Lajkó Károly

Kalkulus II.

DEBRECENI EGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZET

Lajkó Károly

Kalkulus II.

egyetemi jegyzet
negyedik kiadás

DEBRECENI EGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZET

Tartalomjegyzék

I. fejezet

Integrálszámítás

1. Primitív függvény, határozatlan integrál

Ismeretes, hogy egy $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényhez hozzárendelhető az $f' : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény.

Példa. Ha $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, úgy létezik $f'(x) = 2x$ $(x \in \mathbb{R})$.

Kérdés: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$-hez létezik-e $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, hogy $F' = f$?

Példa. Ha $f(x) = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor $F(x) = -\cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ esetén $F'(x) = \sin(x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ teljesül.

1. definíció. Legyen adott az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény.
A $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt az f ***primitív függvény***ének vagy ***határozatlan integrál***jának nevezzük, ha $F' = f$.
Az F függvényre az $\int f$ jelölést használjuk. $\int f$ meghatározását integrálásnak mondjuk.
Az $F = \int f$ függvény x helyen felvett értékét $F(x) = \int f(x)dx$ vagy $(\int f)(x)$ jelöli, ami gyakran a primitív függvényt (határozatlan integrált) is jelenti.
A primitív függvény (határozatlan integrál) értelmezhető $f : H \to \mathbb{R}$ függvényre is, ahol H intervallumok egyesítése.

Példa. Az $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény esetén a $F(x) = \mathrm{ch}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény teljesíti, hogy $F'(x) = f(x)$, így $F(x) = \int \mathrm{sh}(x)\, dx$.

1. tétel. *Ha $f, F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $F' = f$ $(F = \int f)$, úgy $G : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor primitív függvénye (határozatlan integrálja) f-nek, ha $\exists\, C \in \mathbb{R}$, hogy $G(x) = F(x) + C$.*

Bizonyítás.

a) Ha $G(x) = F(x) + C$, akkor a feltételek miatt $G'(x) = F'(x) = f(x)$ $(x \in \langle a, b\rangle)$, így a definíció szerint G primitív függvény.

b) Ha $G = \int f$, azaz G is primitív függvénye f-nek, akkor $G'(x) = F'(x)$ $(x \in \langle a, b\rangle)$, ami ekvivalens azzal, hogy $[G(x) - F(x)]' = 0$ $(x \in \langle a, b\rangle)$, így a differenciálszámításban tanultak szerint $G(x) - F(x) = C$ $(x \in \langle a, b\rangle)$, azaz $G(x) = F(x) + C$. □

Megjegyzés. Ha az f függvény értelmezési tartománya nem intervallum, akkor az állítás nem igaz.

Alapintegrálok:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \begin{cases} \ln(x) + C_1 & (x > 0) \\ \ln(-x) + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\int x^\mu\, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \qquad (x \in \mathbb{R}_+,\ \mu \neq -1)$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\, dx = -\mathrm{ctg}(x) + C_k \qquad (x \in\,]\,k\pi, (k+1)\pi\,[,\ k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \mathrm{tg}(x) + C_k \qquad (x \in\,]\,k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\,[,\ k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x) + C \qquad (x \in\,]-1, 1\,[\,)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \mathrm{arctg}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \mathrm{sh}(x)\, dx = \mathrm{ch}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \mathrm{ch}(x)\, dx = \mathrm{sh}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsh}(x) + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C \qquad (x\in\mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arch}(x) + C = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C \qquad (x\in\,]\,1,\infty\,[\,)$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (x\in\,]-\varrho,\varrho\,[\,)$$

2. tétel. *Legyen $f,g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ olyan, hogy létezik $\int f$ és $\int g$, és $p,q\in\mathbb{R}$ tetszőleges, akkor létezik $\int(pf+qg)$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy*

$$\int [pf(x)+qg(x)]\,dx = p\int f(x)\,dx + q\int g(x)\,dx + C \qquad (x\in\langle a,b\rangle)\ .$$

Bizonyítás. Legyen $F = \int f$, $G = \int g$, akkor F', G' létezése miatt létezik $(pF+qG)'$ is, és

$$(pF+qG)'(x) = pF'(x) + qG'(x) = pf(x) + qg(x) \qquad (x\in\langle a,b\rangle)\ ,$$

ami azt jelenti, hogy létezik $\int(pf(x)+qg(x))\,dx$ és $= pF(x)+qG(x)+C = p\int f(x)\,dx + q\int g(x)\,dx + C \quad (x\in\langle a,b\rangle)$. □

Példa. Ha $f(x) = x^3$ $(x\in\mathbb{R})$, $g(x) = \cos(x)$ $(x\in\mathbb{R})$, akkor létezik $\int x^3\,dx$ és $\int\cos(x)\,dx$ (lásd alapintegrálok), így tételünk szerint létezik $\int(2x^3+3\cos(x))dx$ és létezik $C\in\mathbb{R}$, hogy

$$\int(2x^3+3\cos(x))dx = 2\,\frac{x^4}{4} + 3\sin(x) + C\ .$$

3. tétel (parciális integrálás tétele). *Ha az $f,g : \langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak $\langle a,b\rangle$-n és létezik $\int f'g$, akkor létezik $\int fg'$ is, és van olyan $C\in\mathbb{R}$, hogy*

(P) $$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx + C \qquad (x\in\langle a,b\rangle)\ .$$

Bizonyítás. A feltételek miatt az $f\cdot g - \int f'g$ függvény differenciálható, és

$$\left[f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\right]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = $$
$$= f(x)g'(x)\ ,$$

ami a határozatlan integrál definíciója miatt azt jelenti, hogy létezik $\int fg'$ és teljesül (P). □

Példák.

1. Legyen $f(x) = x$, $g(x) = e^x$ $(x\in\mathbb{R})$. f és g differenciálhatók és $f'(x) = 1$, $g'(x) = e^x$ $(x\in\mathbb{R})$, továbbá létezik $\int f'(x)g(x)\,dx = = \int 1\cdot e^x\,dx = \int e^x\,dx$ (lásd alapintegrálok), így a tétel miatt létezik $\int x\,e^x\,dx$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy
$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int 1\cdot e^x\,dx + C = x\,e^x - e^x + C \qquad (x\in\mathbb{R})\ .$$
2. Legyen $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = x$ $(x\in\mathbb{R})$.
f és g differenciálhatók és $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = 1$ $(x\in\mathbb{R}_+)$, továbbá létezik $\int f'(x)g(x)\,dx = \int\frac{1}{x}\cdot x\,dx = \int 1\,dx$ $(x\in\mathbb{R}_+)$ (lásd alapintegrálok), így a tétel miatt létezik $\int\ln(x)\,dx = \int 1\cdot\ln(x)\,dx$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy
$$\int\ln(x)\,dx = \int 1\cdot\ln(x)\,dx = x\,\ln(x) - \int\frac{1}{x}\cdot x\,dx + C =$$
$$= x\,\ln(x) - x + C \qquad (x\in\mathbb{R}_+)\ .$$

Megjegyzés. Ha $P_n(x)$ egy n-edfokú polinom, úgy az alábbi integrálok a parciális integrálás tételével meghatározhatók:

$$\int P_n(x)e^x\,dx\,, \qquad \int P_n(x)\sin(x)\,dx\,, \qquad \int P_n(x)\arcsin(x)\,dx\,,$$
$$\int P_n(x)\ln(x)\,dx\,, \qquad \int P_n(x)\cos(x)\,dx\,, \qquad \int P_n(x)\arccos(x)\,dx\,,$$
$$\int P_n(x)\operatorname{sh}(x)\,dx\,, \qquad \int P_n(x)\operatorname{arctg}(x)\,dx\,,$$
$$\int P_n(x)\operatorname{ch}(x)\,dx\,, \qquad \int P_n(x)\operatorname{arcctg}(x)\,dx\ .$$

4. tétel (helyettesítéses integrálás tétele). *Ha $f : \langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, $g : \langle c,d\rangle\to\langle a,b\rangle$ olyanok, hogy létezik $g' : \langle c,d\rangle\to\mathbb{R}$ és létezik $\int f$, akkor létezik $\int(f\circ g)\cdot g'$ és van olyan $C\in\mathbb{R}$, hogy*

(H) $$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \left(\left(\int f\right)\circ g\right)(x) + C = \int f(t)\,dt\,\Big|_{t=g(x)} + C$$

$(x\in\langle c,d\rangle)$.

Bizonyítás. A feltételek miatt létezik $[(\int f)\circ g]'$ és

$$\left[\left(\int f\right)\circ g\right]'(x) = f(g(x))\cdot g'(x) \qquad (x\in\langle c,d\rangle),$$

ami éppen azt jelenti, hogy létezik $\int (f\circ g)g'$ és teljesül (H). $\square$

Megjegyzés. Ha (a fentieken túl) létezik g^{-1}, akkor (H) a következő alakba is írható:

(H′)
$$\int f(x)\,dx = \left[\left(\int (f\circ g)g'\right)\circ g^{-1}\right](x) + C = \\ = \int f(g(t))g'(t)dt|_{t=g^{-1}(x)} + C$$

$(x\in\langle c,d\rangle)$.

Példák.

1. $\int 2x\sin(x^2)\,dx = ?$
Legyen $f(x)=\sin(x)$, $g(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$. Ekkor $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+\subset\mathbb{R}$ továbbá létezik $g'(x)=2x$ $(x\in\mathbb{R})$ és $\int f=\int\sin(x)\,dx$ (lásd alapintegrálok), így a tétel miatt létezik $\int 2x\sin(x^2)\,dx$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy
$$\int 2x\sin(x^2)\,dx = \int \sin(t)\,dt\,\Big|_{t=x^2} + C = -\cos(x^2)+C\ .$$

2. $\int \mathrm{ch}(2x+3)\,dx = ?$ $(x\in\mathbb{R})$
Belátható, hogy az $f(x)=\mathrm{ch}(2x+3)$ $(x\in\mathbb{R})$ függvénynek létezik primitív függvénye. Legyen $g(t)=\frac{t-3}{2}$, ekkor $g'(t)=\frac{1}{2}$, továbbá létezik $g^{-1}(x)=2x+3$ $(x\in\mathbb{R})$, így a megjegyzés miatt
$$\int \mathrm{ch}(2x+3)\,dx = \int \mathrm{ch}\left(2\cdot\frac{t-3}{2}+3\right)\cdot\frac{1}{2}\,dt\,\Big|_{t=2x+3} + C = \\ = \frac{1}{2}\int \mathrm{ch}\,t\,dt\,\Big|_{t=2x+3} + C = \frac{1}{2}\mathrm{sh}(2x+3)+C\ .$$

3. $\int \frac{3}{x-1}\,dx = ?$ $(x>1)$
Legyen $g(t)=t+1$, ekkor $g'(t)=1$, létezik $g^{-1}(x)=x-1$, így
$$\int \frac{3}{x-1}\,dx = \int \frac{3}{t+1-1}\cdot 1\,dt\,\Big|_{t=x-1} + C = \\ = 3\int \frac{1}{t}\,dt\,\Big|_{t=x-1} + C = 3\ln(x-1)+C\ .$$

4. $\int \frac{5}{x^2+2x+2}\,dx = ?$
Legyen $g(t)=t-1$, ekkor $g'(t)=1$, létezik $g^{-1}(x)=x+1$, így
$$\int \frac{5}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{5}{(x+1)^2+1}\,dx = \\ = 5\int \frac{1}{t^2+1}\cdot 1\,dt\,\Big|_{t=x+1} + C = 5\,\mathrm{arctg}(x+1)+C\ .$$

Megjegyzések.

1. $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ esetén a $g(t)=\sin(t)$ $\quad(t\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\,)$,
2. $\int R(\sin(x),\cos(x))\,dx$ esetén (ahol $R(u,v)$ racionális kifejezése u,v-nek és $x\in\,]-\pi,\pi[\,$) a
$$g(t)=2\,\mathrm{arctg}\,t \quad (t\in\mathbb{R}) \quad (\text{ill. } \mathrm{tg}\frac{x}{2}=t=g^{-1}(x) \quad (x\in\,]-\pi,\pi[\,)\ ,$$
3. $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx$ esetén a
$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=g^{-1}(x), \qquad g(t)=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}\ ,$$
4. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ esetén az Euler-féle (vagy trigonometrikus (sin), illetve hiperbolikusz (sh, ch) függvényes)

helyettesítéseket alkalmazzuk.

Racionális törtfüggvények integrálása.

A parciális törtekre bontás tétele szerint minden $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ racionális törtfüggvény egyértelműen előáll egy polinom és
$$\frac{a}{(x-b)^j}\ ,\quad \frac{px+q}{(x^2+rx+s)^k} \qquad (j,k\in\mathbb{N}_+,\ r^2-4s<0)$$
alakú törtek bizonyos (itt nem részletezett) összegeként, ahol $(x-b)^j$ és $(x^2+rx+s)^k$ a $Q_m(x)$ osztói. Így $\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ meghatározása visszavezethető

az
$$\int \frac{a}{(x-b)^j}\,dx \quad \text{és} \quad \int \frac{px+q}{(x^2+rx+s)^k}\,dx$$
meghatározására.

Megjegyzések.

1. Az utóbbi két integráltípust gyakorlaton vizsgáljuk (az első kezelése azonnal látható).
2. A 4. tétel utáni 2), 3), 4) példák esetén az integrálas racionális törtfüggvény integrálására vezethető vissza.
3. További ún. racionalizáló helyettesítések is vizsgálhatók (például $\int R(e^x)\,dx$, binom integrálok).

2. A Riemann-integrálhatóság fogalma

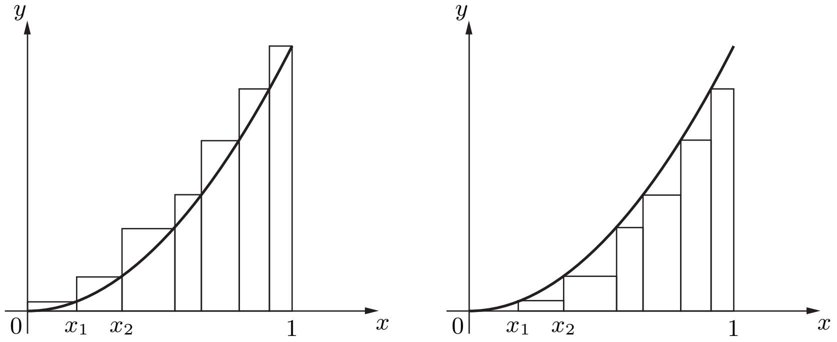
Először egy feladaton bemutatjuk a fejezet címében jelzett fogalom, a Riemann-integrál hátterét (geometriai „tartalmát").

Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ ($x \in [0,1]$) függvény gráfja, az x-tengely $[0,1]$ szakasza és az $x = 1$ egyenletű egyenes által határolt síkidom területét.

A keresett T területet korlátok közé szorítjuk. Ehhez osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot a $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ osztáspontokkal. T felső becslését úgy kapjuk, ha az $[x_{i-1}, x_i]$ szakaszra $f(x_i) = x_i^2$ magasságú téglalapot emelünk ($i = 1, \ldots, n$) és vesszük ezek területeinek
$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot (x_i - x_{i-1})$$
összegét. Nyilván $T \le S$, mert a függvény szigorú monoton növekedése miatt $x^2 \le x_i^2$ teljesül az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon, így a kapott téglalapok befedik a vizsgált síkidomot, ezért területük összege legalább T.

Hasonló gondolatmenet adja, hogy ha az $[x_{i-1}, x_i]$ szakaszra $f(x_{i-1}) = x_{i-1}^2$ magasságú téglalapot emelünk ($i = 1, \ldots, n$), akkor az így kapott téglalapok területeinek
$$s = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 \cdot (x_i - x_{i-1})$$

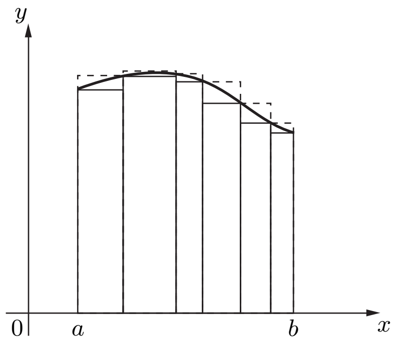
összegére $s \le T$ teljesül, mert minden téglalap a T területű síkidom része és nem nyúlnak egymásba.



Ha az osztáspontokat $x_i = \frac{i}{n}$ ($i = 0, \ldots, n$) módon választjuk, úgy
$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}(1^2 + \cdots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = $$
$$= \frac{2n^2+3n+1}{6n^2},$$
$$s = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}(1^2 + \cdots + (n-1)^2) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = $$
$$= \frac{2n^2-3n+1}{6n^2},$$
így
$$\frac{2n^2-3n+1}{6n^2} \le T \le \frac{2n^2+3n+1}{6n^2},$$
ami jól kezelhető becslést ad T-re, sőt
$$\frac{2n^2-3n+1}{6n^2} \to \frac{1}{3} \quad \text{és} \quad \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} \to \frac{1}{3}$$
miatt a becslést tetszőleges pontosságúnak is tekinthetjük, azzal a következtetéssel, hogy a keresett terület $T = \frac{1}{3}$.

Persze igazából csak akkor nyugodhatnánk meg, ha ez nem csak speciális, hanem tetszőleges felosztás (felosztássorozat) esetén is adódna.

E módszer használható általánosabban egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos (vagy csak korlátos) és nemnegatív függvény görbéje, az $[a, b]$ szakasz, az $x = a$ és az $x = b$ egyenesek által határolt síkidom területének közelítésére, esetleg pontos megadására is.



Ha még azt sem tesszük fel, hogy f nemnegatív, úgy eljutunk a Riemann nevével fémjelzett integrál fogalmához, melynek geometriai „tartalma” például nemnegatív folytonos függvényekre éppen a görbe alatti síkidom területe lesz.

Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum. A továbbiakban $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ típusú korlátos függvényekkel foglalkozunk.

1. definíció. A

$$P = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b\} \subset [a, b]$$

halmazt az $[a, b]$ ***intervallum egy felosztásá***nak, az x_i pontokat a ***felosztás osztáspontjai***nak, az $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ intervallumokat a ***felosztás részintervallumai***nak, míg $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ mellett a

$$\|P\| \doteq \sup\{\Delta x_i \mid i = 1, \ldots, n\}$$

számot a ***felosztás finomságá***nak nevezzük.

2. definíció. Legyen P_1 és P_2 $[a, b]$ két felosztása. P_2 ***finomítása*** (továbbosztása) a P_1 felosztásnak, ha $P_1 \subset P_2$. A $P \doteq P_1 \cup P_2$ halmazt a P_1 és P_2 egyesítésének nevezzük.

3. definíció. A $\langle P_k \rangle$ ***normális felosztássorozat***a $[a, b]$-nek, ha $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_k\| = = 0$ teljesül.

4. definíció. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, P egy felosztása $[a, b]$-nek.

$$M_i \doteq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad m_i \doteq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad (M_i, m_i \ \exists \text{ és } \in \mathbb{R})$$

5. definíció. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, P egy felosztása $[a, b]$-nek. Az

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

$$\mathcal{O}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i$$

számokat az f függvény P felosztáshoz tartozó ***alsó***, ***felső***, illetve ***oszcillációs összeg***ének, míg $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ esetén a

$$\sigma(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i$$

számot az f függvény P felosztáshoz és $t_1, \ldots, t_n$-hez tartozó ***integrálközelítő összeg***ének nevezzük. (Ezek „geometrialiag” bizonyos „területek”.)

1. tétel. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

a) bármely P és $\sigma(f, P)$-re: $\quad s(f, P) \le \sigma(f, P) \le S(f, P)$;

b) bármely $P_1 \subset P_2$-re: $\quad s(f, P_1) \le s(f, P_2)$, $\ S(f, P_2) \le S(f, P_1)$;

c) bármely P_1, P_2-re: $\quad s(f, P_1) \le S(f, P_2)$.

Bizonyítás.

a) Ha $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tetszőleges, akkor $m_i \le f(t_i) \le M_i$, melyből $\Delta x_i > 0$ miatt

$$m_i \Delta x_i \le f(t_i) \Delta x_i \le M_i \Delta x_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

illetve összegzéssel

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

következik, ami az állítás.

b) Legyen $P_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$, $P_2 = \{y_0, \dots, y_m\}$, $P_1 \subset P_2$, akkor bármely $[x_{i-1}, x_i]$-re létezik j, k, hogy

$$[x_{i-1}, x_i] = [y_{j-1}, y_j] \cup \dots \cup [y_{k-1}, y_k] \qquad (x_{i-1} = y_{j-1},\ x_i = y_k).$$

Ha $m_i^{(1)}$ a P_1, $m_i^{(2)}$ a P_2-höz tartozó infimumok, akkor $m_i^{(1)} \le m_j^{(2)}, \dots, m_k^{(2)}$, és így

$$\begin{aligned} m_i^{(1)} \Delta x_i &= m_i^{(1)} \Delta y_j + \dots + m_i^{(1)} \Delta y_k \le \\ &\le m_j^{(2)} \Delta y_j + \dots + m_k^{(2)} \Delta y_k \end{aligned}$$

adódik bármely $i = 1, \dots, n$-re, amiből összegzés után jön b) első fele. A második hasonlóan következik.

c) Ha P_1, P_2 tetszőleges felosztások, akkor $P_1, P_2 \subset P_1 \cup P_2$, így a) és b) miatt

$$s(f, P_1) \le s(f, P_1 \cup P_2) \le S(f, P_1 \cup P_2) \le S(f, P_2) ,$$

ami adja az állítást. □

6. definíció. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f \doteq \sup_P \{s(f, P)\}, \qquad \bar{I} = \overline{\int_a^b} f \doteq \inf_P \{S(f, P)\}$$

számokat az f függvény $[a, b]$ feletti ***alsó***, illetve ***felső Darboux-integrál***jának nevezzük.

2. tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor $\underline{I}, \bar{I} \in \mathbb{R}$ és $\underline{I} \le \bar{I}$ teljesül.*

Bizonyítás. Az 1. tétel c) része miatt bármely P_1-re $s(f, P_1) \le S(f, P)$ bármely P esetén, így létezik $\bar{I} \in \mathbb{R}$ továbbá $s(f, P_1) \le \bar{I}$, ami adja, hogy létezik $\underline{I} \in \mathbb{R}$ és $\underline{I} \le \bar{I}$. □

Következmény. *Bármely P-re $s(f, P) \le \underline{I} \le \bar{I} \le S(f, P)$, ami adja, hogy $0 \le \bar{I} - \underline{I} \le \mathcal{O}(f, P)$.*

Példák.

