítást.

Válasz. Legyenek $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvények, melyekre létezik $\int f$ és $\int g$, legyenek továbbá $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok. Ekkor létezik $\int \alpha \cdot f + \beta \cdot g$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\int \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx + C.$$

□

3. Ismertesse a parciális integrálás tételét határozatlan integrálra.

Válasz. Ha az $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak $]a, b[$ -n, és létezik $\int f' \cdot g$, akkor létezik $\int f \cdot g'$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx + C. \quad (x \in]a, b[)$$

□

4. Ismertesse a helyettesítéses integrálás tételét határozatlan integrálra.

Válasz. Ha $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $g :]c, d[\rightarrow]a, b[$ olyan függvények, melyek esetén létezik $g' :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ és létezik $\int f$ is, akkor létezik $\int (f \circ g) \cdot g'$ is, és van olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \left(\left(\int f \right) \circ g \right)(x) + C = \int f(t) dt \Big|_{t=g(x)} + C. \quad (x \in]c, d[)$$

□

5. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Mennyivel egyenlő

$$\int x^\alpha dx?$$

Válasz.

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C & \text{ha } \alpha \neq -1, \\ \ln |x| + C & \text{ha } \alpha = -1, \end{cases}$$

□

6. Mennyivel egyenlő

$$\int e^x dx?$$

Válasz.

$$\int e^x dx = e^x + C$$

□

$$\int e^x dx = e^x$$

7. Mennyivel egyenlő

$$\int \cos(x) dx?$$

Válasz.

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

□

8. Mennyivel egyenlő

$$\int \sin(x) dx?$$

Válasz.

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

□

9. Mennyivel egyenlő

$$\int \cosh(x) dx?$$

Válasz.

$$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$$

□

10. Mennyivel egyenlő

$$\int \sinh(x) dx?$$

Válasz.

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$$

□

11. Fogalmazza meg a Darboux-tételt.

Válasz. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$ úgy, hogy ha P olyan felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\|P\| < \delta$, akkor

$$\left| \Sigma(f, P) - \bar{J}(f) \right| < \varepsilon \quad \text{és} \quad \left| \sigma(f, P) - \underline{J}(f) \right| < \varepsilon$$

teljesül.

□

12. Fogalmazza meg az Oszcillációs kritériumot.

Válasz. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvény **akkor, és csakis akkor** Riemann-integrálható, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan P felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre

$$\mathcal{O}(f, P) < \varepsilon$$

teljesül.

□

13. Ismertesse a Riemann-integrál linearitására vonatkozó tételt.

Válasz. Legyenek $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor

- az $f + g$ függvény is Riemann-integrálható és

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

- a $\lambda \cdot f$ függvény is Riemann-integrálható és

$$\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx;$$

□

14. Ismertesse a Riemann-integrál monotonitására vonatkozó tételt.

Válasz. Legyenek $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények. Ha minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

□

15. Ismertesse a Riemann-integrál intervallum additivitásáról szóló tételt.

Válasz. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény. Ha $c \in]a, b[$, akkor az f függvény Riemann-integrálható az $[a, c]$ és $[c, b]$ intervallumok mindegyikén és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

□

16. Fogalmazza meg a Riemann-integrálra vonatkozó közéértéktételt.

Válasz. Legyenek $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények. Tegyük fel továbbá, hogy az f függvény folytonos, a g függvény pedig nemnegatív. Ekkor van olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

teljesül.

□

17. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Hogyan van értelmezve az f függvény felsőhatárfüggvénye (integrálfüggvénye)?

Válasz. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a, b])$$

módon megadott $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az f függvény **felsőhatárfüggvényének** vagy **integrálfüggvényének** hívjuk.

□

18. Ismertesse a Newton–Leibniz-formulát.

Válasz. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és jelölje $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ az f függvény egy primitív függvényét. Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

□

19. Ismertesse a Riemann-integrálra vonatkozó parciális integrálás tételét.

Válasz. Legyenek $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvények, melyek deriváltjai Riemann-integrálhatóak. Ekkor

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

□

20. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz. Mit értünk azon, hogy az $x_0 \in D$ pont belső pontja D -nek?

Válasz. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in D$ pont **belső pontja** D -nek, ha van olyan $r > 0$, hogy $G(x_0, r) \subset D$ teljesül.

□

21. Mit értünk azon, hogy a $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz korlátos?

Válasz. Azt mondjuk, hogy a $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **korlátos**, ha van olyan $r > 0$ és olyan $x_0 \in \mathbb{R}^n$, hogy $K \subset G(x_0, r)$ teljesül.

□

22. Fogalmazza meg a Heine–Borel-tételt.

Válasz. A $D \subset \mathbb{R}^n$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

□

23. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Mit értünk azon, hogy az $\mathbb{R}^k$ térbeli $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat?

Válasz. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^k$ -beli sorozat **Cauchy-sorozat**, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $N > 0$ szám, hogy ha $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N$, akkor

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

□

24. Ismertesse a Cauchy-féle konvergenciakritériumot.

Válasz. Egy $\mathbb{R}^k$ -beli sorozat **akkor és csakis akkor** konvergens, ha Cauchy-sorozat.

□

25. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény. Mit értünk azon, hogy az f függvény folytonos az $x_0 \in D$ pontban?

Válasz. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény **folytonos az $x_0 \in D$ pontban**, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ olyan, hogy $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$, akkor

$$\|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

Ha az f függvény a D halmaz minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **folytonos a D halmazon**.