1. Ha $f(x) = c$ $(x \in [a, b])$, akkor $\underline{I} = \bar{I}$, mert $[a, b]$ bármely P felosztására $m_i = M_i = c$, így $s(f, P) = S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} c\,\Delta x_i = x \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b - a)$, tehát $\underline{I} = \bar{I} = c(b - a)$.
2. Létezik f, hogy $\underline{I} \ne \bar{I}$. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{, ha } x \in [a, b] \setminus ([a, b] \cap \mathbb{Q}), \end{cases}$$

(azaz a Dirichlet-féle függvény leszűkítése az $[a, b]$ intervallumra). Legyen P tetszőleges felosztása $[a, b]$-nek. Ismeretes, hogy bármely két valós szám között van racionális és irracionális szám is, így $m_i = 0$, $M_i = 1$ a felosztás bármely intervallumán, ami adja, hogy

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0 , \qquad S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a ,$$

így $\underline{I} = 0 \ne b - a = \bar{I}$.

7. definíció. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény ***Riemann-integrálható*** $[a, b]$-n, ha $\underline{I} = \bar{I}$. Ezt a közös értéket az f $[a, b]$ feletti ***Riemann-integrál***jának nevezzük, és rá az I, $\int_a^b f$ vagy $\int_a^b f(x)\,dx$ jelölést használjuk. Ha $[c, d] \subset [a, b]$ és f $[c, d]$-re való leszűkítése Riemann-integrálható $[c, d]$-n, akkor azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható $[c, d]$-n. $\int_c^d f$ az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálját jelöli $[c, d]$-n. Ha $f|_{[c,d]} = g$, akkor $\int_c^d f \doteq \int_c^d g$.

Megjegyzések.

1. Az előbbi példák mutatják, hogy az $f(x) = c$ $(x \in [a, b])$ függvény Riemann-integrálható és $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, míg a Dirichlet-féle függvény nem Riemann-integrálható $[a, b]$-n.

2. Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos, nemnegatív és Riemann-integrálható függvény, akkor az $\int_a^b f$ szám (f Riemann-integrálja $[a,b]$-n) geometriai tartalma legyen az f gráfja alatti síkidom területe.

3. A Darboux-tétel és következményei

A felső és alsó összegek egyfajta „határérték” tulajdonságát mutatja az alábbi eredmény.

1. tétel (Darboux-tétel). *Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor bármely ε-hoz létezik $\delta(\varepsilon)>0$, hogy $[a,b]$ bármely P felosztására, melyre $\|P\|<\delta(\varepsilon)$*

(D) $$S(f,P)-\bar{I}<\varepsilon \qquad \text{és} \qquad \underline{I}-s(f,P)<\varepsilon$$

teljesül.

2. tétel (A Darboux-tétel következménye). *Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

a) $[a,b]$ bármely $\langle P_k\rangle$ normális felosztássorozatára létezik

$$\lim_{k\to\infty} s(f,P_k)=\underline{I}\,, \quad \lim_{k\to\infty} S(f,P_k)=\bar{I}\,, \quad \text{és} \quad \lim_{k\to\infty}\mathcal{O}(f,P_k)=\bar{I}-\underline{I}\,;$$

b) $[a,b]$ bármely $\langle P_k\rangle$ normális felosztássorozatára létezik $\langle\sigma^1(f,P_k)\rangle$ és $\langle\sigma^2(f,P_k)\rangle$ integrálközelítő összegsorozat, hogy

$$\text{létezik } \lim_{k\to\infty}\sigma^1(f,P_k)=\underline{I} \quad \text{illetve} \quad \lim_{k\to\infty}\sigma^2(f,P_k)=\bar{I}\,.$$

Megjegyzés. $\underline{I}$ és $\bar{I}$ tehát meghatározható egy speciális normális felosztássorozathoz tartozó $\langle s(f,P_k)\rangle$, illetve $\langle S(f,P_k)\rangle$ sorozat határértékeként. Ezért például a már vizsgált $f(x)=x^2$ $(x\in[0,1])$ függvényre $\underline{I}=\bar{I}=\frac{1}{3}$, így az Riemann-integrálható.

4. A Riemann-integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

1. tétel. *Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha létezik $I\in\mathbb{R}$ hogy bármely $\varepsilon>0$-hoz létezik $\delta(\varepsilon)>0$, hogy bármely olyan P felosztására $[a,b]$-nek, melyre $\|P\|<\delta(\varepsilon)$, $|\sigma(f,P)-I|<\varepsilon$ teljesül bármely $\sigma(f,P)$-re.*

2. tétel. *Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha $[a,b]$ bármely $\langle P_k\rangle$ normális felosztássorozathoz tartozó bármely $\sigma(f,P_k)$ integrálközelítő összegsorozat konvergens.*

3. tétel (Riemann-kritérium). *Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha bármely $\varepsilon>0$ esetén létezik P felosztása $[a,b]$-nek, hogy*

$$\mathcal{O}(f,P)=S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon\,.$$

Bizonyítás.

a) Legyen f Riemann-integrálható, azaz $\underline{I}=\bar{I}=I$ és $\varepsilon>0$ adott. A Darboux-tétel miatt $\frac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists\ \delta(\varepsilon)>0$, hogy ha P olyan felosztása $[a,b]$-nek,melyre $\|P\|<\delta(\frac{\varepsilon}{2})$, akkor
$$I-s(f,P)<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad S(f,P)-I<\frac{\varepsilon}{2}\,,$$
ami adja, hogy $\mathcal{O}(f,P)=S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$.

b) Tegyük fel, hogy $\forall\ \varepsilon>0$-ra $\exists\ P$, hogy $\mathcal{O}(f,P)=S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$. Ekkor $0\le\bar{I}-\underline{I}\le S(f,P)-s(f,P)=\mathcal{O}(f,P)<\varepsilon$ miatt következik, hogy $\underline{I}=\bar{I}$, azaz f Riemann-integrálható. $\square$

4. tétel. *Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha az $[a,b]$ bármely $\langle P_k\rangle$ normális felosztássorozata esetén $\langle\mathcal{O}(f,P_k)\rangle$ nullsorozat.*

5. tétel. *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Bármely P-re $\bar{I}-\underline{I}\le\mathcal{O}(f,P)$, így elég megmutatni, hogy bármely $\varepsilon>0$-hoz létezik P felosztása $[a,b]$-nek, hogy $\mathcal{O}(f,P)<\varepsilon$ (mert akkor $\underline{I}=\bar{I}$): f folytonossága adja egyenletes folytonosságát $[a,b]$-n, így $\frac{\varepsilon}{b-a}$-hoz létezik $\delta(\varepsilon)>0$, hogy $\forall\ x',x''\in[a,b]$, $|x'-x''|<\delta(\varepsilon)$ esetén

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Legyen P olyan, hogy $\|P\| < \delta(\varepsilon)$, akkor

$$\bar{I} - \underline{I} \le \mathcal{O}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i') - f(x_i''))\Delta x_i < \varepsilon \ .$$

(Itt felhasználtuk, hogy f folytonossága miatt $\exists\ x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$, hogy $M_i = f(x_i'),\ m_i = f(x_i'')$.) □

6. tétel. *Egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton függvény Riemann-integrálható.*

Bizonyítás.

a) Ha $f(a) = f(b) \implies f(x) \equiv C \implies$ az állítás igaz.

b) Ha $f(a) \ne f(b)$, akkor $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén olyan P-re, hogy $\|P\| < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ (felhasználva például monoton növekvő f függvény esetén, hogy $m_i = f(x_{i-1}),\ M_i = f(x_i)$) kapjuk, hogy

$$\bar{I} - \underline{I} \le \mathcal{O}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]\Delta x_i <$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})] = \varepsilon \ ,$$

ami adja, hogy $\underline{I} = \bar{I}$ azaz f Riemann-integrálható. □

Példa. Tekintsük az $f(x) = [x],\ x \in [-1,2]$ függvényt (az egészrész függvény leszűkítését a $[-1,2]$ intervallumra). Ez monoton növekedő, így tételünk miatt Riemann-integrálható $[-1,2]$-n, de nem folytonos).

7. tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható $[a,b]$-n, $[c,d] \subset [a,b]$, akkor f Riemann-integrálható $[c,d]$-n is.*

8. tétel (az integrál intervallum feletti additivitása). *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ c \in\ ]a,b[\ ,\ f$ Riemann-integrálható $[a,c]$-n és $[c,b]$-n, akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n is, és*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \ .$$

Következmény. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és $P = \{a = a_0, a_1, \dots, a_n = b\}$ egy felosztása $[a,b]$-nek. Ha f Riemann-integrálható bármely $[a_{i-1}, a_i]$ intervallumon, akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n és*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\ dx$$

Bizonyítás. A 8. tétel felhasználásával és teljes indukcióval azonnal kapjuk az állítást. □

9. tétel (Lebesgue-kritérium). *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha egy Lebesgue szerint nullmértékű halmaztól eltekintve folytonos. ($H \subset \mathbb{R}$ Lebesgue szerint nullmértékű, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\{\,]a_n, b_n[\ \mid n \in \mathbb{N}\}$ intervallumrendszer, hogy $H \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\,]a_n, b_n[$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon$.)*

Megjegyzések.

1. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, úgy az 5. tétel miatt Riemann-integrálható, azaz $\underline{I} = \bar{I}$. Az $[a,b]$ intervallum egyenlő részekre osztásával nyert $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozat, mert $\|P_k\| = \dfrac{b-a}{k} \to 0$. Így a Darboux-tétel következménye miatt:
$$\lim_{k\to\infty} s(f,P_k) = \underline{I} = \bar{I} = \lim_{k\to\infty} S(f,P_k) \ ,$$
ezért a középiskolában adott integrál definíció a Riemann-integrállal megegyező eredményt ad.
2. Tételeink alapján egy Riemann-integrálható függvény Riemann-integrálját bármely $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozathoz tartozó $\langle s(f,P_k) \rangle$, $\langle S(f,P_k) \rangle$, vagy $\langle \sigma(f,P_k) \rangle$ sorozat határértéke megadja.

5. A Riemann-integrál műveleti tulajdonságai

1. tétel. *Ha* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálhatók,* $p, q \in \mathbb{R}$, *akkor a* $(p \cdot f + q \cdot g) : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int_a^b (p \cdot f + q \cdot g) = p \cdot \int_a^b f + q \cdot \int_a^b g$$

Bizonyítás. $[a, b]$ bármely $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozatára

$$\sigma(p \cdot f + q \cdot g, P_k) = p \cdot \sigma(f, P_k) + q \cdot \sigma(g, P_k) \ ,$$

ami f és g Riemann-integrálhatósága és a Riemann-integrálhatóság kritériuma (II.4.2. tétel) miatt adja az állítást. □

Megjegyzés. A tételből teljes indukcióval következik, hogy ha az $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények Riemann-integrálhatók és $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor a $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ függvény is Riemann-integrálható és

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_a^b f_i \ .$$

2. tétel. *Ha* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható, akkor* f^2 *is, továbbá ha létezik* $c > 0$, *hogy* $|f(x)| \geq c$ *bármely* $x \in [a, b]$, *akkor* $\dfrac{1}{f}$ *is Riemann-integrálható.*

3. tétel. *Ha az* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvények Riemann-integrálhatók, akkor* $f \cdot g$ *is, továbbá ha létezik* $c > 0$, *hogy* $|g(x)| > c$ *bármely* $x \in [a, b]$*-re, úgy* $\frac{f}{g}$ *is Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Az

$$f \cdot g = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2] \quad \text{és} \quad \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

egyenlőségek – az első két tétel felhasználásával – nyilvánvalóan adják az állítást. □

Megjegyzések.

1. A 3. tétel teljes indukcióval adja, hogy véges sok Riemann-integrálható függvény szorzata is Riemann-integrálható.
2. Riemann-integrálható függvények kompozíciója általában nem Riemann-integrálható.
3. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ és $R_f \subset [c, d]$. Ha f Riemann-integrálható és g folytonos, akkor $g \circ f$ Riemann-integrálható.

4. tétel. *Ha* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható függvény, akkor* $|f|$ *is Riemann-integrálható.*

6. Egyenlőtlenségek, középértéktételek Riemann-integrálra

1. tétel. *Legyenek* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálhatók és* $f \leq g$, *akkor* $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$.

Bizonyítás. Legyen $\langle P_k \rangle$ tetszőleges normális felosztássorozata $[a, b]$-nek, $t_i^k \in [x_{i-1}^k, x_i^k]$ tetszőleges, akkor $f(t_i^k) \leq g(t_i^k)$ miatt $\sigma(f, P_k) \leq \sigma(g, P_k)$, ami adja az állítást. □

Megjegyzés. Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvények és $f \leq g$, akkor

$$\int_{\overline{a}}^{b} f \leq \int_{\overline{a}}^{b} g \qquad \text{és} \qquad \int_{a}^{\underline{b}} f \leq \int_{a}^{\underline{b}} g \ .$$

2. tétel. *Legyen* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható, akkor*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \ .$$

Bizonyítás. $|f|$ az 5.4. tétel miatt Riemann-integrálható, így a $-|f| \leq f \leq |f|$ egyenlőtlenségből az 1. tétel miatt $-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$, ami adja az állítást. □

3. tétel (középértéktétel). *Legyenek $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhatók, továbbá*

$$m \le f(x) \le M \ , \quad 0 \le g(x) \qquad (x \in [a,b]),$$

akkor

$$m \cdot \int_a^b g \le \int_a^b f \cdot g \le M \cdot \int_a^b g \ .$$

Bizonyítás. $m \cdot g,\ f \cdot g,\ M \cdot g$ Riemann-integrálhatók és

$$m \cdot g \le f \cdot g \le M \cdot g$$

$[a,b]$-n, melyből az 1. tétel miatt jön az állítás. □

Következmények.

1. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, $m \le f \le M$, akkor

$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f \le M \ .$$

Bizonyítás. A 3. tételből $g(x) = 1$ választással kapjuk az állítást.

2. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor létezik $c \in [a,b]$, hogy

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \ .$$

Bizonyítás. f folytonossága miatt $m = \inf f([a,b]),\ M = \sup f([a,b])$ függvényértékek, az 1. következmény miatt $\frac{1}{b-a} \int_a^b f \in [m,M]$, így Bolzano egy tétele miatt létezik c, hogy $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$, amit bizonyítani kellett.

7. Az integrál, mint a felső határ függvénye

1. definíció. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor

$$\int_a^a f \doteq 0, \quad \int_b^a \doteq -\int_a^b$$

2. definíció. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor az

$$\text{(I-F)} \qquad F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) \doteq \int_a^x f(t)dt$$

szerint definiált F függvényt f ***integrál***jának, ***mint a felső határ függvényé***nek nevezzük. Ezt szokás ***területmérő függvény***nek, vagy f ***integrálfüggvényé***nek is nevezni.

1. tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor F (f integrálja, mint a felső határ függvénye) folytonos $[a,b]$-n.*

2. tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható és folytonos az $x \in [a,b]$ pontban, akkor az F (f integrálja, mint a felső határ függvénye) differenciálható x-ben, és $F'(x) = f(x)$. (Tehát, ha f bármely $x \in [a,b]$-ben folytonos, úgy F egy primitív függvénye f-nek.)*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor f x-beli folytonossága miatt létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$\forall\ t \in [a,b],\ |t - x| < \delta(\varepsilon) \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Legyen h olyan, hogy $x + h \in [a,b]$ és $|h| < \delta(\varepsilon)$, akkor – felhasználva, hogy $\int_x^{x+h} f(x)dt = hf(x)$ – jön:

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt\right)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{|h|}\operatorname{sign}(h)\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt < \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\varepsilon dt = \frac{1}{h}h\varepsilon = \varepsilon\ ,$$

ami azt jelenti, hogy létezik

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \text{ és } = f(x)\ ,$$

amit bizonyítani kellett. Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos, úgy ez igaz bármely $x\in[a,b]$ esetén, azaz $F'(x)=f(x)$ $(x\in[a,b])$, tehát F egy primitív függvénye f-nek.

Tehát minden (intervallumon értelmezett) folytonos függvénynek van primitív függvénye. □

8. A Newton-Leibniz formula

Tétel (Newton-Leibniz formula). *Legyen $f,F:[a,b]\to\mathbb{R}$ olyan, hogy f Riemann-integrálható, F folytonos $[a,b]$-n és differenciálható $]\,a,b\,[$-n, továbbá $F'(x)=f(x)$ $(x\in\,]\,a,b\,[)$, akkor*

$$\int_a^b f = F(b)-F(a)$$

(Az $F(b)-F(a)$ számot szokás $[F(x)]_a^b$ módon is jelölni.)

Bizonyítás. Legyen $\langle P_k\rangle = \langle\{x_i^k \mid i=0,1,\ldots,n_k\}\rangle$ tetszőleges normális felosztássorozata $[a,b]$-nek. F teljesíti a Lagrange-tétel feltételeit bármely $[x_{i-1}^k,x_i^k]$ intervallumon, így $\exists\ t_i^k\in\,]\,x_{i-1}^k,x_i^k\,[$, hogy

$$F(x_i^k)-F(x_{i-1}^k) = F'(t_i^k)\Delta x_i^k = f(t_i^k)\Delta x_i^k \qquad \forall\ i=0,1,\ldots,n_k \text{ esetén.}$$

Ezeket összegezve pedig

$$F(b)-F(a) = \sum_{i=1}^{n_k}(F(x_i^k)-F(x_{i-1}^k)) = \sum_{i=1}^{n_k} f(t_i^k)\Delta x_i^k = \sigma(f,P_k)$$

következik $\forall\ k$-ra, így $k\to\infty$ esetén (f integrálhatósága miatt)

$$F(b)-F(a) = \sigma(f,P_k) \to \int_a^b f\ ,$$

azaz $F(b)-F(a)=\int_a^b f$ (mert $\sigma(f,P_k)$ konstans sorozat), és ezt kellett bizonyítani. □

Megjegyzés. Ha F differenciálható $[a,b]$-n és $F'=f$, azaz F primitív függvénye f-nek, akkor F-et nyilván az I.1. fejezetben tanultak szerint határozzuk meg, majd alkalmazhatjuk tételünket.

Példák.

1. Számítsa ki az $\int_1^2 [x]\,dx$ Riemann-integrált (ha létezik).

   Az $f(x)=[x]$, $x\in[1,2]$ függvény monoton növekedő, ezért Riemann-integrálható. A $F(x)=x$, $x\in[1,2]$ függvény differenciálható, továbbá $F'(x)=1=[x]$, ha $x\in[1,2[$. Teljesülnek tehát tételünk feltételei, így

$$\int_1^2 [x]\,dx = F(2)-F(1) = 2-1 = 1\ .$$

2. Számítsa ki az $\int_1^\pi \sin(x)\,dx$ Riemann-integrált (ha létezik).

   Az $f(x)=\sin(x)$, $x\in[0,\pi]$ folytonos, ezért Riemann-integrálható. Ismeretes, hogy $\int\sin(x)\,dx = -\cos(x)+C$ $(x\in\mathbb{R})$, így a $F(x)=-\cos(x)$, $(x\in[0,\pi])$ az f primitív függvénye (azaz $F'(x)=f(x)$) $[0,\pi]$-n, ezért tételünk és a megjegyzés miatt

$$\int_1^\pi \sin(x)\,dx = \big[-\cos(x)\big]_0^\pi = 1+1 = 2\ .$$

9. Parciális és helyettesítéses Riemann-integrálok

1. tétel (parciális Riemann-integrálás). *Ha az $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosan differenciálhatók, akkor*

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g \ .$$

Bizonyítás. Legyen $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_a^t fg' + \int_a^t f'g + f(a)g(a) - f(t)g(t)$, akkor $\forall\ t \in [a, b]$-re $\exists\ F'(t)$ és

$$F'(t) = f(t)g'(t) + f'(t)g(t) - [f(t)g(t)]' = 0 \qquad (\forall\ t \in [a, b]),$$

így $F(t) \equiv c$, illetve $F(a) \doteq 0$ miatt $c = 0$ és ezért $F(b) = 0$, ami F definíciójából adja az állítást. $\square$

Példa. Számítsuk ki az $\int_0^\pi x \sin(x)\, dx$ Riemann-integrált (ha létezik).
Az $f(x) = x$, $g(x) = -\cos(x)$ $(x \in [0, \pi])$ folytonosan differenciálhatók, mert létezik $f'(x) = 1$, $g'(x) = \sin(x)$ $(x \in [0, \pi])$ és az $f', g' : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak. Ezért tételünk és a Newton-Leibniz formula szerint

$$\int_0^\pi x \sin(x)\, dx = \pi(-\cos(\pi)) - 0 \cdot (-\cos(0)) - \int_0^\pi 1 \cdot (-\cos(x))\, dx =$$

$$= \pi + \int_0^\pi \cos(x)\, dx = \pi + \left[\sin(x)\right]_0^\pi = \pi \ .$$

2. tétel (helyettesítéses Riemann-integrálás). *Ha $g : [a, b] \to [c, d]$ folytonosan differenciálható, $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor*

(H-R)
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx \ .$$

Bizonyítás. Legyen $H : [c, d] \to \mathbb{R}$, $H(u) \doteq \int_{g(a)}^u f(x)dx$, akkor H differenciálható és $H'(x) = f(x)$ $(x \in [c, d])$. Legyen továbbá $G : [c, d] \to \mathbb{R}$

$$G(t) = \int_a^t f(g(x))g'(x)\ dx - \int_{g(a)}^{g(t)} f(x)\ dx \ ,$$

akkor $\exists\ G'(t) = f(g(t))g'(t) - H'(g(t))g'(t) = 0$, és így $G(t) \equiv c$. De akkor $G(a) = 0$ miatt $c = 0$, és így $G(b) = 0$, ami G definíciója miatt adja az állítást. $\square$

Megjegyzések.

1. (H-R)-ben x helyett írhatunk t változót a baloldalon és akkor az a

   (H*-R)
   $$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)\ dt \ .$$

   alakban is írható.
2. (H-R)-t akkor használjuk, ha észrevesszük, hogy a kiszámítandó integrálunk integrandusa $f(g(x)) \cdot g'(x)$ alakú, míg (H*-R)-t akkor, ha az $x = g(t)$ $(t \in [a, b])$ helyettesítéssel akarjuk (tudjuk) kiszámítani az $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx$ integrált.

Példák.

1. Számítsuk ki az $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$ (egyébként létező) Riemann-integrált.
   Nyilván
   $$I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ dx \ ,$$
   továbbá látható, hogy a $g : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right]$, $g(x) = \frac{1}{x}$ folytonosan differenciálható és az $f : \left[\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ folytonos függvények teljesítik a tétel feltételeit, így (H-R) és néhány korábbi

eredmény szerint

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = -\int_{\frac{4}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin(x)\,dx =$$

$$= \int_{\frac{4}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin(x)\,dx = \cos\left(\frac{2}{\pi}\right) - \cos\left(\frac{4}{\pi}\right)\,.$$

2. Számítsa ki az $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ Riemann-integrált.

   Az $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ $(x \in [0,1])$ függvény folytonos.
   Legyen $g(t) = \log t$ $(t \in [1,e])$, ekkor $g([1,e]) = [0,1]$, $0 = g(1)$, $1 = g(e)$ és g ($g'(t) = \frac{1}{t}$ miatt) folytonosan differenciálható, ezért a (H*-R) szerint

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_{\log 1}^{\log e} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_1^e \frac{e^{\log t}}{1+e^{2\log t}}\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \left[\operatorname{arctg} t\right]_1^e = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}\,.$$

10. Függvénysorozatok és függvénysorok tagonkénti integrálhatósága és differenciálhatósága

1. tétel. *Ha az $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n = 1,2,\dots)$ függvények Riemann-integrálhatók $[a,b]$-n és az $\langle f_n\rangle$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez $[a,b]$-n, akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n és*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n \tag{1}$$

teljesül.

Következmény. *Ha az $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények Riemann-integrálhatók $[a,b]$-n, és $\sum f_n$ egyenletesen konvergál $[a,b]$-n az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez, akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n és $\int\limits_a^b f = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b f_n$.*

Bizonyítás. A $\sum f_n$ függvénysor $\langle S_n\rangle$ részletösszeg sorozatára alkalmazzuk az 1. tételt. □

2. tétel. *Ha az $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n = 1,2,\dots)$ függvények folytonosan differenciálhatók $[a,b]$-n, valamely $x_0 \in [a,b]$ esetén $\langle f_n(x_0)\rangle$ konvergens, továbbá $\langle f_n'\rangle$ egyenletesen konvergens $[a,b]$-n, akkor $\langle f_n\rangle$ egyenletesen konvergál egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez $[a,b]$-n, létezik f' és*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad (x \in [a,b]) \tag{3}$$

Következmények.

1. Ha $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n = 1,2,\dots)$ folytonosan differenciálhatók és létezik $x_0 \in [a,b]$, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konvergens és $\sum f_n'$ egyenletesen konvergens $[a,b]$-n, akkor $\exists\ \sum f_n = f$ és létezik $f' = \sum f_n'$.
2. A tétel speciális esete a hatványsorok differenciálhatóságára vonatkozó tétel (hiszen a feltételek ekkor természetesen teljesülnek).

11. Improprius Riemann-integrál

1. definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $a < b \leq +\infty$, $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ minden $[a,t] \subset [a,b[$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható függvény. Tegyük fel továbbá, hogy $b = +\infty$ vagy $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy f nem korlátos a $[b-\varepsilon, b[$ intervallumban. Ha létezik a

$$\lim_{t\to b-0}\int_a^t f \doteq \int_a^b f \tag{1}$$

véges határérték, akkor azt az f függvény ***improprius Riemann-integrál***jának nevezzük $[a,b[$-n. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_a^b f$ ***improprius integrál konvergens***. Ha (1) nem létezik, akkor az improprius integrált divergensnek mondjuk.

2. definíció. Ha $a \in \mathbb{R}$, $-\infty \le c < a$, $f :]c, a] \to \mathbb{R}$ minden $[t, a] \subset]c, a]$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható, $c = -\infty$ vagy $\exists\, \varepsilon > 0$, hogy f nem korlátos $]c, c+\varepsilon]$-on. Ha létezik a

$$\lim_{t \to c+0} \int_t^a f \doteq \int_c^a f \tag{2}$$

véges határérték, akkor azt az f ***improprius Riemann-integrál***jának nevezzük $(c, a]$-n. (A konvergencia illetve a divergencia az előzőekhez hasonló.)

3. definíció. Legyen $-\infty \le a < b \le +\infty$, $f :]\,a, b\,[\to \mathbb{R}$ $\forall\ [x, y] \subset]\,a, b\,[$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható, továbbá $a = -\infty$ vagy $b = +\infty$ (vagy mindkettő) vagy létezik $\varepsilon > 0$, hogy f nem korlátos az $]\,a, a+\varepsilon] \cup [b-\varepsilon, b\,[$ intervallmon. Akkor a

$$\lim_{\substack{x \to a+0 \\ y \to b-0}} \int_x^y f \doteq \int_a^b f$$

véges határértéket (ha létezik) f $[\,a, b\,]$ ***feletti improprius Riemann-integrálja***nak nevezzük.

Példák.

1. Konvergens-e az $\int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx$ improprius integrál, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ rögzített?

   Legyen $a = 1$, $b = +\infty$, ekkor az $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ függvény bármely $[1, t] \subset [1, +\infty[$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható (hiszen folytonos) és

$$\int_1^t x^\alpha\,dx = \begin{cases} \left[\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^t = \dfrac{1}{\alpha+1}(t^{\alpha+1} - 1) & \text{, ha } \alpha \ne -1, \\ [\ln \alpha]_1^t = \ln t & \text{, ha } \alpha = -1. \end{cases}$$

   Továbbá

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha+1} = \begin{cases} 0 & \text{, ha } \alpha < -1, \\ +\infty & \text{, ha } \alpha > -1, \end{cases} \qquad \lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty\ .$$

   Ezért az 1. definíció szerint

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx = \begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{\alpha+1}(t^{\alpha+1} - 1) = -\dfrac{1}{\alpha+1} & \text{, ha } \alpha < -1, \\ +\infty & \text{, ha } \alpha \ge -1 \text{ (divergens).} \end{cases}$$

2. Konvergens-e az $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,dx$ improprius integrál, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ rögzített?

   Legyen $a = 0$, $b = +\infty$, ahol az $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$ függvény bármely $[0, t] \subset [0, +\infty[$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható, mert folytonos, és

$$\int_0^t e^{\alpha x}\,dx = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}\right]_0^t = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \qquad \text{ha } \alpha \ne 0,$$

   illetve

$$\int_0^t e^{0x}\,dx = \int_0^t 1\,dx = t\ .$$

   Mivel

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t} = \begin{cases} 0 & \text{, ha } \alpha < 0, \\ +\infty & \text{, ha } \alpha > 0 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \lim_{t \to +\infty} t = +\infty\ ,$$

   így

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha} & \text{, ha } \alpha < 0, \\ +\infty & \text{, ha } \alpha \ge 0. \end{cases}$$

1. tétel. *Ha az* $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ *improprius Riemann-integrálok konvergensek,* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, *akkor* $\int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g)$ *is konvergens, és*

$$\int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \cdot \int_a^b f + \lambda_2 \cdot \int_a^b g\ .$$

Bizonyítás. Például $\int_a^t$-re igaz, majd $t \to b-0$-val jön az állítás. $\square$

2. tétel. *Legyen* $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$, $m \leq f \leq M$, $g \geq 0$, *létezik* $\int\limits_a^b g$, $\int\limits_a^b fg$ *improprius integrálok, akkor*

$$m \cdot \int\limits_a^b g \leq \int\limits_a^b fg \leq M \cdot \int\limits_a^b g \ ,$$

illetve ha f *folytonos, úgy létezik* $\xi \in [a, b[$, *hogy*

$$\int\limits_a^b fg = f(\xi) \int\limits_a^b g \ .$$

Bizonyítás. A Riemann-integrálra vonatkozó tétel alapján. □

3. tétel. *Legyen* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_b$, $a < b$, $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható bármely* $[a, c] \subset [a, b[$ *intervallumon, és* $d \in [a, b[$. *Ha az* $\int\limits_a^b f$ *improprius integrál konvergens, akkor az* $\int\limits_d^b f$ *is az, továbbá*

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^d f + \int\limits_d^b f$$

(ahol $\int\limits_a^d f$ f $[a, d]$ *feletti Riemann-integrálját, míg* $\int\limits_d^b f$ f $[d, b[$*-re való leszűkítésének improprius integrálját jelöli.)*

Bizonyítás. Mivel $\forall\ x \in]\, d, b\, [$-re

$$\int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_a^d f(x)\ dx + \int\limits_d^x f(t)dt \ ,$$

ebből következik az állítás. □

II. fejezet

Vekotorterek, euklideszi terek, metrikus terek

Bevezetés

Itt összefoglaljuk azokat, a többváltozós függvények vizsgálatánál fontos lineáris algebrai fogalmakat és eredményeket, melyeket a Diszkrét matematika tárgyban tanultak, tanulnak (vektortér, euklideszi tér, mátrixok, determinánsok).

Ugyanakkor (elsősorban a 3. fejezetben, de részben máshol is) kiegészítjük ezeket azokkal az alapvető topológiai fogalmakkal és tételekkel, melyek egyrészt az $\mathbb{R}$ topológiájáról tanultak általánosításai, másrészt ugyancsak fontos szerepet játszanak későbbi tanulmányainkban (környezet, nyílt és zárt halmazok, torlódási pont, kompakt és összefüggő halmazok).

1. Vektortér, euklideszi tér és metrikus tér fogalma

1. definíció. Legyen adott egy V halmaz (elemeit ***vektor***oknak nevezzük). Tegyük fel, hogy értelmezve van két ***művelet***:

- a ***vektorok összeadása***, melyet $x, y \in V$-re $x + y$,
- a ***skalárral való szorzás***, melyet $x \in V \wedge \lambda \in \mathbb{R}$ esetén λx jelöl.

V-t e két művelettel ***vektortér***nek, (vagy ***lineáris tér***nek) nevezzük, ha bármely $x, y, z \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

1) $x + y = y + x$ (kommutativitás),
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asszociativitás),

3) $\exists\ 0 \in V,\ x + 0 = x$ (nullelem létezése),
4) $\forall\ x \in V,\ \exists\ -x \in V,\ x + (-x) = 0$ (inverzelem létezése),
5) $1 \cdot x = x$,
6) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,
7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (disztributivitás).

2. definíció. Ha V egy vektortér, akkor a $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ függvényt ***skaláris***, vagy ***belsőszorzat***nak nevezzük, ha $\forall\ x, y, z \in V$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
2) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$,
4) $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

teljesül.

3. definíció. Egy V vektorteret, rajta egy skaláris (vagy belső) szorzattal, ***belsőszorzattér***nek, vagy (néha csak valós értékű skaláris szorzat esetén) ***euklideszi tér***nek nevezünk.

4. definíció. Ha V belsőszorzattér, akkor az $x \in V$ vektor hosszán, vagy ***euklideszi normá***ján az $\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x\rangle}$ számot értjük.

1. tétel. *Az euklideszi normára teljesül:*

1) $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \iff x = 0, \qquad \forall\ x \in V$,
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\| \qquad \forall\ x \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$,
3) $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\ \|y\|^2$,
4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall\ x, y \in V$.

Bizonyítás.
1) Azonnal következik abból, hogy $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle \geq 0$ és akkor és csak akkor $= 0$, ha $x = 0$.
2) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\ \|x\|$ (felhasználva a norma definícióját, a belső szorzat és a négyzetgyök tulajdonságait).
3) A

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle =$$
$$= \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|x\|^2 \qquad (\forall\ x, y \in V,\ \lambda \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenség (és a másodfokú függvény ismert tulajdonsága) adja az állítást, ha $\|y\|^2 > 0$, ha $y = 0$, úgy az állítás nyilvánvalóan igaz $\langle x, 0\rangle = 0$ és $\|y\| = 0$ miatt.

4) $$0 \le \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$
$$\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

és az egyenlőtlenségek ismert tulajdonsága adja az állítást. □

Megjegyzés. Minden, az 1)-4) tulajdonságot teljesítő $\|\,.\,\| : V \to \mathbb{R}$ függvényt normának nevezünk V-n.

5. definíció. Ha V belsőszorzattér (vagy euklideszi tér) akkor az $x, y \in V$ vektorok ***euklideszi távolság***án a $d(x, y) \doteq \|x - y\|$ számot értjük és azt mondjuk, hogy a $d : V \times V \to \mathbb{R}$ függvény távolság, vagy ***metrika*** V-ben.

2. tétel. *A V-beli euklideszi távolságra teljesül:*

1) $d(x, y) \ge 0\,, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y\,, \qquad \forall\, x, y \in V\,,$
2) $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall\, x, y \in V\,,$
3) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) \qquad \forall\, x, y, z \in V\,.$

Bizonyítás.
1) $d(x, y) = \|x - y\| \ge 0$, és $d(x, y) = 0 \iff = 0$, ha $x = y$;
2) $d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$;
3) $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \le \|x - y\| + \|y - z\| =$
$= d(x, y) + d(y, z)$. □

6. definíció. Legyen X egy nemüres halmaz. Ha értelmezve van egy $d : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény az

1) $d(x, y) \ge 0\,, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y\,, \qquad \forall\, x, y \in X\,,$
2) $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall\, x, y \in X\,,$
3) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) \qquad \forall\, x, y, z \in X$

tulajdonságokkal, akkor azt mondjuk, hogy d ***metrika*** X-en és X-et ***metrikus tér***nek nevezzük. Jelölés: (X, d).

Megjegyzés. $\mathbb{R}$ a $d(x, y) \doteq |x - y|$, míg a V euklideszi tér a $d(x, y) \doteq \|x - y\|$ metrikával metrikus tér.

7. definíció. Legyen (X, d) metrikus tér. Az $a \in X$ r (> 0) sugarú ***nyílt gömbkörnyezet***én a $K(a, r) \doteq \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$ halmazt értjük.

8. definíció. Legyen (X, d) metrikus tér. $H \subset X$ ***korlátos***, ha $H = \emptyset$ vagy $H \ne \emptyset$ esetén $\exists\, r \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, x, y \in H$-ra $d(x, y) \le r$.
Ekkor a $\operatorname{diam} H \doteq \sup\{d(x, y) \mid x, y \in H\}$ számot H ***átmérő***jének nevezzük.

Megjegyzés. Egyszerűen belátható, hogy $H \subset X$ $(H \ne \emptyset)$ pontosan akkor korlátos, ha $\exists\, a \in X \wedge \exists\, r \in \mathbb{R}$, hogy $d(x, a) < r$ $\forall\, x \in H$ esetén.

2. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér

1. definíció. Legyen $\mathbb{R}^1 \doteq \mathbb{R}$, és ha $n \in \mathbb{N}$-re már $\mathbb{R}^n$ értelmezett, akkor $\mathbb{R}^{n+1} \doteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$ elemeit $(x_1, \dots, x_n)$-nel jelöljük és ***rendezett valós szám*** n***-es***eknek nevezzük, ahol

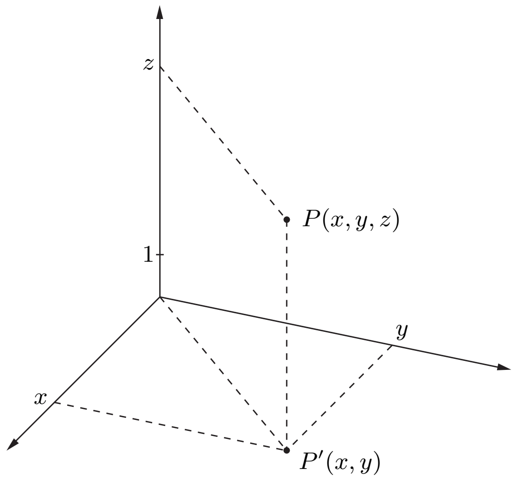
$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \iff x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n\,.$$

Ha $x \doteq (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor az x_i-ket az x ***koordinátái***nak, $\mathbb{R}^n$ elemeit pontoknak, vagy vektoroknak is nevezzük.
Szokásos az $\mathbb{R}^n \doteq \overset{1}{\mathbb{R}} \times \cdots \times \overset{n}{\mathbb{R}}$ jelölés is és azt is mondjuk, az $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$ önmagával vett n-szeres Descartes-szorzata.

Megjegyzés. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ egy modelljét (reprezentációját) már a Kalkulus I. V.1. fejezetében megadtuk, mint a síkbeli Descartes-féle koordinátarendszert.

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ egy modellje (reprezentációja) az alábbi módon bevezetett térbeli Descartes-féle koordinátarendszer.

Ha adott a síkbeli Descartes-féle koordinátarendszer, úgy annak $(0, 0)$ koordinátájú pontjában állítsunk merőleges egyenest, mely egy olyan számegyenes, melynek 0 pontja a $(0, 0)$ döféspont, az egységet pedig úgy jelöljük ki, hogy onnan a síkra „nézve” az y-tengely pozitív forgással vihető át az x-tengelybe. Az új tengelyt z-tengelynek is nevezhetjük.



A tér pontjaihoz az $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ rendezett számhármasokat bijektíven lehet hozzárendelni úgy, hogy egy P ponthoz rendelt z koordináta a P-ből a z tengelyre bocsájtott merőleges talppontjának megfelelő szám a z számegyenesen, míg ha P' a P pont merőleges vetülete a síkra, úgy x és y a P' koordinátái a síkbeli Descartes-féle koordinátarendszerben.

Ekkor a tér pontja valós számhármasokkal, $\mathbb{R}^3$ elemivel jellemezhetők, és fordítva.

2. definíció. Legyen adott az $\mathbb{R}^n$ halmaz és értelmezzük benne az ***összeadás*** és ***skalárral való szorzás*** műveletét

$$x + y \doteq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \text{illetve} \quad \lambda x \doteq (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

szerint, ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \ \wedge\ \lambda \in \mathbb{R}$.

1. tétel. *$\mathbb{R}^n$ a most értelmezett két művelettel vektortér (vagy lineáris tér).*

Bizonyítás. A vektortér 1)-7) tulajdonságai egyszerűen ellenőrizhetők. A nullelem: $0 \doteq (\overset{1}{0}, \ldots, \overset{n}{0})$. □

2. tétel. *Ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, úgy*

$$\langle x, y\rangle \doteq x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

skaláris (vagy belső) szorzat $\mathbb{R}^n$-ben.

Bizonyítás. A belsőszorzat 1)-4) tulajdonságának ellenőrzésével. □

3. tétel. *Ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor az*

$$\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x\rangle} \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \textit{illetve} \quad d(x,y) \doteq \|x - y\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

szerint definiált norma, illetve távolság (metrika) teljesíti a norma, illetve metrika tulajdonságait.

Bizonyítás. Egyszerű (feladat). □

Megjegyzések.

1. A 2., 3. tételben definiált skaláris (belső) szorzattal, normával, illetve távolsággal (metrikával) $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér, euklideszi normával és metrikával. $(\mathbb{R}^n, d)$-t n-dimenziós euklideszi térnek is nevezik.
2. Ha $n = 1$, úgy a $d(x, y) \doteq |x - y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$ távolsággal $(\mathbb{R}^1, d) = (\mathbb{R}, d)$ metrikus tér, hiszen d teljesíti a metrika 3 tulajdonságát.
3. Az $a \in \mathbb{R}^n$ pont (vektor) r sugarú nyílt gömbkörnyezete a
$$K(a, r) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < r\}$$
halmaz, ahol d az $\mathbb{R}^n$-beli euklideszi távolság.
4. A korlátosság és az átmérő fogalma $(\mathbb{R}^n, d)$-ben ugyanaz mint (X, d)-ben.
Igaz továbbá, hogy $H \subset (\mathbb{R}^n, d) \iff$ korlátos, ha $\exists\ r \in \mathbb{R},\ H \subset K(0, r)$ (azaz $\|x\| < r\ \forall\ x \in H$).

3. $\mathbb{R}^n$ topológiája

Az $(\mathbb{R}^n, d)$ metrikus térben egy $a \in \mathbb{R}^n$ vektor, pont vagy elem $r > 0$ sugarú nyílt gömbkörnyezetén a $K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < r\}$ halmazt értettük, ahol a

$$d(x, a) \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}$$

$\mathbb{R}^n$-beli metrika szerepel. Ha szükséges a megkülönböztetés, akkor szokás a $d_{\mathbb{R}^n}$ jelölés is az $\mathbb{R}^n$-beli távolságra (metrikára).

1. definíció. Legyen adott $E \subset (\mathbb{R}^n, d)$ halmaz. Azt mondjuk, hogy

– $x \in E$ ***belső pont***ja E-nek, ha $\exists\ K(x,r)$, hogy $K(x,r) \subset E$;

– $x \in \mathbb{R}^n$ ***külső pont***ja E-nek, ha belső pontja CE-nek (azaz $\exists\ K(x,r),\ K(x,r) \cap E = \emptyset$);

– $x \in \mathbb{R}^n$ ***határpont***ja E-nek, ha nem belső és nem külső pontja (azaz $\forall\ K(x,r)$-re $K(x,r) \cap E \neq \emptyset\ \wedge\ K(x,r) \cap CE \neq \emptyset$).

A belső pontok halmazát E ***belsejé***nek, a határpontok halmazát E ***határá***nak nevezzük.

Példa. Legyen $E =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$.
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ belső pontja E-nek, mert például $K((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{4})$ (az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pont $\frac{1}{4}$ sugarú környezete) teljesíti, hogy $K((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{4}) \subset]0,1[\times]0,1[$.
$(3,0)$ külső pontja E-nek, mert $K((3,0),1) \cap E = \emptyset$ miatt $K((3,0),1) \subset C_{\mathbb{R}^2}E$, azaz $(3,0)$ belső pontja $C_{\mathbb{R}^2}E$-nek.
$(1,0)$ határpontja E-nek, mert $\forall\ r > 0$ esetén $K((1,0),r) \not\subset E$ (hiszen $(1+\frac{r}{2},0) \in K((1,0),r)$, de $(1+\frac{r}{2},0) \notin E$) miatt nem belső és $K((1,0),r) \not\subset CE$ (hiszen $(1-\frac{r}{2},0) \in E$) miatt nem külső pontja E-nek.