□

26. Fogalmazza meg az Átviteli elvet.

Válasz. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Az f függvény akkor és csakis akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha tetszőleges $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ D halmazbeli elemekből álló, x_0 -hoz konvergáló sorozat esetén az $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $f(x_0)$ -hoz konvergál.

□

27. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Mit jelent az, hogy az f függvénynek az x_0 pontban a határértéke α ?

Válasz. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **az x_0 pontban a határértéke α** , ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$, akkor $\|f(x) - \alpha\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.

□

28. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény. Mit jelent az, hogy az f függvény **Fréchet-differenciálható** az $x_0 \in D$ pontban?

Válasz. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény **Fréchet-differenciálható** az $x_0 \in D$ pontban, ha létezik egy olyan $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

teljesül. Ebben az esetben az A lineáris leképezést az f függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosának nevezzük és rá az $f'(x_0)$ jelölést használjuk. $\square$

29. Ismertesse a differenciálhatóság és a folytonosság kapcsolatáról szóló tételt.

Válasz. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény. Ha az f függvény Fréchet-differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, akkor f folytonos az $x_0 \in D$ pontban. $\square$

30. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény és $v \in \mathbb{R}^n$. Mit jelent az, hogy az f függvény az x_0 pontban a v irány mentén differenciálható?

Válasz. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény és $v \in \mathbb{R}^n$. Ha létezik a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban a v **irány mentén differenciálható**. Ebben az esetben a fenti határértékre a $D_v f(x_0)$ jelölést alkalmazzuk. $\square$

31. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény. Mit jelent az, hogy az f függvény az $x_0 \in D$ pontban az i -edik változója szerint parciálisan differenciálható?

Válasz. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény. Legyen továbbá minden $i = 1, \dots, n$ esetén

$$e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0).$$

Ha létezik a $D_{e_i} f(x_0)$ iránymenti derivált, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban az i -edik változója szerint **parciálisan differenciálható** az $x_0 \in D$ pontban. Ebben az esetben a $D_{e_i} f(x_0)$ jelölés helyett általában a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ jelölést használjuk. $\square$

32. Fogalmazza meg az összetett függvény differenciálási szabályát.

Válasz. Legyenek $n, m, k \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ és $g: f(D) \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvények. Ha az f függvény differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, a g függvény pedig az $f(x_0) \in f(D)$ pontban, akkor a $g \circ f$ függvény differenciálható az x_0 pontban és

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$\square$

33. Ismertesse a Schwarz–Young-tételt.

Válasz. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy függvény, melyre a D minden pontjában léteznek a $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltak. Ha $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ a D halmaz x_0 pontjában folytonos, akkor létezik $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0)$, és

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0).$$

$\square$

34. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, x_0 a D halmaz egy belső pontja, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy x_0 -ban parciálisan differenciálható függvény. Mit jelent az, hogy az x_0 pont az f függvénynek stacionárius pontja:

Válasz. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, x_0 a D halmaz egy belső pontja, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy x_0 -ban parciálisan differenciálható függvény. Ha az x_0 pontban az f függvény összes parciális deriváltja nulla, akkor az x_0 pontot az f függvény **stacionárius pontjának** nevezzük. $\square$

35. Ismertesse a differenciálható függvények lokális szélsőérték helyeire vonatkozó szükséges feltételt.

Válasz. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, x_0 a D halmaz egy belső pontja, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy x_0 -ban parciálisan differenciálható függvény. Ha az f függvénynek az x_0 pontban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$. $\square$

36. Mit értünk n -dimenziós téglánál?

Válasz. Legyen $n \in \mathbb{N}$, ekkor a

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

halmazt **n -dimenziós téglának** nevezzük. $\square$

37. Fogalmazza meg a Fubini-tételt.

Válasz. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$ és $A \subset \mathbb{R}^n$ és $B \subset \mathbb{R}^m$ téglák, valamint $Q = A \times B$. Ha $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, és az $x \mapsto f(x, y)$ függvény minden rögzített B -beli y mellett, valamint az $y \mapsto f(x, y)$ függvény minden rögzített A -beli x mellett Riemann-integrálható, akkor

$$\int_Q f(x, y) d(x, y) = \int_B \left[\int_A f(x, y) dx \right] dy = \int_A \left[\int_B f(x, y) dy \right] dx.$$

$\square$

38. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Mit jelent az, hogy ez a halmaz Jordan-mérhető?

Válasz. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ha az

$$f(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

függvény Riemann-integrálható a H halmazon, akkor azt mondjuk, hogy a H halmaz **Jordan-mérhető**, és ebben az esetben a

$$\mu_J(H) = \int_H 1 dx$$

mennyiséget a H halmaz **Jordan-mértékének** nevezzük. $\square$

39. Fogalmazza meg a Jordan-mérhetőség kritériumát.

Válasz. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ekkor a H halmaz **pontosan akkor** Jordan-mérhető, ha $\mu_J(\partial H) = 0$ teljesül. $\square$

40. Mit értünk azon, hogy egy halmaz egyszerű tartomány?

Válasz. Legyen $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt, Jordan-mérhető halmaz, $\Phi, \Psi : K \rightarrow \mathbb{R}$ pedig olyan folytonos függvények, hogy $\Phi(x) \leq \Psi(x)$ teljesül minden $x \in K$ esetén. Ekkor a

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in K \text{ és } \Phi(x) \leq y \leq \Psi(x)\}$$

halmazt **egyszerű tartománynak** nevezzük. $\square$