2. definíció. Az $E \subset (\mathbb{R}^n, d)$ halmazt ***nyílt***nak nevezzük, ha minden pontja belső pont; ***zárt***nak nevezzük, ha CE nyílt.

Példák.

1. $E =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, mert $\forall\ (x,y) \in E$ esetén, ha $r = \min\{x, 1-x, y, 1-y\}$, akkor $K((x,y),r) \subset E$.
2. $E = [0,+\infty[\times]-\infty,+\infty[$ zárt halmaz, mert $\forall\ (x,y) \in CE$ esetén, ha $r = \frac{|x|}{2}$, akkor $K((x,y),\frac{|x|}{2}) \subset CE$, azaz (x,y) külső pont és így CE nyílt, tehát E zárt.

1. tétel. *Az $(\mathbb{R}^n, d)$ metrikus térben igazak a következők:*

1) $\mathbb{R}^n \wedge \emptyset$ *nyílt halmazok,*
2) *nyílt halmazok egyesítése nyílt,*
3) *véges sok nyílt halmaz metszete nyílt,*

illetve

1) $\mathbb{R}^n \wedge \emptyset$ *zárt halmazok,*
2) *zárt halmazok metszete zárt,*
3) *véges sok zárt halmaz egyesítése zárt.*

3. definíció. Legyen adott $E \subset (\mathbb{R}^n, d)$. Az $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pontot az E halmaz ***torlódási pont***jának nevezzük, ha $\forall\ K(x_0,r)$ ($\mathbb{R}^n$-beli) környezet tartalmaz x_0-tól különböző E-beli pontot, azaz $(K(x_0,r) \backslash \{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$. E torlódási pontjainak halmazát szokás E'-vel jelölni.
$x_0 \in E$ ***izolált pont***ja E-nek, ha nem torlódási pontja, azaz $\exists\ K(x_0,r)$, hogy $(K(x_0,r) \backslash \{x_0\}) \cap E = \emptyset$.

Példák.

1. Az $E = \{(\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ halmaznak a $(0,0)$ pont torlódási pontja ($(0,0) \notin E$), mert $\forall\ K((0,0),r)$-ben van eleme E-nek, hiszen $\forall\ r > 0$-ra – mert $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos – $\exists\ n \in \mathbb{N}$, hogy $n > \frac{1}{r}$, azaz $0 < \frac{1}{n} < r$, így $(0, \frac{1}{n}) \in K((0,0),r)$.
2. Az $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ halmaz minden pontja izolált pont, mert $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $(K((n,n),1) \setminus (n,n)) \cap E = \emptyset$.

2. tétel. *Az $E \subset (\mathbb{R}^n, d)$ akkor és csak akkor zárt, ha $E' \subset E$ (azaz tartalmazza minden torlódási pontját).*

3. tétel (Bolzano-Weierstrass). *Bármely $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos végtelen halmaznak létezik torlódási pontja.*

4. definíció. Nyílt halmazok egy $\{o_\nu\}$ rendszere az $S \subset \mathbb{R}^n$ halmaznak egy ***nyílt lefedés***e, ha $S \subset \bigcup\limits_{\nu} o_\nu$.

Példa. Az $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{R}^2$ halmaznak a $\{K((n,n),1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmazrendszer egy nyílt lefedése, mert bármely $n \in \mathbb{N}$-re $(n,n) \in K((n,n),1)$, így $(n,n) \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K((i,i),1)$, azaz $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K((i,i),1)$.

5. definíció. A $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz ***kompakt***, ha minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges sok halmaz, mely lefedi K-t.

Példák.

1. $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nem kompakt, mert bármely $K((n,n),1)$ elhagyásával az előbbiekben adott nyílt lefedés maradék halmazai már nem fedik le E-t, így közülük véges sok sem fedheti le.
2. $K = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ kompakt halmaz, mert K bármely o nyílt lefedése esetén $K \subset o$ miatt létezik $o_1,\ o_2,\ o_3,\ o_4$ nyílt halmazok o-ból, hogy $(i,i) \in o_i$ $(i = 1,2,3,4)$, így $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{4} o_i$, azaz bármely o-ból kiválasztható véges lefedés.

4. tétel (Heine-Borel). *Egy $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Példák.

1. A $K = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ halmaz kompakt, mert korlátos (például $K \subset K((0,0),10))$ és zárt (mert nincs torlódási pontja).
2. $E = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ nem kompakt, mert nem korlátos, ugyanis $d((1,1),(n,n)) = (n-1)\sqrt{2}$ és $\mathbb{N}$ felülről nem korlátossága miatt nem létezik $r > 0$, hogy $d((i,i),(j,j)) < r$ teljesülne bármely $i,j \in \mathbb{N}$-re.

6. definíció. Az (X,d) metrikus tér ***összefüggő***, ha nem létezik X-nek olyan nemüres o_1, o_2 nyílt részhalmaza, hogy $o_1 \cap o_2 = \emptyset$ és $o_1 \cup o_2 = X$. A H $(\neq \emptyset) \subset X$ ***összefüggő X-ben*** ha (H,d) összefüggő metrikus tér. (A d metrika $H\times H$-ra való leszűkítését is d-vel jelöljük, és (H,d) valóban metrikus tér.)

5. tétel. *$(\mathbb{R}^n, d)$ összefüggő.*

4. További lineáris algebrai előismeretek

Az előzőekben definiáltuk a vektorteret, a skaláris szorzatot, vektorok euklideszi normáját, vektorok euklideszi távolságát, illetve ezekhez kapcsolódva, speciálisan az $\mathbb{R}^n$ euklideszi teret.

A következőkben a lineáris algebra néhány olyan (a Diszkrét matematika című tárgyban részletesen is vizsgált) fogalmát vezetjük be, melyekre a későbbiekben szükségünk le.

1. definíció. *n-szer m szám egy*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n\times m}$$

alakú elrendezését $n \times m$-es ***mátrix***nak, az a_{ij} számokat a ***mátrix elemei***nek nevezzük. Ha $n = m$, akkor ***négyzetes*** (***kvadratikus***) ***mátrix***ról beszélünk.

Az $n \times m$ típusú mátrixban a számokat n sorba és m oszlopba helyeztük el. Azt a tényt, hogy egy szám az A mátrix i-edik sorában és

j-edik oszlopában van az indexei fejezik ki, így a_{ij} jelöli (az első a sor-, a második az oszolpindex).

Két mátrix ***azonos típusú***, ha soraik és oszlopaik száma is megegyezik.

Két mátrix ***egyenlő***, ha azonos típusúak és az egymásnak megfelelő helyen lévő elemeik egyenlőek.

Megjegyzések.

1. Az
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
mátrixot ***null-mátrix***nak nevezzük (azaz, ha $\forall\ a_{ij} = 0$).
2. Az
$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$
mátrixot az A mátrix ***transzponált mátrix***ának nevezzük. ($A^\top$ oszlopai az A sorai, $A^\top$ sorai A oszlopai.)
3. Ha A kvadratikus mátrix, akkor az $a_{11},\dots,a_{nn}$ számok A ***fődiagonálisát*** alkotják.
4. Ha a kvadratikus mátrix fődiagonálisában csupa 1 áll, a többi eleme pedig nulla, akkor ***egységmátrix***ról beszélünk:
$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2. definíció. Ha $A = (a_{ij})_{n\times m}$, $B = (b_{ij})_{n\times m}$ adott ***mátrixok***, akkor azok ***összege*** az a C $n \times n$-es mátrix, melyre

$$C \doteq A + B \doteq (a_{ij} + b_{ij})_{n\times m} = (c_{ij})_{n\times m} \ .$$

Az $A = (a_{ij})_{n\times m}$ ***mátrix*** $\lambda \in \mathbb{R}$ ***skalárral való szorzata*** a

$$\lambda A \doteq (\lambda a_{ij})_{n\times m}$$

mátrix.

Az $n \times m$-es mátrixok e két műveletre nézve vektorteret alkotnak.

Példa. Ha

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\2&1&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&3\\3&2&1\end{pmatrix},\qquad \lambda=5\ ,$$

akkor

$$A+B=\begin{pmatrix}1+0&3+1&4+3\\2+3&1+2&2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&7\\5&3&3\end{pmatrix},$$

$$5A=\begin{pmatrix}5\cdot1&5\cdot3&5\cdot4\\5\cdot2&5\cdot1&5\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&15&20\\10&5&10\end{pmatrix}.$$

3. definíció. Az $A=(a_{ik})_{n\times m}$ és a $B=(b_{kj})_{m\times p}$ ***mátrixok szorzata*** az a C $n\times p$ típusú mátrix, melyben

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj},$$

azaz

$$A\cdot B\doteq C\doteq(c_{ij})_{n\times p}\doteq\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}\right)_{n\times p}.$$

Példa. Ha

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&1&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\2&2\\3&3\end{pmatrix},$$

akkor

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot2+3\cdot3&2\cdot0+1\cdot2+3\cdot3\\1\cdot1+1\cdot2+4\cdot3&1\cdot0+1\cdot2+4\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&11\\15&14\end{pmatrix}.$$

1. tétel. *A mátrixszorzás fontosabb tulajdonságai:*

$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C,$$
$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,\qquad (A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C,$$
$$(\lambda A)\cdot B=\lambda(A\cdot B)=A\cdot(\lambda B),$$

(általában: $A\cdot B\neq B\cdot A$).

Megjegyzés. Az $1\times n$ típusú mátrixot ***sormátrix***nak, míg az $n\times 1$ típusút ***oszlopmátrix***nak nevezzük. Az

$$(x_1,\dots,x_n)\to(x_1\ \dots\ x_n)$$

és

$$(x_1,\dots,x_n)\to\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

kölcsönösen egyértelmű megfeleltetések lineáris izomorfiát adnak $\mathbb{R}^n$ valamint az $1\times n$, illetve $n\times 1$ típusú mátrixok vektorterei között. A következőkben $\mathbb{R}^n$ elemeit, ha mást nem mondunk, oszlopmátrixokkal reprezentáljuk.

4. definíció. Az A kvadratikus mátrix ***invertálható***, ha létezik olyan X mátrix, melyre

$$A\,X=X\,A=E$$

(ha A $n\times n$ típusú, akkor létezik $n\times n$ típusú egységmátrix). X-et az A inverz mátrixának nevezzük.

2. tétel. *Ha A invertálható, akkor csak egy inverze van. (Ha A invertálható, úgy inverzét A^{-1} jelöli, erre $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ teljesül.) Ha A invertálható, úgy inverze is az és $(A^{-1})^{-1}=A$. Ha A és B invertálható, akkor $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. Ha A invertálható, úgy $(A^\top)^{-1}=(A^{-1})^\top$.*

5. definíció. Egy $A=(a_{ij})_{n\times n}$ kvadratikus mátrixhoz rendeljünk hozzá egy valós számot úgy, hogy:

- minden sorból kiválasztunk pontosan egy elemet úgy, hogy minden oszlopból is ki legyen választva pontosan egy elem,
- ezen elemeket összeszorozzuk és pozitív vagy negatív előjellel látjuk el aszerint, hogy a kiválasztott elemek (amennyiben sorindexeik természetes sorrendben vannak) oszlopindexeinek permutációjában az inverziók (felcserélt elemek) száma páros vagy páratlan.
- a tagokat minden lehetséges módon képezve összeadjuk.

Az így kapott D számot az $(a_{ij})_{n\times n}$ mátrix ***determinánsá***nak nevezzük és

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}=|A|$$

jelöljük (n-edrendű determináns).

Példák.

1. $D = \sum\limits_{k_1,\dots,k_n} (-1)^{\Im} a_{1k_1} \cdot \dots \cdot a_{nk_n}$, ahol $\Im$ a $k_1, \dots, k_n$ permutációban lévő inverziók száma. Az összeg $n!$ tagot tartalmaz.
2. A definíció alapján
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} \ ,$$
továbbá
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}) \ .$$
3. Egy determináns a_{ik} eleméhez tartozó ***adjungált algebrai aldeterminánson*** azt az A_{ik} $n-1$-edrendű determinánst értjük, mely az eredetiből az i-edik sor és a k-adik oszlop elhagyásával adódik, ellátva a $(-1)^{i+k}$ előjellel.
Például a
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$
determináns esetén
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 1 \cdot 4) = -6 \ .$$

3. tétel. *Egy $A = (a_{ij})_{n \times n}$ mátrix determinánsa rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

1. *Ha valamelyik sorában (oszlopában) csupa 0 van, akkor $D = 0$.*
2.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
4. *Ha két sorát felcseréljük értéke (-1)-szeresére változik.*
5. *Ha két sor megegyezik, értéke 0.*
6. *Értéke nem változik, ha egyik sorához hozzáadjuk egy máik sorát, vagy annak többszörösét.*
7. *Értéke nem változik, ha sorait és oszlopait felcseréljük.*
8. *$D = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$ (kifejtési tétel).*

Mindezek megfogalmazhatók sorok helyett oszlopokra is.

Bizonyítás. A definíció alapján. □

Példa. A
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$
determináns kiszámításánál célszerű az utolsó oszlop szerinti kifejéssel dolgozni, mert akkor csak két 3×3-as determinánst kell kiszámolni, mert
$$D = 0 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$+ 2 \cdot (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} .$$

4. tétel (determinánsok szorzástétele). *Két ugyanolyan rendű kvadratikus mátrix determinánsának szorzata egyenlő a szorzatmátrix determinánsával:*
$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Bizonyítás. Megtalálható a Diszkrét matematika jegyzetben. □

5. tétel. *Ha az A kvadratikus mátrix invetálható, akkor a determinánsa nem 0 (azaz A **reguláris mátrix**).*

Bizonyítás. A invertálható, így létezik az A^{-1} inverze, melyre $A \cdot A^{-1} = E$. Így a szorzástétel miatt

$$1 = |E| = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| \ ,$$

amiből $|A| \neq 0$ következik. □

6. tétel. *Ha A olyan kvadratikus mátrix, hogy $|A| \neq 0$ (azaz A reguláris), akkor A invertálható és A^{-1} inverzére:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})_{n\times n}$$

teljesül, ahol A_{ji} az $A = (a_{ji})_{n\times n}$ mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungált algebrai aldetermináns.

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy

$$\sum_{s=1}^{n} a_{js}A_{is} = \delta_{ij}|A| \ , \qquad \text{ahol} \ \ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \ j = i \ , \\ 0 & , \ j \neq i \ . \end{cases}$$

Ezután már

$$AA^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\right)_{n\times n} = \frac{1}{|A|}(\delta_{ik}|A|) = (\delta_{ik})_{n\times n} = E$$

következik, azaz A^{-1} az A inverze. □

Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, akkor $|A| = -2 \neq 0$, így létezik A^{-1} és $A_{11} = (-1)^{1+1}4 = 4$, $A_{21} = (-1)^{2+1}2 = -2$, $A_{12} = (-1)^{1+2}3 = -4$, $A_{22} = (-1)^{2+2}1 = 1$ miatt

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} ,$$

és

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

valóban teljesül.

6. definíció. Az $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezést (transzformációt) ***lineárisnak*** nevezzük, ha

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$
$$A(\lambda x) = \lambda A(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

teljesül.

Az $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések összességét szokás $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$-mel jelölni.

Megjegyzés. Legyen A $m \times n$-es mátrix, úgy az

$$A(x) \doteq A \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

szerint értelmezett leképezés (transzformáció) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú lineáris leképezés (transzformáció).
Másrészt bármely $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés

$$A(x) = A \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}^n, \ A \ m \times n\text{-es mátrix})$$

alakba írható.
Így bármely $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés azonosítható egy A $m\times n$-es mátrixszal.

7. definíció. Ha $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, akkor az

$$\|A\| \doteq \sup_{\|x\|\le 1} \{\|Ax\|\}$$

számot az A ***lineáris leképezés normájá***nak nevezzük.

7. tétel. *A norma fontosabb tulajdonságai:*

$$\|Ax\| \le \|A\| \ \|x\|; \qquad \|A\| < +\infty;$$
$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|; \qquad \|\lambda A\| = |\lambda| \ \|A\|;$$
$$\|BA\| \le \|B\| \ \|A\|; \qquad (A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \ B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)).$$

III. fejezet

Sorozatok $\mathbb{R}^k$-ban

A fejezet fogalmai és eredményei szoros analógiát mutatnak a számsorozatoknál tanultakkal (lásd Kalkulus I. III. fejezet).

1. Alapfogalmak és kapcsolatuk

1. definíció. Egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ függvényt $\mathbb{R}^k$***-beli sorozat***nak nevezünk. A sorozat n-edik elemét $f(n)$, a_n, x_n (vagy más) jelöli. A sorozat elemeinek halmazára az $\{a_n\}$ vagy $\{x_n\}$ (vagy más) jelölést használunk. Magát a sorozatot az $f \doteq \langle a_n \rangle$, vagy $f \doteq \langle x_n \rangle$ (vagy más) szimbólummal jelöljük.

Példa. Az $\left\langle \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}\right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat, n-edik tagja $\left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}\right)$, az elemeinek halmaza $\left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

2. definíció (korlátosság). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat korlátos, ha $\{x_n\}$ korlátos.

Példa. Az $\left\langle \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}\right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat korlátos, mert elemeinek $\left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ halmaza korlátos. A II. 2.4. megjegyzés miatt elegendő megmutatni, hogy létezik $r > 0$, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$-re

$$d_{\mathbb{R}^2}\left((0,0), \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}\right)\right) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{n^2+4n+5}{n^2}} < r\ .$$

Mivel

$$\sqrt{\frac{n^2+4n+5}{n^2}} < \sqrt{\frac{2n^2+8n+8}{n^2}} = \sqrt{2}\,\frac{n+2}{n} \le 3\sqrt{2}\ ,$$

egyszerűen belátható bármely $n \in \mathbb{N}$-re, így $r = 3\sqrt{2}$ jó lesz.

3. definíció (konvergencia). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat konvergens, ha $\exists\ x \in \mathbb{R}^k$, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$-ra $d(x, x_n) = \|x - x_n\| < \varepsilon$ teljesül. Az $x \in \mathbb{R}^k$ számot (vektort, elemet) $\langle x_n \rangle$ határértékének nevezzük. Azt, hogy $\langle x_n \rangle$ konvergens és határértéke x, így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ vagy $x_n \to x$.

Példa. Az $\left\langle \left(\frac{1}{n}, 1\right) \right\rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat konvergens és határértéke $(0,1) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor azt kell megmutatni, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n \ge n(\varepsilon)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén

$$d_{\mathbb{R}^2}\left(\left(\frac{1}{n}, 1\right), (0,1)\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + (1-1)^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon\ .$$

Ez pedig igaz az $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ valós számsorozat konvergenciája miatt.

Megjegyzések.

1. A környezet fogalmát felhasználva a konvergencia ún. „környezetes" definícióját kapjuk: az $\langle x_n \rangle$ sorozat konvergens, ha $\exists\ x \in \mathbb{R}^k$, hogy $\forall\ K(x,\varepsilon)$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$-ra $x_n \in K(x,\varepsilon)$ teljesül.
2. Egyszerűen belátható, hogy $x_n \to x \iff \forall\ K(x,\varepsilon)$-re $x_n \in K(x,\varepsilon)$ legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével.

4. definíció (divergencia). Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat divergens, ha nem konvergens, azaz ha $\forall\ x$ esetén $\exists\ \varepsilon > 0$ $(\vee K(x,\varepsilon))$, hogy $\forall\ n(\varepsilon) \in N$-re $\exists\ n \ge n(\varepsilon)$, hogy $d(x, x_n) \ge \varepsilon$ $(\vee\ x_n \notin K(x,\varepsilon))$.

Példa. Az $\langle (n,0) \rangle$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat divergens, ha megmutatjuk, hogy bármely $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén létezik $K((x,y),\varepsilon)$, hogy bármely $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$-re létezik $n \ge n(\varepsilon)$, hogy $(n,0) \notin K((x,y),\varepsilon)$.
Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, hogy $y \ne 0$, akkor nyilván $\varepsilon = \frac{|y|}{2}$-re $K\left((x,y), \frac{|y|}{2}\right)$ nem tartalmaz egyetlen elemet sem a $\langle (0,n) \rangle$ sorozatból (mert a környezet és az x-tengely metszete üres).
Ha $(x,y) = (x,0)$, akkor $\varepsilon = 1$ esetén $n \ge x+1$-re $(n,0) \notin K((x,0),1)$.

1. tétel (a határérték egyértelműsége). *Ha $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli konvergens sorozat, akkor egy határértéke van (azaz $x_n \to a$ és $x_n \to b \implies a = b$).*

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., III.1., 1. tétel bizonyítása. ☐

2. tétel (konvergencia és korlátosság). *Ha az $\langle x_n \rangle$ ($\mathbb{R}^k$-beli) sorozat konvergens, akkor korlátos.*

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., III.1., 2. tétel bizonyítása. □

3. tétel. *Az $\langle x_n\rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat $\Longleftrightarrow$ konvergens és határértéke $x \in \mathbb{R}^k$, ha $x_n = (x_{1n}, \dots, x_{kn})$ jelöléssel az $\langle x_{1n}\rangle, \dots, \langle x_{kn}\rangle$ (úgynevezett koordináta) sorozatok konvergensek és az $x = (x_1, \dots, x_k)$ jelöléssel $x_{in} \to x_i$ $(i = 1, \dots, k)$.*

Példa. Határozza meg az

$$\left\langle \left(\frac{n+1}{3n+2}, \frac{1}{n^2+1} \right) \right\rangle$$

$\mathbb{R}^2$-beli sorozat határértékét! Korábbi tanulmányaink alapján

$$\frac{n+1}{3n+2} \to \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{n^2+1} \to 0,$$

így tételünk adja, hogy

$$\left(\frac{n+1}{3n+2}, \frac{1}{n^2+1} \right) \to \left(\frac{1}{3}, 0 \right).$$

2. Sorozatok és műveletek, illetve rendezés

Definíció. Ha $\langle x_n\rangle$ és $\langle y_n\rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozatok, $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az

$$\langle x_n\rangle + \langle y_n\rangle \doteq \langle x_n + y_n\rangle ; \qquad \lambda\langle x_n\rangle \doteq \langle \lambda x_n\rangle$$

szerint definiált sorozatokat az adott ***sorozatok összegé***nek illetve ***λ-szorosá***nak nevezzük.

Tétel. *Legyen $\langle x_n\rangle$ és $\langle y_n\rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat, $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$, akkor $\langle x_n\rangle + \langle y_n\rangle$ és $\lambda\langle x_n\rangle$ konvergensek és $x_n + y_n \to x + y$, $\lambda x_n \to \lambda x$.*

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., III.2., 1. tétel bizonyítása (az a) részben az abszolútérték helyett $\mathbb{R}^k$-beli euklideszi normát kell írni). □

3. Részsorozatok

Definíció. Legyen $\langle a_n\rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat. Ha $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő és $b_n = a_{\varphi(n)}$, akkor $\langle b_n\rangle$-t az $\langle a_n\rangle$ ***részsorozat***ának nevezzük.

1. tétel. *Ha az $\langle a_n\rangle$ konvergens és határértéke a akkor $\forall$ $\langle b_n\rangle$ részsorozatára $b_n \to a$ teljesül.*

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., III.3., 1. tétel bizonyítása. □

Megjegyzés. A tétel megfordítása nem igaz, de ha egy sorozat két diszjunkt részsorozatra bontható, melyek határértéke ugyanaz, akkor az a sorozatnak is határértéke.

2. tétel (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Ha az $\langle a_n\rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat korlátos, akkor létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., III.3., 2. tétel bizonyítása ($a \in \mathbb{R}$ helyett $a \in \mathbb{R}^k$-t kell írni). □

4. Cauchy-sorozatok

1. definíció. Az $\langle a_n\rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozatot ***Cauchy-sorozat***nak nevezzük, ha $\forall$ $\varepsilon > 0$ esetén $\exists$ $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall$ $p, q \geq n(\varepsilon)$ $(p, q \in \mathbb{N})$ esetén $d(a_p, a_q) < \varepsilon$.

1. tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium). *Az $\langle x_n\rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., III.3., 4. tétel bizonyítása ($x \in \mathbb{R}$ helyett $x \in \mathbb{R}^k$-t, $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{R}^k$-t kell írni). □

2. definíció. Az (X, d) metrikus teret ***teljes***nek nevezzük, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.

Megjegyzés. $\mathbb{R}^k$ teljes metrikus tér.

IV. fejezet

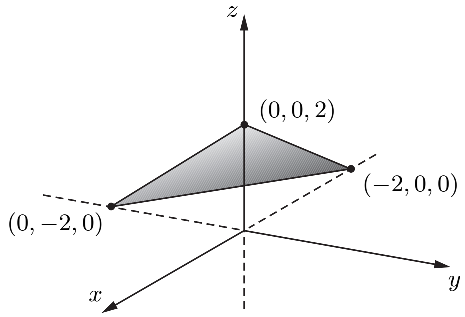
Többváltozós és vektorértékű függvények folytonossága, határértéke

E fejezet fogalmai és eredményei a valós függvények folytonosságát és határértékét tárgyaló, a Kalkulus I. V. és VI. fejezetében bevezetett fogalmakkal és tételekkel mutatnak szoros analógiát.

1. Alapfogalmak

1. definíció. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$, $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$, típusú függvényeket valós értékű, illetve az $(\mathbb{R}^n, d)$ metrikus teret az $(\mathbb{R}^m, d)$) metrikus térbe képező függvénynek nevezzük.

Megjegyzés. Az $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvények olyan speciális relációk, melyek $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ részhalmazai, így azok szemléltetése (gráfjuk ábrázolása) a térbeli Descartes-féle koordinátarendszerben valósítható meg.



Példa. Az $f(x, y) = x + y + 2$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) függvény gráfja például a $z = x+y+2$ sík (mely „áthalad" például a $(0, 0, 2)$, $(0, -2, 0)$ és $(-2, 0, 0)$ pontokon).

2. definíció. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ ***függvény korlátos***, ha $f(E)$ korlátos.
Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ függvény ***alulról*** (***felülről***) ***korlátos***, ha $f(E)$ alulról (felülről) korlátos.
A $\sup f(E)$, $\inf f(E)$ számokat az f pontos felső, illetve pontos alsó korlátjának (***supremum***ának, illetve ***infimum***ának) nevezzük E-n.

3. definíció. Ha az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ függvény esetén létezik $x_1, x_2 \in E$, hogy

$$\sup f(E) = f(x_1), \quad \inf f(E) = f(x_2) \ ,$$

akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik ***abszolút maximum***a, illetve ***minimuma*** E-n. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in E$-ben ***helyi*** (***lokális***) ***maximum***a, illetve ***minimum***a van, ha létezik $K(x_0, \delta)$, hogy $x \in K(x_0, \delta) \cap E$-re $f(x) \leq f(x_0)$, illetve $f(x) \geq f(x_0)$ teljesül.

Példa. Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) függvényre igazak a következők:

- f alulról korlátos, mert nyilván $x^2 + y^2 \geq 0 \ \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$-re.
- $\inf f(\mathbb{R}^2) = 0$, mert az előbbiek miatt 0 alsó korlát, másrészt tetszőleges $\varepsilon > 0$ sem lehet alsó korlát, mert $f(0, 0) = 0 < \varepsilon$, így minden k alsó korlátra $k \leq 0$.
- $f(x, y) = x^2 + y^2 = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$, így 0 abszolút minimum, melyet csak a $(0, 0)$-ban vesz fel f.
- f felülről nem korlátos, mert $\forall \ K$-ra $\exists \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$, hogy $f(x, y) > K$.
  Ha $K < 0$, akkor ez nyilván igaz.
  Ha $K > 0$, úgy $f(x, 0) = x^2 > K \iff |x| > \sqrt{K}$, ami igaz például minden olyan $(x, 0)$-ra, melyre $x > \sqrt{K}$.

2. A folytonosság fogalma

1. definíció. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény az $x_0 \in E$ ***pontban folytonos***, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy bármely

$x \in E,\ d(x, x_0) = \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$ esetén

$$d(f(x), f(x_0)) = \|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon\ .$$

Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény ***folytonos az*** $A \subseteq E$ ***halmazon***, ha A minden pontjában folytonos.

Megjegyzések.

1. Megfogalmazható az úgynevezett környezetes változat is:
   Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény az $x_0 \in E$ pontban folytonos, ha $\forall\ K_{\mathbb{R}^m}(f(x_0), \varepsilon)$-hoz $\exists\ K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta(\varepsilon))$, hogy $\forall\ x \in E,\ x \in K_{\mathbb{R}^n})(x_0, \delta(\varepsilon)) \implies f(x) \in K_{\mathbb{R}^m}(f(x_0), \varepsilon)$.
2. A folytonosság pontbeli (lokális) tulajdonság, amely globálissá tehető.

Példák.

1. Az $f(x, y) = c\ ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény folytonos $\mathbb{R}^2$-en, mert bármely $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$-t, így $\delta(\varepsilon) = 1$-et választva, ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ és $d((x, y), (x_0, y_0)) < 1$, akkor
   $$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon\ .$$
2. Az $f(x, y) = x + y\ ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény folytonos a $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$-ben, mert ha $\varepsilon > 0$ adott, akkor
   $$\begin{aligned}|f(x, y) - f(0, 0)| &= |x + y| \le |x| + |y| \le \\ &\le \sqrt{2}\,\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}\|(x, y), (0, 0)\|_{\mathbb{R}^2}\end{aligned}$$
   $(\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2)$ miatt, ha $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, és $\|(x, y) - (0, 0)\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, akkor $|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$, ami a folytonosság definíciójának teljesülését jelenti.
3. Az
   $$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ha } (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{egyebként} \end{cases}$$
   függvény sehol sem folytonos, mert $\forall\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén $\varepsilon = 1$-hez $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$-t választva (felhasználva, hogy $\forall\ K((x_0, y_0), \delta(\varepsilon))$-ban van olyan (x, y), melyre $x, y \in \mathbb{Q}$ és olyan is, hogy $x \notin \mathbb{Q}$ vagy $y \notin \mathbb{Q}$) létezik $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, hogy $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta(\varepsilon)$ és $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = 1$, ami adja az állítást.

1. tétel (átviteli elv). *Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény akkor, és csak akkor folytonos az $x_0 \in E$ pontban, ha minden x_0-hoz konvergáló E-beli $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén az $\langle f(x_n) \rangle$ $(\mathbb{R}^m, d)$-beli sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., V.2., 1. tétel bizonyítása. □

Megjegyzések.

1. Az előbb vizsgált 3. feladat az átviteli elvvel is vizsgálható, s megmutatható, hogy például f nem folytonos a $(0, 0)$ pontban, mert ha olyan $\langle (x_n, y_n) \rangle$ sorozat tekintsünk, melyre $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ és $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$, akkor $f(x_n, y_n) = 1 \to 1 \ne f(0, 0)$.
2. A folytonosság itt megadott ekvivalens megfogalmazását sorozatos vagy Heine-féle definíciójának nevezik.

2. tétel. *Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}^m$ $(f = (f_1, \dots, f_m),\ f_i : E \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m))$ függvény akkor és csak akkor folytonos az $x_0 \in E$-ben ha az f_i függvények mindegyike folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatoknál kimondott tétel segítségével nyilvánvaló. □

2. definíció. Az $f : E \subset \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény ***balról*** (***jobbról***) ***folytonos*** az $x_0 \in E$ pontban, ha az f $(-\infty, x_0] \cap E$-re (illetve $[x_0, +\infty) \cap E$-re) való leszűkítése folytonos x_0-ban.

Megjegyzések.

1. A definíció adja, hogy $f : E \subset \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^m, d) \iff$ balról (illetve jobbról) folytonos x_0-ban, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in E,\ x_0 - \delta(\varepsilon) < x \le x_0$ (illetve $x_0 \le x < x_0 + \delta(\varepsilon)$) esetén $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.
2. Megfogalmazható a sorozatos változat is.

3. tétel. *Az $f : E \subset \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény akkor és csak akkor folytonos az x_0-ban, ha ott jobbról és balról is folytonos.*

4. tétel (jeltartás). *Ha az $f : E \subset (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $x_0 \in E$-ben és $f(x_0) \ne 0$, akkor $\exists\ K(x_0, \delta) \subset (\mathbb{R}^n, d)$, hogy $\forall\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$, akkor* $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f(x)$.

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., V.2., 3. tétel bizonyítása. □

3. definíció. Az $f : E \subset (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény ***egyenletesen folytonos*** az $E_1 \subset E$ halmazon, ha $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\ x, y \in E_1,\ d(x,y) < \delta(\varepsilon)$ esetén $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

3. Folytonosság és műveletek

1. tétel. *Ha az $f, g : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}^m$ függvények folytonosak az $x_0 \in E$-ben, akkor az $f + g$ és λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) is folytonosak x_0-ban.*

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., V.3., 1. tétel bizonyítása. □

2. tétel. *Ha az $f, g : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in E$-ben, akkor az $f \cdot g$ és $g(x) \neq 0$ ($x \in E$) esetén $\dfrac{f}{g}$ is folytonos x_0-ban.*

3. tétel (az összetett függvény folytonossága). *Legyenek $(\mathbb{R}^n, d)$, $(\mathbb{R}^m, d), (\mathbb{R}^k, d)$ metrikus terek; $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ g : f(E) \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ adott függvények. Ha f folytonos az $x_0 \in E$ pontban, g folytonos az $y_0 = f(x_0)$-ban, akkor a $h = g \circ f$ függvény folytonos az x_0-ban.*

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., V.3., 3. tétel bizonyítása. □

Példa. A $h(x,y) = \sqrt[3]{x+y}$ ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$) függvény folytonos $(0,0)$-ban, mert már beláttuk, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x + y$ függvény folytonos $(0,0)$-ban, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt[3]{x}$ folytonos az $f(0,0) = 0$ helyen, így teljesülnek tételünk feltételei.

4. Folytonosság és topologikus fogalmak

1. tétel (a folytonosság topologikus megfelelője).
Az $f : (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény akkor, és csak akkor folytonos $\mathbb{R}^n$-en, ha $\forall\ B \subset (\mathbb{R}^m, d)$ nyílt halmazra $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in B\}$ nyílt $(\mathbb{R}^n, d)_{\mathbb{R}^n}$-ben.

2. tétel (kompaktság és folytonosság). *Legyen $E \subset (\mathbb{R}^n, d)$ kompakt halmaz, $f : E \to (\mathbb{R}^m, d)$ folytonos függvény E-n, akkor $f(E)$ kompakt $(\mathbb{R}^m, d)$-ben. (Röviden: kompakt halmaz folytonos képe kompakt.)*

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., V.4., 1. tétel bizonyítása. □

Következmények.
1. $f(E)$ korlátos és zárt.
2. Ha $m = 1$, akkor f felveszi E-n az abszolút minimumát és maximumát (mert $\sup f(E)$ és $\inf f(E)$ is eleme $f(E)$-nek, ha $f(E)$ zárt és természetesen korlátos).

3. tétel (kompaktság és egyenletes folytonosság (Heine)).
Legyen $E \subset (\mathbb{R}^n, d)$ kompakt halmaz, $f : E \to (\mathbb{R}^m, d)$ folytonos függvény E-n, akkor f egyenletesen folytonos E-n. (Röviden: kompakt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos.)

4. tétel (összefüggőség és folytonosság).
Legyen $f : (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ folytonos függvény, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ összefüggő, akkor $f(E)$ is az.

5. tétel (Bolzano). *Legyen $E \subseteq (\mathbb{R}^n, d)$ összefüggő, $f : E \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha $c, d \in f(E),\ c < d$, akkor $(c, d) \subset f(E)$ (azaz f két érték között minden közbenső értéket felvesz).*

5. A határérték fogalma

1. definíció. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvénynek az $x_0 \in E'$ ***pontban létezik határértéke***, ha $\exists\ A \in \mathbb{R}^m$, hogy $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$,

$$\forall\ x \in E, \quad 0 < d(x, x_0) = \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$$

esetén

$$d(f(x), A) = \|f(x) - A\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon\ .$$

A-t az f függvény x_0-beli határértékének nevezzük, és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ vagy $f(x) \to A$, ha $x \to x_0$ jelöléseket használjuk.

Megjegyzések.
1. Megfogalmazható a környezetes változat is:
   Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban $\exists$ határértéke, ha $\exists\ A \in \mathbb{R}^m$, hogy $\forall\ K_{\mathbb{R}^m}(A, \varepsilon)$-hoz $\exists\ K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta(\varepsilon))$, $\forall\ x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta(\varepsilon)) \backslash \{x_0\},\ x \in E$ esetén $f(x) \in K_{\mathbb{R}^m}(A, \varepsilon)$.
2. A határérték létezése pontbeli tulajdonság.

3. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvénynek az $x_0 \in (\mathbb{R}^n, d)$-ben nem létezik határértéke, ha $x_0 \notin E'$, vagy $x_0 \in E'$ és $\forall\ A \in \mathbb{R}^m,\ \exists \varepsilon > 0,$ $\forall\, \delta(\varepsilon) > 0$ esetén $\exists\, x \in E,\ x \in K_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta(\varepsilon))\setminus\{x_0\},\ f(x) \notin K_{\mathbb{R}^m}(A, \varepsilon)$.
4. A határérték (ha létezik) egyértelműen meghatározott (ez indirekt bizonyítással – hasonlóan, mint a sorozatoknál – egyszerűen belátható).

Példák.
1. Az $f(x,y) = c,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ függvények $\forall\ (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$-ben a határértéke c, mert (x_0,y_0) torlódási pontja $\mathbb{R}^2$-nek és $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén ha $0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\|_{\mathbb{R}^2} < \delta(\varepsilon)$, akkor $|f(x)-c| = |c-c| = 0 < \varepsilon$ következik.
2. Az
$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
függvénynek létezik határértéke a $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ pontban és az egyenlő 0-val, mert $(0,0)$ torlódási pontja $\mathbb{R}^2$-nek és ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor
$$|f(x,y)-0| = |x+y| \leq |x|+|y| \leq$$
$$\leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}\|(x,y)-(0,0)\|_{\mathbb{R}}$$
($\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \neq (0,0)$) miatt, ha $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ és $0 < \|(x,y)-(0,0)\|_{\mathbb{R}^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, akkor $|f(x,y)-0| < \varepsilon$, azaz $A = 0$ mellett teljesül a határérték definíciója $(0,0)$-ban.

2. definíció. Legyen $f : E \subseteq \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^m, d)$ adott függvény és az x_0 torlódási pontja $[x_0,+\infty) \cap E$ $(\vee(-\infty,x_0] \cap E)$)-nek. Az f függvénynek az x_0-ban létezik ***jobb***- (vagy ***bal***-) ***oldali határértéke***, ha $\exists\ A \in \mathbb{R}^m,\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\ x \in E,\ x_0 < x < x_0 + \delta(\varepsilon)$ (vagy $x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0$) $\Longrightarrow\ d(f(x),A) < \varepsilon$.
A-t f jobb (illetve bal) oldali határértékének nevezzük x_0-ban, és a
$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A = f(x_0+0) \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A = f(x_0-0)$$
jelölést használjuk.

Megjegyzések.
1. A definíció a leszűkítés fogalmának használatával is megfogalmazható (hasonlóan a folytonossághoz).
2. A környezetes átfogalmazás is megadható.
3. Könnyen belátható a következő:
Legyen $f : E \subseteq \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^m, d)$ adott függvény és az x_0 torlódási pontja $[x_0,+\infty) \cap E \wedge (-\infty,x_0] \cap E$-nek. Az f függvénynek x_0-ban akkor, és csak akkor létezik határértéke, ha létezik $f(x_0-0)$ és $f(x_0+0)$ és $f(x_0-0) =$
$= f(x_0+0) = A$ (f határértéke x_0-ban).

3. definíció. Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ függvények $x_0 \in E'$-ben a határértéke $+\infty$ (vagy $-\infty$), ha $\forall\ K$-hoz $\exists\ \delta(K) > 0,\ \forall\ x \in E,\ 0 < d(x,x_0) < \delta(K)$ esetén $f(x) > K$ (vagy $f(x) < K$).

Megjegyzések.
1. A definíció környezetekkel is megfogalmazható.
2. A $+\infty$ (vagy $-\infty$) egyoldali határértékként is megfogalmazható.

Példa. Az $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ $((x,y) \in E = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$ függvénynek a $(0,0) \in E'$-ben a határértéke $+\infty$.
Definíció szerint azt kell belátnunk, hogy $\forall\ K$-ra $\exists\ \delta(K) > 0$, hogy bármely $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta(\varepsilon)$ esetén $\frac{1}{x^2+y^2} > K$.
Ha $K \leq 0$, akkor $x^2+y^2 > 0$ $((x,y) \in E)$ miatt ez $\forall\ \delta(K)$ esetén igaz, hiszen $\frac{1}{x^2+y^2} > 0 \geq K\ \forall\ (x,y) \in E$ esetén.
Ha $K > 0$, akkor
$$\frac{1}{x^2+y^2} > K \quad ((x,y) \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x^2+y^2 < \frac{1}{K} \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{\sqrt{K}} \quad \Longleftrightarrow \quad \|(x,y)-(0,0)\| < \frac{1}{\sqrt{K}}$$
adja, hogy ha $\delta(K) = \frac{1}{\sqrt{K}}$, akkor $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \frac{1}{\sqrt{K}}$-ból következik, hogy $\frac{1}{x^2+y^2} > K$.

4. definíció. Legyen $E \subseteq \mathbb{R}$ felülről (alulról) nem korlátos halmaz, $f : E \to (\mathbb{R}^m, d)$ adott függvény. Az f függvénynek $+\infty$ (vagy $-\infty$)***-ben létezik határértéke***, ha $\exists\ A \in \mathbb{R}^m,\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in E \wedge x > M$ $(\vee\ x < M)$ esetén $d(f(x),A) < \varepsilon$. Ekkor A-t f $+\infty$ (vagy $-\infty$)-beli határértékének nevezzük, és rá a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \vee \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ jelölést használjuk.

Megjegyzés. Definiálható a végtelen vett végtelen határérték is.

1. tétel (átviteli elv). *Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban akkor, és csak akkor létezik határértéke, ha $\forall$ x_0-hoz konvergáló $\langle x_n\rangle : \mathbb{N} \to E\backslash\{x_0\}$ sorozat esetén $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Bizonyítás. Úgy, mint a folytonosságnál, csak az ottani $K_{\mathbb{R}^m}(f(x_0), \varepsilon)$ helyett $K_{\mathbb{R}^m}(A, \varepsilon)$-t és az x_0-beli folytonosság helyett x_0-beli határértéket kell mondani. □

Példa. Az $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ ($(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$) függvénynek a $(0, 0, 0)$ pontban a határértéke 0, mert $(0, 0, 0)$ torlódási pontja $E = \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$-nak és $\forall$ $\langle(x_n, y_n, z_n)\rangle$ E-beli sorozat esetén $(x_n, y_n, z_n) \to (0, 0, 0)$ akkor és csak akkor, ha $x_n \to 0,\ y_n \to 0,\ z_n \to 0 \implies x_n^2 \to 0,\ y_n^2 \to 0,\ z_n^2 \to 0 \implies x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 \to 0$, azaz teljesül az átviteli elv.

2. tétel. *Az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}^m$ ($f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i : E \to \mathbb{R}$) függvénynek, akkor és csak akkor létezik határértéke az $x_0 \in E'$-ben, ha az f_i függvényeknek létezik határértéke x_0-ban.*

Bizonyítás. Az átviteli elv és az $\mathbb{R}^m$-beli sorozatokra vonatkozó tételek alapján. □

6. Határérték és műveletek illetve egyenlőtlenségek

1. tétel. *Legyenek $f, g : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ adott függvények, hogy az $x_0 \in E'$-ben $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, akkor*

a) $\lim\limits_{x\to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$;
b) $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda A$, $(\lambda \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C})$;
c) $\lim\limits_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$;
d) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, ha $g \neq 0,\ B \neq 0$.

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján. □

Megjegyzés. a) és b) $\mathbb{R}^m$-beli értékű függvényrekre is megfogalmazható és bizonyítható.

2. tétel. *Ha $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in E'$, akkor ha*

a) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty \implies \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0 \quad (f \neq 0)$;
b) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \implies \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty \quad (f \neq 0)$;

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján. □

Példa. Az $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ($(x, y, z) \in E = \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$) függvénynek a $(0, 0, 0) \in E'$-ben a határértéke 0 (ahogy ezt az előbb beláttuk), így a tételünk b)-része miatt

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = +\infty .$$

3. tétel. *Legyenek $f, g, h : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to \mathbb{R}$ adott függvények és $x_0 \in E'$, akkor, ha*

a) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \wedge \exists\, K(x_0, \delta),\ f(x) \le g(x)$
$\forall\, x \in [K(x_0, \delta)\backslash\{x_0\}] \cap E \implies A \le B$;
b) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \wedge A < B \implies \exists\, K(x_0, \delta)$,
$f(x) < g(x)\ \forall\, x \in [K(x_0, \delta)\backslash\{x_0\}] \cap E$;
c) $\exists\, K(x_0, \delta),\ f(x) \le h(x) \le g(x)\ \forall\, x \in [K(x_0, \delta)\backslash\{x_0\}] \cap E$
$\wedge\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \implies \exists \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján. □

4. tétel (az összetett függvény határértéke). *Legyenek adottak az $(\mathbb{R}^n, d)$, $(\mathbb{R}^m, d)$ és $(\mathbb{R}^k, d)$ metrikus terek, $x_0 \in \mathbb{R}^{n\prime}$ és $y_0 \in \mathbb{R}^{m\prime}$, továbbá $f : \mathbb{R}^n\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}^m\backslash\{y_0\}$, $g : \mathbb{R}^m\backslash\{y_0\} \to \mathbb{R}^k$ függvények, hogy*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \ \wedge \lim_{y\to y_0} g(y) = A \implies \exists \lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = A .$$

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., VI.2., 4. tétel bizonyítása. □

7. A határérték és a folytonosság kapcsolata

Tétel. *Legyen $f : E \subset (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ adott függvény és $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^{n\prime}$. f akkor és csak akkor folytonos x_0-ban, ha $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., VI.3. fejezet tételének bizonyítása. □

Példa. Az

$$f(x,y) \begin{cases} x+y & , \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & , \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvényre beláttuk, hogy $\exists \lim\limits_{(0,0)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, de $f(0,0) = 2 \neq 0$, így f nem folytonos $(0,0)$-ban.

Definíció. Ha az $f : E \subset (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény nem folytonos az $x_0 \in E$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy x_0 f-nek szakadási helye, vagy hogy f-nek x_0-ban szakadása van.
Ha $f : E \subset \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^m, d)$ adott függvény és $x_0 \in E^0$ (x_0 belső pont E-ben), és x_0 szakadási helye f-nek, továbbá $\exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0) \wedge \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$, akkor azt mondjuk, f-nek x_0-ban elsőfajú szakadása van. Ha még $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, akkor azt mondjuk, hogy a szakadás megszüntethető.
Ha f-nek x_0-ban szakadása van és az nem elsőfajú, akkor azt másodfajú szakadásnak nevezzük.

Példa. Az előbbi példa függvénye nem folytonos $(0,0)$-ban, így ott szakadása van, s ez megszüntethető az $f(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ választással.

V. fejezet

A Riemann-integrál általánosítása és alkalmazása

Bevezetés

Ebben a fejezetben két új integrálal ismerkedünk meg.

A Riemann-Stieltjes integrál a Riemann-integrál egy általánosítása, melynek létezésére adandó elegendő feltétel viszont igényli a korlátos változású függvények fogalmát és tulajdonságait.

A másik – a későbbiekben még használt – görbementi integrál, melyet elegánsan a Riemann-Stieltjes integrál segítségével vezethetünk be, de előbb át kell tekintenünk a görbékre vonatkozó legfontosabb fogalmakat és tételeket.

1. Korlátos változású függvények

1. definíció. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ adott függvény,

$$P \doteq \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$$

$[a, b]$ egy felosztása. A

$$V(f, [a, b], P) \doteq \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \tag{1}$$

összeget az f függvény ($[a, b]$ feletti) P felosztáshoz tartozó ***variáció***jának nevezzük.

2. definíció. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ adott, P az $[a, b]$ egy tetszőleges felosztása, akkor a

$$V(f, [a, b]) = \sup_P V(f, [a, b], P) = \sup_P \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \tag{2}$$

számot az f függvény $[a, b]$ feletti teljes (***totális***) ***változásá***nak (***variációjá***nak) nevezzük.

3. definíció. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény ***korlátos változású*** $[a, b]$-n, ha

$$V(f, [a, b]) < +\infty \tag{3}$$

teljesül.

Példa. Az $f(x) = 2x + 3$ $(x \in [0, 2])$ függvény korlátos változású, mert egyszerűen látható, hogy $\forall\ P = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_n = 2\}$ esetén

$$V(f, [0, 2], P) = 2x_n + 3 - (2x_0 + 3) = 2 \cdot 2 + 3 = 7 \ ,$$

így

$$\sup V(f, [0, 2], P) = V(f, [0, 2]) = 7 < +\infty \ .$$

1. tétel. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, akkor korlátos változású.*

Bizonyítás. Ha például f monoton növekvő, P egy felosztása $[a, b]$-nek, akkor $f(x_{k+1}) - f(x_k) \geq 0\ \forall\ k$-ra, így

$$V(f, [a, b], P) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a) \qquad \forall\ P\text{-re} \ ,$$

ezért $V(f, [a, b]) = f(b) - f(a) < +\infty$, amit bizonyítani kellett. □

Példa. Ismeretes, hogy az $f : [0, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ függvény monoton növekedő, így korlátos változású.

2. tétel. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású, akkor korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $x \in [a, b]$ tetszőleges, $P = \{a, x, b\}$ az $[a, b]$ egy felosztása, akkor

$$V(f, [a, b], P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| < V(f, [a, b]) < +\infty \ ,$$

így $|f(x) - f(a)| < V(f, [a, b])$, azaz

$$f(a) - V(f, [a, b]) < f(x) < f(a) + V(f, [a, b]) \ ,$$

ami adja f korlátosságát. $\square$

Megjegyzés. Egy folytonos függvény nem feltétlenül korlátos változású.

3. tétel. *Ha $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos változású függvények, akkor $f+g,\ f-g,\ f\cdot g:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos változásúak. Továbbá $g\ge\sigma>0$ ($\sigma\in\mathbb{R}$) esetén $\dfrac{f}{g}$ is korlátos változású.*

Bizonyítás. Például $F=f+g$-re

$$|F(x_{k+1})-F(x_k)|=|f(x_{k+1})+g(x_{k+1})-f(x_k)-g(x_k)|\le$$
$$\le|f(x_{k+1})-f(x_k)|+|g(x_{k+1})-g(x_k)|\ ,$$

és ezért (1) miatt

$$V(F,[a,b],P)\le V(f,[a,b],P)+V(g,[a,b],P)\ ,$$

amiből (2) miatt

$$V(F,[a,b])\le V(f,[a,b])+V(g,[a,b])<+\infty$$

következik, ami adja az állítást.
A másik két állítás hasonlóan bizonyítható. $\square$

Példa. Az $f(x)=x^2+2x-4$ ($x\in[0,3]$) függvény korlátos változású, mert az $f(x)=x^2$ ($x\in[0,3]$) és $g(x)=2x-4$ ($x\in[0,3]$) függvények monotonok, így korlátos változásúak és akkor tételünk miatt az összegük is az.

4. tétel. *Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ adott függvény, $c\in[a,b]$ tetszőleges, akkor*

$$V(f,[a,b])=V(f,[a,c])+V(f,[c,b]) \tag{4}$$

teljesül.

Következmények.

1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ akkor és csak akkor korlátos változású $[a,b]$-n, ha korlátos változású $[a,c]$-n és $[c,b]$-n.
2. Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ olyan, hogy monoton az $[a,a_1],\ [a_1,a_2],\dots,\ [a_{n-1},b]$ intervallumokon, akkor korlátos változású $[a,b]$-n.

Példák.

1. Az $f(x)=x^2$ ($x\in[-1,1]$) függvény korlátos változású, mert a $[-1,0]$ és $[0,1]$ intervallumokon korlátos változású (hiszen ott monoton csökkenő, illetve növekedő).

2. Az $f:[0,50\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos(x)$ függvény korlátos változású, mert monoton a $[0,\pi],\ [\pi,2\pi],\ \dots,\ [49\pi,50\pi]$ intervallumokon.

5. tétel (Jordan). *Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor korlátos változású $[a,b]$-n, ha léteznek $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton függvények, hogy $f=g-h$.*

2. Riemann-Stieltjes integrál

1. definíció. Legyenek $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvények, $P\doteq\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$ $[a,b]$ egy tetszőleges felosztása, $t_k\in[x_{k-1},x_k]$ tetszőleges. A

$$\sigma(f,g,P)=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\cdot[g(x_k)-g(x_{k-1})]$$

számot az f függvény P felosztáshoz, és a t_k $(k=1,\dots,n)$ értékekhez tartozó, g-re vonatkozó ***Riemann-Stieltjes integrálközelítő összeg***ének nevezzük.

2. definíció. Az f ***függvény Riemann-Stieltjes integrálható a*** g ***függvényre vonatkozóan*** $[a,b]$**-n,** ha $[a,b]$ bármely $\langle P_n\rangle$ normális felosztássorozatához tartozó bármely $\langle\sigma(f,g,P_n)\rangle$ Riemann-Stieltjes integrálközelítő összegsorozat konvergens. E sorozatok (egyébként közös) határértékét, a

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(f,g,P_n)\doteq\int_a^b f\,dg\qquad\left(=\int_a^b f(x)dg(x)\right)$$

számot az f függvény g-re vonatkozó ***Riemann-Stieltjes integrál***jának nevezzük $[a,b]$-n.

Megjegyzés. Ha $g(x)=x\quad(x\in[a,b]),\quad f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos,akkor a Riemann-Stieltjes integrál a Riemann-integrált adja.

1. tétel. *Ha létezik $\int_a^b f_1dg,\ \int_a^b f_2dg$, akkor létezik*

$$\int_a^b(f_1+f_2)dg=\int_a^b f_1dg+\int_a^b f_2dg\ .$$

Bizonyítás. A definíció közvetlen felhasználásával. □

2. tétel. *Ha létezik* $\int\limits_a^b f dg_1$, $\int\limits_a^b f dg_2$, *akkor létezik*

$$\int\limits_a^b f d(g_1+g_2) = \int\limits_a^b f dg_1 + \int\limits_a^b f dg_2 \ .$$

Bizonyítás. A definíció alapján. □

3. tétel. *Ha létezik* $\int\limits_a^b f dg$ *és* $k,l\in\mathbb{R}$, *akkor létezik*

$$\int\limits_a^b (kf)d(lg) = kl\int\limits_a^b f dg \ .$$

Bizonyítás. A definíció alapján. □

4. tétel. *Ha* $a<c<b$ *és létezik* $\int\limits_a^b f dg$, $\int\limits_a^c f dg$, $\int\limits_c^b f dg$, *akkor*

$$\int\limits_a^b f dg = \int\limits_a^c f dg + \int\limits_c^b f dg \ .$$

Bizonyítás. A definíció alapján. □

5. tétel (parciális integrálás). *Ha az* $\int\limits_a^b f dg$ *és* $\int\limits_a^b g df$ *integrálok egyike létezik, akkor a másik is és*

$$\int\limits_a^b f dg + \int\limits_a^b g df = \big[f\cdot g\big]_a^b \ .$$

6. tétel. *Ha* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, f *folytonos,* g *korlátos változású, akkor létezik* $\int\limits_a^b f dg$ *és*

$$\left|\int\limits_a^b f dg\right| \le M\cdot V(g,[a,b]),\ \text{ha } |f|\le M \ .$$

Példa. Ha

$$f(x)=1 \qquad (x\in[0,1])$$

és

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{, ha } x\in\left[0,\frac12\right[\\ 1 & \text{, ha } x\in\left[\frac12,1\right]\end{cases}$$

akkor létezik $\int\limits_0^1 f\,dg$, mert f folytonos g pedig (mivel monoton) korlátos változású.
Továbbá $|f|\le 1$ és $V(g,[0,\frac12[)=1$, illetve $V(g,[\frac12,1])=0$ miatt $V(g,[0,1])=1$, így

$$\left|\int\limits_0^1 f\,dg\right|\le 1 \ .$$

7. tétel. *Ha* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, f *és* g' *folytonos, akkor létezik* $\int\limits_a^b f dg$ *és*

$$\int\limits_a^b f dg = \int\limits_a^b f(x)g'(x)\ dx \ .$$

Példa. Határozza meg a $\int\limits_0^\pi x\,d(\sin(x))$ Riemann-Stieltjes integrált.
$f(x)=x$ $(x\in[0,\pi])$ folytonos, $g(x)=\sin(x)$ $(x\in[0,\pi])$-re pedig létezik $g'(x)=\cos(x)$ és az folytonos, így a tétel miatt

$$\int\limits_0^\pi x\,d(\sin(x)) = \int\limits_0^\pi x\cos(x)\,dx = \big[x\sin(x)\big]_0^\pi - \int\limits_0^\pi 1\sin(x)\,dx =$$
$$= \big[x\sin(x)\big]_0^\pi + \big[\cos(x)\big]_0^\pi = 0-0+\cos\pi-\cos 0 = -2 \ .$$

3. definíció. Legyenek $\underline{f}=(f_1,\dots,f_n):[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ adott függvények. Az $\underline{f}$ ***vektorértékű függvénynek a*** g ***(skalár értékű) függvényre vonatkozó Riemann-Stieltjes integrálján*** $[a,b]$ felett az

$$\int\limits_a^b \underline{f}dg \doteq \left(\int\limits_a^b f_1dg,\dots,\int\limits_a^b f_ndg\right)\in\mathbb{R}^n$$

vektort értjük, ha az $\int_a^b f_i dg$ integrálok léteznek.

4. definíció.
Legyenek $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\underline{g} = (g_1, \dots, g_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ adott függvények. Az $\underline{f}$ ***vektorértékű függvénynek a*** $\underline{g}$ ***vektorértékű függvényre vonatkozó Riemann-Stieltjes integrálján*** $[a, b]$ felett az

$$\int_a^b \underline{f} d\underline{g} \doteq \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i dg_i$$

számot értjük, ha az $\int_a^b f_i dg_i$ integrálok léteznek.

Megjegyzések.

1. Ha a 3. definícióban $g(x) = x$, $x \in [a, b]$, akkor az
$$\int_a^b \underline{f} \doteq \left(\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right) \in \mathbb{R}^n$$
vektor az $\underline{f}$ ***vektorértékű függvény Riemann-integrálja*** $[a, b]$ felett, ha az $\int_a^b f_i$ $(i = 1, \dots, n)$ Riemann-integrálok léteznek.
2. Az $\int_a^b \underline{f} d\underline{g}$ típusú Riemann-Stieltjes integrálra a paragrafus 1-5. és 7. tételei változtatás nélkül, míg a 6. tétel kis változtatással átvihető.
3. **Newton-Leibniz-tétel** *Legyenek* $\underline{f}, \underline{F} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *olyanok, hogy* $\underline{f}$ *Riemann-integrálható, és* $\underline{F}' \doteq (F_1', \dots, F_n') = \underline{f}$, *akkor*
$$\int_a^b \underline{f} = \underline{F}(b) - \underline{F}(a) .$$
Bizonyítás:
$$\int_a^b \underline{f} = \left(\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right) = (F_1(b) - F_1(a), \dots, F_n(b) - F_n(a)) =$$
$$= (F_1(b), \dots, F_n(b)) - (F_1(a), \dots, F_n(a)) = F(b) - F(a) .$$

4. Legyen $\underline{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Riemann-integrálható, akkor $\|\underline{f}\|$ is az, és
$$\left\| \int_a^b \underline{f} \right\|_{\mathbb{R}^n} \le \int_a^b \|\underline{f}\| .$$

3. Görbék ívhossza

1. definíció. Az $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvényt $\mathbb{R}^n$***-beli görbé***nek, $[a, b]$-t ***paraméter-intervallum***nak, $\underline{f}$-t a görbe egy ***paraméterelőállítású***nak nevezzük. $\underline{f}(a)$ és $\underline{f}(b)$ a ***görbe kezdő***, illetve ***végpont***jai. Ha $\underline{f}(a) = \underline{f}(b)$, akkor $\underline{f}$ ***zárt görbe***. Ha $\underline{f}$ kölcsönösen egyértelmű, akkor ívnek nevezzük.

2. definíció. $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ***sima görbe***, ha $\underline{f}$ folytonosan differenciálható (azaz $\underline{f}' \doteq (f_1', \dots, f_n') : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ folytonos) és

$$\sum_{i=1}^n f_i'^2(t) > 0 \qquad (t \in [a, b])$$

teljesül.

3. definíció. Az $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ***görbe képe*** a

$$\Gamma = \{(f_1(t), \dots, f_n(t)) \mid t \in [a, b]\}$$

halmaz. (A képet – néha jelölésben is – azonosítjuk a görbével.) Γ egy pontja az $\underline{f}$ ***görbe többszörös pontja***, ha $\exists$ (legalább két) $t, t' \in [a, b]$, hogy $\underline{f}(t) = \underline{f}(t')$

Megjegyzések.

1. A $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ***egységkör*** egy ***paraméteres előállítása*** az $\underline{f} = (\cos, \sin) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ függvény. Belátható, hogy az egységkör sima, zárt görbe.
2. Ha $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \ne \underline{0}$ adott vektorok, akkor az
$$E \doteq \{\underline{a}t + \underline{b} = (a_1 t + b_1, \dots, a_n t + b_n) \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}\}$$
ponthalmazt a $\underline{b}$-n áthaladó $\underline{a}$ irányú n***-dimenziós egyenes***nek nevezzük. (A $t \to \underline{a}t + \underline{b} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ leképezés az egyenes egy paraméteres előállítása.)

3. Legyen $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ és $\underline{x} \neq \underline{y}$. Az $\{\underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}) \mid t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n$ halmazt az $\underline{x}$-et és $\underline{y}$-t összekötő n-***dimenziós szakasz***nak nevezzük. (Természetesen $d(\underline{x}, \underline{y}) \doteq \|\underline{x} - \underline{y}\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, $d(\underline{x}, \underline{0}) \doteq \|\underline{x}\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$).

4. definíció. Legyen $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ egy görbe $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_m = b\}$ $[a, b]$ egy felosztása, $\|\underline{f}(t_i) - \underline{f}(t_{i-1})\|$ az $\underline{f}(t_i)$ és $\underline{f}(t_{i-1})$ pontokat összekötő szakasz hossza. Az

$$\ell(\underline{f}, P) = \sum_{i=1}^{m} \|\underline{f}(t_i) - \underline{f}(t_{i-1})\|$$

számot az $\underline{f}$ görbébe a P felosztása esetén beírt ***töröttvonal hosszá***nak nevezzük. (Belátható, hogy ha $P_1 \subset P_2$, akkor $\ell(\underline{f}, P_1) \leq \ell(\underline{f}, P_2)$.)

5. definíció. Az $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ***görbe rektifikálható***, ha az $\{\ell(\underline{f}, P) \mid P$ tetszőleges felosztása $[a, b]$-nek$\}$ halmaz korlátos. Az ekkor létező

$$\ell(\underline{f}) = \sup_P \{\ell(\underline{f}, P)\} \big(= \ell(\underline{f}, [a, b])\big)$$

számot az $\underline{f}$ ***görbe ívhosszá***nak nevezzük.

Megjegyzések.

1. Az ívhossz nem függ a görbe paraméterelőállításától.
2. Az $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ pontokat összekötő szakasz ívhossza $\|\underline{x} - \underline{y}\|$, mert a 3. definíció utáni 3. megjegyzés miatt az $[x, y]$ $\mathbb{R}^n$-beli szakasz paraméteres előállítását az $\underline{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$,

$$\underline{f}(t) = \underline{x} + (\underline{y} - \underline{x})t = (x_1 + (y_1 - x_1)t, \ldots, x_n + (y_n - x_n)t) = = (f_1(t), \ldots, f_2(t))$$

függvény adja, így $[0, 1]$ bármely $P = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_m = 1\}$ felosztására

$$\begin{aligned}\ell(\underline{f}, P) &= \sum_{i=1}^{m} \big\|\underline{x} + (\underline{y} - \underline{x})t_i - (\underline{x} + (\underline{y} - \underline{x})t_{i-1})\big\| = \\ &= \|y - x\| \sum_{i=1}^{m} |t_i - t_{i-1}| = \|x - y\| \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) = \\ &= \|x - y\|(1 - 0) = \|x - y\| ,\end{aligned}$$

így $\ell(\underline{f}) = \sup_P \ell(\underline{f}, P) = \|x - y\|$.

3. Ha $\underline{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ görbe, $c \in [a, b]$, $\underline{f}$ rektifikálható $[a, b]$-n, úgy

$$\ell(\underline{f}, [a, b]) = \ell(\underline{f}, [a, c]) + \ell(\underline{f}, [c, b]) .$$

Fontos a következő:

Tétel. *Legyen $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sima görbe, akkor rektifikálható, és ívhossza*

$$\ell(\underline{f}, [a, b]) = \int_a^b \|\underline{f}'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i'^2(t)} \, dt .$$

Következmények.

1. Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, akkor az $\underline{f} = (f_1, f_2) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ $(f_1(t) = t,\ f_2(t) = g(t),\ t \in [a, b])$ a g gráfjának (grafikonjának) egy paraméteres előállítása, melyre $\underline{f}'(t) = (1, g'(t))$ teljesül, így ha $\mathcal{G}$ jelöli a g által adott görbét, akkor ívhosszára

$$\ell(\mathcal{G}) = \int_a^b \sqrt{1 + g'^2(t)} \, dt$$

következik (1)-ből.

2. Tekintsük az $\underline{f} = (\cos, \sin) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ egységkört. Legyen $s \in (0, 2\pi]$, $\underline{f}_s : [0, s] \to \mathbb{R}^2$ $\underline{f}$ $[0, s]$-re való leszűkítése. Ekkor

$\underline{f}_s$ az egységkör egy íve. (1)-ből jön, hogy

$$\ell(\underline{f}_s) = \int_0^s \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}\ dt = \int_0^s 1\ dt = s$$

az egységkör adott ívének hossza. Ha $s = 2\pi$, akkor $\ell(\underline{f}) = 2\pi$ az egységkör kerülete. Ez adja, hogy a mi π-nk megegyezik a középiskolás π-vel. s-t a P_0OP_s szög ívmértékének nevezzük. A 360°-os szög ívmértéke 2π.

3. $\underline{f}_r = (f_1, f_2) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f_1(t) = r \cdot \cos t$, $f_2(t) = r \cdot \sin t$ $(t \in [0, 2\pi])$ az origó középpontú r sugarú kör. (1)-ből jön, hogy

$$\ell(\underline{f}_r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)}\ dt = \int_0^{2\pi} r\ dt = 2r\pi\ .$$

4. Görbementi-integrál

Definíció. Legyen $\underline{g} = (g_1, \ldots, g_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ adott görbe, $\underline{f} : \underline{g}([a, b]) \to \mathbb{R}^n$ vektorfüggvény, hogy $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Az $\underline{f}$ függvény $\underline{g}$ ***görbementi-integrál***ján (jelölése $\int_{\underline{g}} \underline{f}$) az $\underline{f} \circ \underline{g} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ függvény g-re vonatkozó $[a, b]$ feletti Riemann-Stieltjes integrálját értjük (ha létezik), azaz

$$\int_{\underline{g}} \underline{f} \doteq \int_a^b (\underline{f} \circ \underline{g})\ d\underline{g} = \sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ \underline{g})\ dg_i\ .$$

1. tétel. *Ha $\underline{g}$ rektifikálható $[a, b]$-n, $\underline{f}$ folytonos $\underline{g}([a, b])$-n, akkor létezik az $\underline{f}$ függvény $\underline{g}$ görbementi integrálja.*

Bizonyítás. Felhasználjuk, hogy ha $\underline{g}$ rektifikálható, akkor a g_i függvények korlátos változásúak. Így mivel $f_i \circ \underline{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, g_i korlátos változású következik, hogy kétezik $\int_a^b (f_i \circ \underline{g})\ dg_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, így létezik $\int_a^b (\underline{f} \circ \underline{g})\ dg$, azaz $\int_{\underline{g}} \underline{f}$. □

2. tétel. *Ha létezik $\int_{\underline{g}} \underline{f}$ és $\|(\underline{f} \circ \underline{g})(x)\| \leq M$, akkor $\left|\int_{\underline{g}} \underline{f}\right| \leq M \cdot \ell(\underline{g})$.*

Bizonyítás.

$$\left|\int_{\underline{g}} \underline{f}\right| \doteq \left|\int_a^b (\underline{f} \circ \underline{g})\ d\underline{g}\right| \doteq \left|\sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ \underline{g})\ dg_i\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \left|\int_a^b (f_i \circ \underline{g})\ dg_i\right| \leq M \cdot \sum_{i=1}^n \left|\int_a^b 1\ dg_i\right| \leq M \cdot \ell(\underline{g})\ . \qquad \square$$

3. tétel. *Ha $\underline{g}'$ folytonos $[a, b]$-n, $\underline{f}$ folytonos $\underline{g}([a, b])$-n, akkor*

$$\int_{\underline{g}} \underline{f} = \sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ \underline{g})(x) g_i'(x)\ dx\ .$$

Bizonyítás.

$$\int_{\underline{g}} \underline{f} \doteq \int_a^b (\underline{f} \circ \underline{g}) d\underline{g} \doteq \sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ \underline{g})\ dg_i = \sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ \underline{g})(x) g_i'(x)\ dx\ . \quad \square$$

Példa. Számítsa ki $\int_{\underline{g}} \underline{f}$-et, ha

$$\underline{g}(t) = (t^2, 2t, t) \qquad (t \in [0, 1])$$

és

$$\underline{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_3, x_1 x_3, x_1 x_2) \qquad ((x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3)$$

$\underline{f}$ folytonos, mert

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3\ , \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3\ ,$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$$

komponens függvényei folytonosak (ami az átviteli elvvel bizonyítható). Létezik $g'(t) = (2t, 2, 1) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$ és folytonos, mert a

$t \to 2t,\ t \to 2,\ t \to 1$ függvények folytonosak. Így

$$\int_{\underline{g}} \underline{f} = \int_0^1 (f_1 \circ \underline{g})(t) g_1'(t)dt + \int_0^1 (f_2 \circ \underline{g})(t) g_2'(t)dt + \int_0^1 (f_3 \circ \underline{g})(t) g_3'(t)dt =$$

$$= \int_0^1 (t^4+t)2t\,dt + \int_0^1 t^2\,t\,2\,dt + \int_0^1 t^2\,2t\,t\,dt = \int_0^1 (2t^5+4t^3+2t^2)dt =$$

$$= \left[2\frac{t^6}{6} + 4\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{2}{3} = 2\ .$$

További tulajdonságok:

1. Additivitás $\underline{f}$-re, illetve a $\underline{g}$ görbére. Például legyen $\underline{g} = \underline{g}^1 \cup \underline{g}^2$ és létezik $\int_{\underline{g}^i} \underline{f}$ $(i = 1, 2)$, akkor létezik $\int_{\underline{g}} \underline{f} = \sum_{i=1}^{2} \int_{\underline{g}^i} \underline{f}$.
2. Ha $\underline{g}$ irányított görbe, $-\underline{g}$ az ellentétes irányítású, akkor $\int_{-\underline{g}} \underline{f} \doteq -\int_{\underline{g}} \underline{f}$.

Megjegyzések.

1. $\mathbb{R}^2$-beli görbék esetén a következő jelölések szokásosak:

$\underline{g}$-re: $\quad \underline{g}(t) = (x(t), y(t)) \qquad (t \in [a,b])$;

$\underline{f}$-re: $\quad \underline{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \qquad ((x,y) \in \underline{g}([a,b]))$;

$\int_{\underline{g}} \underline{f}$-re:
$$\int_{\underline{g}} \underline{f} = \int_a^b P(x(t), y(t))\ dx(t) + \int_a^b Q(x(t), y(t))\ dy(t) \doteq$$

$$\doteq \int_{\underline{g}} P\ dx + \int_{\underline{g}} Q\ dy \doteq \int_{\underline{g}} (P\ dx + Q\ dy)$$

Ilyenkor $\int_{\underline{g}} P\ dx$-et a $\underline{g}$ görbementi ***abszcissza szerinti***, $\int_{\underline{g}} Q\ dy$-t a $\underline{g}$ görbementi ***ordináta szerinti görbementi-integrál***nak nevezzük, illetve azt mondjuk, hogy $\int_{\underline{g}} (P\ dx + Q\ dy)$ a (P, Q) ***függvénypár*** $\underline{g}$ ***görbementi integrálja***.

2. $\mathbb{R}^3$-beli görbékre a szokásos jelölések az alábbiak:

$$\underline{g}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad (t \in [a,b])\ ;$$
$$\underline{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \qquad ((x,y,z) \in \underline{g}([a,b]))\ ;$$

$$\int_{\underline{g}} \underline{f} = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))\ dx(t) + \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t))\ dy(t) +$$

$$+ \int_a^b R(x(t), y(t), z(t))\ dz(t) \doteq \int_{\underline{g}} P\ dx + \int_{\underline{g}} Q\ dy + \int_{\underline{g}} R\ dz \doteq$$

$$\doteq \int_{\underline{g}} (P\ dx + Q\ dy + R\ dz)\ .$$

Utóbbit a (P, Q, R) ***függvényhármas*** $\underline{g}$ ***görbementi integrálja***nak is nevezik.

VI. fejezet

Többváltozós függvények differenciálszámítása

1. A differenciálhatóság

A továbbiakban olyan $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvényekkel foglalkozunk, ahol D nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben és $f = (f_1, \dots, f_m)$, ahol $f_1, \dots, f_m$ az f komponens függvényei. $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ elemeit is oszlopmátrixokkal reprezentáljuk (ha mást nem mondunk).

Egy $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvényt akkor nevezünk differenciálhatónak az $x_0 \in \langle a, b\rangle$-ben, ha létezik a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

véges határérték, s ez nem vihető át $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények $x_0 \in D$-beli differenciálhatóságára.

Ugyanakkor a definíció így is megfogalmazható:
Létezik $A \in \mathbb{R}$, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$, mellyel ekvivalensek a következők:

$$\begin{aligned}
&\exists\, A \in \mathbb{R}, && \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A = 0 \\
\iff\ &\exists\, A \in \mathbb{R}, && \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \\
\iff\ &\exists\, A \in \mathbb{R}, && \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0\ .
\end{aligned}$$

Ez utóbbi már alkalmas az általánosításra (abszolútérték helyett $\mathbb{R}^m$, illetve $\mathbb{R}^n$-beli normát, A helyett $m\times n$-es mátrixot, azaz $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezést véve).

1. definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ***függvény differenciálható az*** $x_0 \in D$ ***pontban***, ha létezik egy $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, hogy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} = 0\ . \tag{1}$$

Ekkor $f'(x_0) \doteq A$ az f ***függvény*** x_0***-beli differenciálhányadosa***, míg

$$df(x_0, x - x_0) \doteq f'(x_0)(x - x_0)$$

az f x_0-beli ***első differenciálja***.

Megjegyzés. Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény, úgy $f'(x) = A = (a_1 \ \dots\ a_n)$ $1 \times n$-es sormátrix, míg az első differenciál a

$$d\,f(x_0, x - x_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - x_{0i})$$

szám.

Példa. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = B\cdot x + b$, ahol B egy $m\times n$-es mátrix, $b \in \mathbb{R}^m$. Bizonyítsa be, hogy f differenciálható és $f'(x) = B$.
Azt kell belátni, hogy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|Bx + b - (Bx_0 + b) - B(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\|0\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} = 0\ .$$

1. tétel. *Ha az 1. definícióban* (1) *az $A = A_1$ és $A = A_2$ esetén is teljesül, úgy $A_1 = A_2$ (azaz a differenciálhányados egyértelműen meghatározott).*

2. tétel. *Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény akkor és csak akkor differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, ha*

a) *létezik $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés és $\omega : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, hogy*

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x) \tag{2}$$

és $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\omega(x)}{\|x - x_0\|} = 0.$

vagy

b) *létezik* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *lineáris leképezés és* $\omega : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény, hogy*

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x)\|x - x_0\| \tag{3}$$

és $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0.$

Bizonyítás.
A) Rendezés és abszolútérték képzése után (2) és (3) is adja (1) teljesülését.
B) (1)-ből a határérték definíciója és tulajdonságai miatt kapjuk a) és b) és így (2) és (3) teljesülését. □

3. tétel. *Ha az* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény differenciálható az* $x_0 \in D$ *pontban, akkor ott folytonos is.*

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = 0. \tag{$*$}$$

Az előző tétel b) része adja, hogy létezik $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, és $\omega : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$ és

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \big\|A(x - x_0) + \omega(x)\|x - x_0\|\big\| \le$$
$$\le \|A(x - x_0)\| + \|\omega(x)\|\,\|x - x_0\| \le \|A\|\,\|x - x_0\| + \|\omega(x)\|\,\|x - x_0\|.$$

A kapott egyenlőtlenségből $x \to x_0$ határátmenettel kapjuk $(*)$-ot. □

Megjegyzés. A tétel megfordítása általában nem igaz. Például az

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0, 0)$ pontban, de nem differenciálható, ahogy ezt később még bizonyítjuk.

4. tétel. *Az* $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény akkor és csak akkor differenciálható az* $x_0 \in D$ *pontban, ha az* f_i $(i = 1, \ldots, m)$

függvények differenciálhatók x_0*-ban, továbbá* $f'(x_0)_i = f_i'(x_0)$*, azaz*

$$f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix}.$$

2. Iránymenti és parciális derivált

1. definíció. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$ és $e \in \mathbb{R}^n$ $(\|e\| = 1)$ adott. A

$$D_e f(x_0) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

értéket, ha létezik, az f ***függvény*** x_0***-beli*** e ***iránymenti differenciálhányadosá***nak nevezzük.

Példa. Számítsa ki az $f(x, y) = x^2 + y^2$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény $e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (e_1, e_2)$ iránymenti deriváltját $(1, 1)$-ben. Ebben az esetben $m = 1$, $n = 2$ és

$$D_e f(1, 1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(1 + te_1, 1 + te_2) - f(1, 1)}{t} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2}{t} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{2\frac{2t}{\sqrt{2}} + 2\frac{t^2}{2}}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{4}{\sqrt{2}} + t\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,.$$

1. tétel. *Ha az* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény differenciálható az* $x_0 \in D$ *pontban, akkor bármely* $e \in \mathbb{R}^n$ *iránymenti deriváltja létezik és*

$$D_e f(x_0) = f'(x_0) \cdot e\,.$$

Bizonyítás. Az előző paragrafus 2. tételének b) részét $x = x_0 + te$, $A = f'(x_0)$ mellet használva

$$\frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} = \frac{1}{t}[f'(x_0)(x_0 + te - x_0) + \omega(x_0 + te)|t|] =$$
$$= f'(x_0) \cdot e + \omega(x_0 + te)\frac{|t|}{t}$$

következik ($|t| < \delta$ esetén – alkalmas δ mellett), ami $t \to 0$ határátmenettel adja az állítást. □

Megjegyzés. A tétel megfordítása általában nem igaz.

2. definíció. Ha $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x_0 \in D$ és $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$, akkor a

$$D_i f_j(x_0) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) \doteq D_{e_i} f_j(x_0)$$

$(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m)$ számokat, ha léteznek az f j-edik komponensfüggvénye i-edik változója szerinti ***parciális derivált***jainak nevezzük x_0-ban.

Megjegyzés. Ha $\varphi_j(t) \doteq f_j(x_{01}, \ldots, x_{0i-1}, t, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n})$ $(|t| < \delta)$, akkor $D_i f_j(x_0) = \varphi_j'(x_{0i})$.

Példák.

1. Ha $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, úgy $m = 1,\ n = 2$, így $D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}$-et és $D_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$-t kell meghatározni, amihez be kell látni, hogy f differenciálható-e rögzített y mellett x szerint, illetve rögzített x mellett y szerint. A válasz nyilván igen (hiszen így egyváltozós másodfokú függvényeket kapunk) és

$$D_1 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y\ , \quad D_2 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 2x\ .$$

2. Határozza meg $D_1 f(0,0)$-t és $D_2 f(0,0)$-t, ha

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ha } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

$m = 1,\ n = 2$, így

$$D_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0-0}{x-0} = 0\ ,$$
$$D_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0-0}{y-0} = 0\ .$$

2. tétel. *Ha az $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény az $x_0 \in D$ pontban differenciálható, akkor bármely $D_i f_j$ parciális derivált létezik és*

$$f'(x_0) = (D_i f_j(x_0))_{m \times n} = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x_0) & \ldots & D_n f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(x_0) & \ldots & D_n f_n(x_0) \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. Az előző paragrafus 4. tétele adja, hogy bármelyik f_j differenciálható x_0-ban és akkor az előző tétel szerint $\forall$ e-re, így $\forall$ e_i-re is $\exists$ $D_{e_i} f_j(x_0) \doteq D_i f_j(x_0)$. Továbbá:

$$f'(x_0) = (f_j'(x_0))_{m \times 1} \quad \text{és} \quad [f_j'(x_0)]_i \doteq f_j'(x_0) \cdot e_i = D_{e_i} f_j(x_0) \doteq D_i f_j(x_0)$$

miatt kapjuk $f'(x_0)$ előállítását is. □

Megjegyzés. A függvény differenciálhatóságának szükséges feltétele a parciális deriváltak létezése, s azok (ha differenciálható a függvény) megadják a deriváltmátrixot.

Példa. Az előbb beláttuk, hogy az

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ha } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

függvényre $\exists$ $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$, de nem differenciálható, mert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{x^2+y^2} \neq 0\ ,$$

ugyanis ha $(x_n, x_n) \to (0,0)$, akkor $\dfrac{|x_n x_n|}{x_n^2 + x_n^2} = \dfrac{1}{2} \not\to 0$.

3. tétel. *Ha az $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény bármely parciális deriváltja létezik az $x_0 \in D$ egy $K(x_0, \delta)$ környezetében és folytonosak x_0-ban, akkor f differenciálható x_0-ban.*

A 2. és 3. tétel felhasználásával egyszerűen bizonyítható a következő:

4. tétel. *Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ adott függvény, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

a) *Bármely $D_i f_j$ $(i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m)$ létezik és folytonos D-n.*

b) *f differenciálható D-n és $f' : D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ folytonos D-n.*

Az egyváltozós függvények differenciálhatóságának fogalma és az előbbi tétel alapján természetes a következő:

3. definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ***függvény folytonosan differenciálható*** D-n, ha

a) f differenciálható és f' folytonos D-n,

vagy

b) bármely $D_i f_j$ létezik és folytonos D-n

teljesül.

3. Differenciálási szabályok

1. tétel. *Ha az $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\lambda : D \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók $x_0 \in D$-ben, akkor az $f + g$, λf, $\dfrac{f}{\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$ függvények is differenciálhatók és*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$
$$(\lambda f)'(x_0) = f(x_0)\lambda'(x_0) + \lambda(x_0) f'(x_0),$$
$$\left(\frac{f}{\lambda}\right)'(x_0) = \frac{\lambda(x_0) f'(x_0) - f(x_0)\lambda'(x_0)}{\lambda^2(x_0)}$$

teljesül.

Bizonyítás. A definíció alapján például az első esetben az

$$\frac{\big\|(f+g)(x) - (f+g)(x_0) - (f'(x_0) + g'(x_0))(x - x_0)\big\|}{\|x - x_0\|} \leq$$
$$\leq \frac{\big\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\big\|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)\big\|}{\|x - x_0\|}$$

egyenlőtlenségből, $x \to x_0$ határátmenettel jön az állítás. $\square$

2. tétel (az összetett függvény differenciálhatósága). *Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : E \subset f(D) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ olyan, hogy f differenciálható $x_0 \in D$-ben és g differenciálható $f(x_0)$-ban, akkor az $F = g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ függvény differenciálható x_0-ban és*

$$\text{(ÖD)} \qquad F'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\ .$$

(D és E nyílt halmazok és (ÖD)-ben mátrixok szorzása szerepel.)

Példa. Legyenek

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, & f(x_1, x_2) &= (e^{2x_1 + x_2}, x_2 - x_1, x_1^2 + x_2)\ , \\ g &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, & f(y_1, y_2, y_3) &= (y_1 + 2y_2 + y_3^2, y_1^2 + y_2 + y_3)\ , \\ F &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, & F(x_1, x_2) &= g(f(x_1, x_2))\ . \end{aligned}$$

Határozza meg $F'(0,0)$-t.

Ellenőrízhető, hogy $f\ \forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $g\ \forall\ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$-ban differenciálható (mert komponens függvényeik differenciálhatók), így $\exists\ f'(0,0)$ és $g'(f(0,0)) = g'(1,0,0)$. Továbbá

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{2x_1+x_2} \cdot 2 & e^{2x_1+x_2} \\ -1 & 1 \\ 2x_1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad f'(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g'(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2y_3 \\ 2y_1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad g'(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

így

$$F'(0,0) = g'(1,0,0) \cdot f'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzések.

1. Ha $k = 1$, akkor (ÖD) alakja

$$F'(x_0) = (D_1 F(x_0)\ \dots\ D_n F(x_0)) =$$
$$= \Big(D_1 g\big(f(x_0)\big)\ \dots\ D_m g\big(f(x_0)\big)\Big) \begin{pmatrix} D_1 f_1(x_0) & \dots & D_n f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x_0) & \dots & D_n f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

és akkor például

$$D_jF(x_0) = \sum_{k=1}^{m} D_k g\big(f(x_0)\big) \cdot D_j f_k(x_0) \ .$$

2. Ha $k = 1,\ n = 1$, akkor $F(t) = g(f_1(t), \ldots, f_m(t))$,

$$F'(x_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_0) = \sum_{j=1}^{m} D_j g\big(f(x_0)\big) f_j'(x_0) \ .$$

3. tétel. *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x_0 \in D,\ f(x_0) = y_0$. Tegyük fel, hogy g az y_0 egy környezetét $\mathbb{R}^n$-be képező függvény, hogy $g(y_0) = x_0$ és $g(f(x)) = \mathrm{id}(x)$ bármely $x \in K(x_0, \delta)$. Ha f differenciálható x_0-ban és g differenciálható y_0-ban, akkor*

$$g'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$$

(Itt $(f'(x_0))^{-1}$ az $f'(x_0)$ mátrix inverzét jelöli.)

Megjegyzés. Ha egy f differenciálható függvénynek létezik differenciálható inverze, akkor szükségképpen $f'(x)$ nem szinguláris mátrix.

4. Középértéktételek és következményeik

A következőkben az egyváltozós függvényekre ismert Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával mondunk ki, illetve bizonyítunk be hasonló típusú tételeket.

1. tétel. *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható a D (nyílt) halmazon és D tartalmazza az x_0 és x_0+h végpontú $[x_0, x_0+h]$-val jelölt szakaszt, akkor létezik $c = x_0 + t_0 h$ $(0 < t_0 < 1)$ pont ezen a szakaszon, hogy*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c) \cdot h \ .$$

Bizonyítás. A

$$\Phi(t) \doteq f(x_0 + th) \qquad (t \in [0, 1])$$

szerint definiált függvény az összetett függvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel miatt differenciálható és

$$\Phi'(t) = f'(x_0 + th) \cdot h \qquad (t \in [0, 1])$$

Továbbá Φ teljesíti az egyváltozós Lagrange-tétel feltételeit a $[0, 1]$ intervallumon, így $\exists\ t_0 \in (0, 1)$ (és így $c = x_0 + t_0 h$), hogy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(t_0) \cdot 1 = f'(c) \cdot h \ . \qquad \square$$

2. tétel. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és konvex halmaz (azaz bármely $x_1, x_2 \in D$ esetén $[x_1, x_2] \subset D$). Ha $f : D \to \mathbb{R}$ differenciálható D-n és létezik $M \in \mathbb{R}$, hogy $\|f'(x)\| \le M$ (bármely $x \in D$), akkor*

$$|f(x) - f(y)| \le M\|x - y\| \qquad (x, y \in D)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in D$ (konvex) $\Longrightarrow$ $[x, y] \subset D$, így az 1. tétel miatt ($x = x_0$ és $y = x_0 + h$ mellett) $\exists\ c \in (x, y)$, hogy

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y) \ ,$$

melyből

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)(x - y)| \le \|f'(c)\|\,\|x - y\| \le M\|x - y\|$$

következik tetszőleges $x, y \in D$ esetén, amit bizonyítani kellett. $\square$

Következmény. *Ha a 2. tétel feltételei mellett még $f'(x) = 0$ $(x \in D)$ is teljesül, akkor $f(x) = c$ $(x \in D)$.*

3. tétel. *Ha az $f : K(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény bármely $D_i f$ $(i = 1, \ldots, n)$ parciális deriváltja létezik, akkor bármely $h \in \mathbb{R}^n,\ 0 < \|h\| < \delta$ esetén léteznek $c_1, \ldots, c_n \in K(x_0, \delta)$ vektorok, hogy*

$$(*) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(c_i) h_i \qquad (h = (h_1, \ldots, h_n)).$$

Következmény. *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény bármely $D_i f$ parciális deriváltja létezik és korlátos valamely $K(x_0, \delta) \subset D$ környezetben, akkor f folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. A 3. tétel miatt $(*)$ teljesül, melyből

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| = \left|\sum_{i=1}^{n} D_i f(c_i) h_i\right| \le M \sum_{i=1}^{n} |h_i| \qquad \big(\|h\| < \delta\big)$$

következik (ha $|D_i f(c_i)| \le M\ \forall\ i = 1, \ldots, n$).

Ebből pedig, felhasználva, hogy $h \to 0$-ból $h_i \to 0$ is következik ($\forall$ i-re) kapjuk, hogy

$$\lim_{h \to 0} |f(x_0 + h) - f(x_0)| = 0 \ ,$$

ami adja, hogy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

és így (mivel x_0 torlódási pontja és pontja is D-nek) f folytonos x_0-ban. □

Megjegyzés. A következmény igaz $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvényekre is, ha $\forall$ $D_i f_j$ létezik és korlátos valamely $K(x_0, \delta) \subset D$-ben. Ekkor $\forall$ f_j folytonossága teljesül x_0-ban (a következmény miatt). Ugyanakkor az f_j-k x_0-beli folytonossága adja az $f = (f_1, \ldots, f_m)$ függvény folytonosságát is x_0-ban.

5. Magasabbrendű deriváltak, Young és Taylor tétele

1. definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény ***kétszer differenciálható*** az $x_0 \in D$-ben, ha

- létezik $\delta > 0$, hogy f differenciálható $K(x_0, \delta) \subset D$-n,
- a $D_i f$ $(i = 1, \ldots, n)$ függvények differenciálhatók x_0-ban.

Ekkor (a korábbiak szerint) léteznek a $D_j(D_i f)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ parciális deriváltak x_0-ban és a

$$D_j(D_i f)(x_0)\Big(= D_j D_i f(x_0) = D_{ij} f(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = f_{x_i x_j}(x_0)\Big)$$

számokat az f függvény x_0-beli ***másodrendű***, i-edik és j-edik változó szerinti ***parciális deriváltjai***nak nevezzük.

Ha $D_1 \subseteq D$ jelöli azon x-ek halmazát, ahol létezik $D_j D_i f(x)$, akkor $D_j D_i f : D_1 \to \mathbb{R}$ az f i-edik és j-edik változó szerinti ***másodrendű parciális derivált függvénye*** D_1-en.

Példák.

1. Ha $f(x, y) = x^2 + y^2$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$, akkor $\exists$ $D_x f(x, y) = 2x$ és $D_y f(x, y) = 2y$ és így

$$\exists \ D_{xx} f(x, y) = 2, \quad D_{xy} f(x, y) = 0, \quad D_{yx} f(x, y) = 0, \quad D_{yy} f(x, y) = 2$$

bármely $(x, y) \in \mathbb{R}^2$-re.

2. Ha

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

akkor

$$D_x f(x, y) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2y(x^2 + y^2) - 2xy2y}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{2yx^2 + y^3 - 4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0 - 0}{x - 0} = 0 & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

így

$$\lim_{y \to 0} \frac{D_x f(0, y) - D_x f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{2y^3}{y^4} - 0}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{2}{y^2} = +\infty$$

miatt nem létezik $D_{xy} f(0, 0)$, de

$$\exists \quad D_{xx} f(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{D_x f(x, 0) - D_x f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0 \ .$$

Megjegyzések.

1. Definiálhatók a ***magasabbrendű parciális deriváltak*** is:
Ha adott $i_1, \ldots, i_{r-1}$-re létezik $D_{i_1} \ldots D_{i_{r-1}} f$ $(= D_{i_1 \ldots i_{r-1}} f)$ $K(x_0, \delta)$-n, akkor

$$D_{i_1 \ldots i_r} f(x_0) \doteq D_{i_r}(D_{i_1 \ldots i_{r-1}} f)(x_0)$$

az f függvény $i_1, \ldots, i_r$ változók szerinti ***r-edrendű parciális deriváltja*** x_0-ban. Ha $i_1 = i_2 = \cdots = i_r = k$, úgy

$$D_k^r f \doteq D_k \ldots D_k f$$

a k-adik változó szerinti r-edrendű „tiszta” parciális deriváltat jelöli.

2. Mivel $f' = (D_1 f \ \ldots \ D_n f)$, így a ***kétszeri differenciálhatóság*** fogalma ekvivalens a következővel:
   - létezik $\delta > 0$, hogy f differenciálható $K(x_0, \delta)$-n,
   - f' differenciálható x_0-ban.

$f''(x_0) \doteq (f')'(x_0)$-t f x_0-beli második deriváltjának nevezzük.

2. definíció. Azt mondjuk, hogy az $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény ***kétszer differenciálható*** az $x_0 \in D$ pontban, ha az $f_1, \dots, f_m$ függvények kétszer differenciálhatók x_0-ban és

$$f''(x_0) = (f_1''(x_0), \dots, f_m''(x_0)).$$

3. definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény ***r-szer*** ($r \geq 2$) ***differenciálható*** x_0-ban, ha

- létezik $\delta > 0$, hogy f $r-1$-szer differenciálható $K(x_0, \delta)$-n,
- a $D_{i_1} \dots D_{i_{r-1}} f$ $(1 \leq i_1, \dots, i_{r-1} \leq n)$ $r-1$-edrendű parciális derivált függvények differenciálhatók x_0-ban.

Ez ekvivalens azzal, hogy létezik $f^{(r-1)}$ x_0 egy környezetében és ez differenciálható x_0-ban.

4. definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény ***kétszer folytonosan differenciálható*** $x_0 \in D$-ben, ha a $D_1 f, \dots, D_n f$ függvények differenciálhatók az x_0 valamely $K(x_0, \delta) \subset D$ környezetében és a

$$(D_i f)' = (D_1 D_i f \ \dots \ D_n D_i f) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

függvények folytonosak x_0-ban.
Ez pontosan azt jelenti, hogy f differenciálható $K(x_0, \delta)$-ban és f' differenciálható és deriváltja folytonos x_0-ban.
(Hasonlóan definiálható a függvény r-szer folytonos differenciálhatósága is.)

„Gyakran" igaz adott függvényre, hogy $D_k D_j f = D_j D_k f$, vagyis az úgynevezett vegyes parciálisok megegyeznek, de van ellenpélda is.

Példák.

1. Ha $f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$, akkor

$$\exists \ D_x f(x, y) = 2x - 2y \implies \exists \ D_{xy} f(x, y) = -2 \ ,$$
$$\exists \ D_y f(x, y) = -2x - 6y \implies \exists \ D_{yx} f(x, y) = -2 \ ,$$

így $D_{xy} f(x, y) = D_{yx} f(x, y)$ bármely $x \in \mathbb{R}^2$-re.

2. Ha

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

akkor

$$\exists \ D_x f(x, y) = $$
$$= \begin{cases} y \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - xy \dfrac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) 2x}{(x^2 + y^2)^2} & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0 - 0}{x - 0} = 0 & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

így

$$\exists \ D_{xy} f(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{-\frac{y^3}{y^2} - 0 - 0}{y - 0} = -1 \ ,$$

továbbá

$$\exists \ D_y f(x, y) = $$
$$= \begin{cases} x \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - xy \dfrac{-2y(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) 2y}{(x^2 + y^2)^2} & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{0 - 0}{y - 0} = 0 & , \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \end{cases}$$

így

$$\exists \ D_{yx} f(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2} - 0}{x - 0} = 1 \ .$$

Ezért $D_{xy} f(0, 0) = -1 \neq 1 = D_{yx} f(0, 0)$.

Most egy elegendő feltételt adunk a vegyes parciálisok egyenlőségére.

1. tétel (Young). *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az $a \in D$ pontban kétszer differenciálható, akkor*

$$D_k D_j f(a) = D_j D_k f(a)$$

bármely $1 \leq k, j \leq n$ esetén.

Megjegyzés. A tétel általánosítható $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$-ben r-szer differenciálható függvényekre, ekkor

$$D_{i_1 \dots i_r} f(x_0) = D_{j_1 \dots j_r} f(x_0)$$

bármely $(i_1, \dots, i_r)$ és $(j_1, \dots, j_r)$ r-tagú, természetes számokból álló sorozatra, melyek egymásból átrendezéssel keletkeznek $(1 \leq i_k, j_s \leq n)$.

5. definíció. Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$-ben differenciálható függvény x_0-beli, az $x - x_0$ megváltozáshoz tartozó ***első differenciál***ján a

$$df(x_0, x - x_0) \doteq f'(x_0)(x - x_0) \qquad (x - x_0 \in D)$$

függvényt értjük. Ha $h \doteq x - x_0$, úgy

$$df(x_0, h) \doteq f'(x_0)h$$

az x_0-beli, h megváltozáshoz tartozó első differenciálja f-nek. Ez minden olyan x-re értelmezhető, ahol $\exists\ f'(x)$, ekkor

$$df(x, h) = f'(x)h$$

f x-beli, h-hoz tartozó első differenciálja.

Ha $m = 1$, $x - x_0 = h = (h_1, \ldots, h_n)$, akkor f x-beli, h-hoz tartozó első differenciálja

$$df(x, h) \doteq \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)h_i$$

alakú, ha $\exists\ f'(x) = (f_{x_1}(x) \ \ldots \ f_{x_n}(x))$.

6. definíció. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ olyan, hogy létezik $f^{(r)}(x_0)$ (f r-szer differenciálható x_0-ban). Ekkor $d^1 f(x, h) \doteq df(x, h)$ f x-beli, h-hoz tartozó ***első differenciál***ja. Ha $d^{r-1} f(x, h)$ az f x-beli, h-hoz tartozó $(r-1)$-edik differenciálja értelmezett valamely $K(x_0, \delta)$-n, akkor f x_0-beli, h-hoz tartozó ***r-edik differenciál***ján a rögzített h mellett x függvényeként tekintett $d^{r-1} f$ függvény első differenciálját értjük x_0-ban, azaz

$$d^r f(x_0, h) \doteq \sum_{i=1}^{n} (d^{r-1} f)_{x_i}(x_0)h_i \ .$$

2. tétel. *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ r-szer differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, akkor*

$$d^r f(x_0, h) = \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n} f_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}(x_0)h_{i_1} \ldots h_{i_r}$$

(ami r-edrendű forma az $f_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}(x_0)$ együtthatókkal).

3. tétel. *Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ r-szer differenciálható D-n, akkor az $F(t) = f(x+th)$ függvény minden olyan $t \in \mathbb{R}$-re, amelyre $x+th \in D$, r-szer differenciálható és*

$$F^{(r)}(t) = d^r f(x + th, h).$$

4. tétel (Taylor-formula). *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in D$ és f $(r+1)$-szer differenciálható az $[x, x+h] \subset D$ szakaszon, akkor létezik $\theta \in (0,1)$, hogy*

$$\text{(TF)} \quad f(x + h) = f(x) + \frac{df(x, h)}{1!} + \cdots + \frac{d^r f(x, h)}{r!} + \frac{d^{r+1} f(x + \theta h, h)}{(r+1)!}$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$F : [0, 1] \to \mathbb{R} \ , \qquad F(t) = f(x + th)$$

függvényt. F a f $(r+1)$-szeri differenciálhatósága miatt $(r+1)$-szer differenciálható és az előbbi tétel miatt

$$(*) \qquad F^{(i)}(t) = d^i f(x + th, h) \qquad (i = 1, \ldots, r + 1)$$

$\forall\ t \in [0, 1]$-re.

Így F teljesíti az egyváltozós Taylor-tétel feltételeit, ezért $t_0 = 0 \ \wedge$ $t = 1$ esetén $\exists\ \theta \in (0, 1)$, hogy

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}1 + \cdots + \frac{F^{(r)}(0)}{r!}1^r + \frac{F^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}1^{r+1} \ ,$$

ami $(*)$ miatt adja a (TF)-et. □

Példák.

1. Írja fel a Taylor-formulát az $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ $((x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ függvényre az $(1, 1)$ pontban, $r = 1$ mellett.
   Ekkor (TF) alakja

$$f(1 + h_1, 1 + h_2) =$$
$$= f(1, 1) + \frac{df((1, 1), (h_1, h_2))}{1!} + \frac{df((1 + \theta h_1, 1 + \theta h_2), (h_1, h_2))}{2!}.$$

A parciális deriváltak:

$$f_{x_1}(x_1,x_2)=x_2x_1^{x_2-1}\ , \qquad f_{x_2}(x_1,x_2)=x_1^{x_2}\ln x_1\ ,$$
$$f_{x_1x_1}(x_1,x_2)=x_2(x_2-1)x_1^{x_2-2}\ ,$$
$$f_{x_1x_2}(x_1,x_2)=x_1^{x_2-1}+x_2x_1^{x_2-1}\ln x_1=f_{x_2x_1}\ ,$$
$$f_{x_2x_2}(x_1,x_2)=x_1^{x_2}\ln^2 x_1\ .$$

A differenciálok:

$$df((1,1),(h_1,h_2))=f_{x_1}(1,1)h_1+f_{x_2}(1,1)h_2=1h_1+0h_2\ ,$$

$$\begin{aligned}d^2f((1+\theta h_1,1+\theta h_2),(h_1,h_2))&=(1+\theta h_2)\theta h_2h_1^2+\\&+2\left[(1+\theta h_1)^{\theta h_2}+(1+\theta h_2)(1+\theta h_1)^{\theta h_2}\ln(1+\theta h_2)\right]h_1h_2+\\&+(1+\theta h_1)^{(1+\theta h_2)}\ln^2(1+\theta h_1)h_2^2\ .\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}(1+h_1)^{1+h_2}&=1+h_1+\frac{1}{2}\Big\{(1+\theta h_1)\theta h_2h_1^2+\\&+\left[1+(1+\theta h_2,\ln(1+\theta h_2))\right](1+\theta h_1)h_1h_2+\\&+(1+\theta h_1)^{(1+\theta h_2)}\ln^2(1+\theta h_1)h_2^2\Big\}.\end{aligned}$$

2. Számítsa ki $1.02^{1.01}$ közelítő értékét.
Az előbbi példa szerint ($h_1=0.02,\ h_2=1,01$ mellett csak az első differenciált használva)

$$1.02^{1.01}\approx 1+0.02=1.02.$$

Másrészt

$$d^2f((1,1),h_1,h_2)=0\cdot h_1^2+2[1+0]h_1h_2+0h_2^2=2h_1h_2$$

miatt egy jobb közelítés

$$1.02^{1.01}\approx 1+0.02+(0.02)0.01=1.0202\ .$$

Egy zsebszámológép az $1.020202007\ldots$ értéket mutatja, így a második közelítés már elég jó.

6. Lokális szélsőérték

Ismeretes a következő: akkor mondjuk, hogy az $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ függvénynek az $x_0\in D$ pontban lokális maximuma (minimuma) van, ha $\exists\ \delta>0$, hogy

$$\forall\ x\in K(x_0,\delta)\implies f(x)\le f(x_0)\ (f(x)\ge f(x_0)).$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan igaz a következő:

1. tétel (a lokális szélsőérték 1. szükséges feltétele).
Ha $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x_0\in D$ (nyílt), f differenciálható x_0-ban és f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0)=0$.

Bizonyítás. Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $\exists K(x_0,\delta)\subset D$, hogy

$$f(x)\le f(x_0)\quad (f(x)\ge f(x_0))\qquad \forall\ x\in K(x_0,\delta),$$

így ha e ($\|e\|=1$) tetszőleges $\mathbb{R}^n$-ben és $|t|<\delta$, akkor

$$f(x_0+te)-f(x_0)\le 0\ (\ge 0),$$

így f x_0-beli differenciálhatósága miatt a 3.1. tétel adja, hogy

$$f'(x_0)e=D_ef(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t}\begin{cases}\le 0\ (\ge 0), & \text{ha } t\to 0+0\\ \ge 0\ (\le 0), & \text{ha } t\to 0-0\end{cases},$$

ami csak úgy lehetséges, ha $f'(x_0)e=0$, melyből e tetszőleges volta miatt jön, hogy $f'(x_0)=0$. $\square$

2. tétel (a lokális szélsőérték 2. szükséges feltétele).
Ha az $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ függvénynek lokális szélsőértéke van $x_0\in D$-ben és létezik $f_{x_i}(x_0)$, akkor $f_{x_i}(x_0)=0$.

Bizonyítás. Ha f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van, úgy a

$$\varphi(t)=f(x_{01},\ldots,x_{0i-1},t,x_{0i+1},\ldots,x_{0n})$$

függvénynek is $t=x_{0i}$-ben, így $f_{x_i}(x_0)=\varphi'(x_{0i})=0$. $\square$

A 6. fejezet 2. tétele $r=2$ esetén adja, hogy az $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ függvény x_0-beli $h=(h_1,\ldots,h_n)$-hez tartozó 2. differenciálja, ha $\exists\ f''(x_0)$

$$d^2f(x_0,h)=\sum_{i,j=1}^{n}f_{x_ix_j}(x_0)h_ih_j\ ,$$

ahol a Young-tétel miatt $f_{x_ix_j}(x_0) = f_{x_jx_i}(x_0)$ is teljesül. A második differenciál tehát ekkor a h_i-k ***kvadratikus formá***ja. Lineáris algebrából ismert, hogy egy

$$q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

kvadratikus forma

– ***pozitív definit***, ha $q > 0 \ \forall \ h = (h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0)$,
– ***negatív definit***, ha $q < 0 \ \forall \ h = (h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0)$,
– ***indefinit***, ha felvesz pozitív és negatív értékeket is.

Továbbá – Sylvester tétele szerint – egy kvadratikus forma akkor és csak akkor pozitív, illetve negatív definit, ha a

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \dots \ , \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

úgynevezett bal felső sarokdeterminánsok (vagy főminor determinánsok) pozitívak, illetve váltakozva negatívak és pozitívak.

Ezen fogalmak, a Taylor-tétel és a differenciálhatóság definíciója alapján bizonyítható a következő, úgynevezett másodrendű (elegendő) feltétel a lokális szélsőérték létezésére.

3. tétel (a lokális szélsőérték elegendő feltétele).
Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, továbbá $f'(x_0) = 0$ és $d^2f(x_0, h)$ pozitív (negatív) definit, akkor x_0-ban f-nek szigorú lokális minimuma (maximuma) van.

Megjegyzések.
1. A tétel feltételei mellett $\Delta_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ esetén szigorú lokális minimuma, $(-1)^i\Delta_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ esetén szigorú lokális maximuma van f-nek x_0-ban.
2. Ha d^2f indefinit, akkor f-nek nincs szélsőértéke x_0-ban (az adott feltételek mellett).

Példák.
1. Vizsgálja a lokális szélsőértéket az

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvényre.

$$\exists \quad f_x(x, y) = 2x + y - 3 \ , \quad f_y(x, y) = x + 2y - 3 \ ,$$

így ott lehet lokális szélsőérték, ahol

$$2x + y - 3 = 0 \ , \qquad x + 2y - 3 = 0 \ .$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása az $x = 1, \ y = 1$, így az $(1, 1)$ pontban lehet lokális szélsőérték.
Belátható, hogy f kétszer differenciálható az $(1, 1)$ pontban, továbbá

$$f_{xx}(x, y) = 2 \ , \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 1 \ , \quad f_{yy}(x, y) = 2 \ ,$$

ezért

$$f_{xx}(1, 1) = 2 \ , \quad f_{xy}(1, 1) = f_{yx}(1, 1) = 1 \ , \quad f_{yy}(1, 1) = 2 \ ,$$

miatt a $d^2f((1, 1), (h_1, h_2))$ kvadratikus forma mátrixa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

ami adja, hogy

$$\Delta_1 = 2 > 0 \ , \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \ ,$$

tehát (lásd 1. megjegyzés) f-nek $(1, 1)$-ben lokális minimuma van.

2. Vizsgálja az $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény lokális szélsőértékeit.

$$\exists \quad f_x(x, y) = 3x^2 - 3y \ , \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 3x \ ,$$

és

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{aligned}\right\} \iff \quad (x, y) = (0, 0) \quad \text{vagy} \quad (x, y) = (1, 1),$$

így a $(0, 0)$ és az $(1, 1)$ pontokban lehet lokális szélsőérték. Belátható, hogy f kétszer differenciálható, továbbá

$$f_{xx}(x, y) = 6x \ , \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -3 \ , \quad f_{yy}(x, y) = 6y \ .$$

$(1, 1)$-ben a d^2f mátrixa $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, így $\Delta_1 = 6 > 0, \ \Delta_2 = 36 - 9 > 0$, tehát f-nek $(1, 1)$-ben lokális minimuma van.

$(0,0)$-ban a d^2f mátrixa $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, így $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -9 > 0$ miatt tételünk nem használható. Belátható (más módszerrel), hogy $(0,0)$-ban az $f(0,0) = 0$ nem lokális szélsőérték.

7. Inverzfüggvény-tételek

A 3. fejezet 3. tétele után megjegyeztük, hogy egy differenciálható $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (D nyílt) függvény differenciálható inverzének létezéséhez szükséges, hogy $f'(x)$ mátrixa nem szinguláris, ami a lineáris algebrából tanultak szerint azt is adja, hogy $\det f'(x) \neq 0$.

Megmutatható, hogy folytonosan differenciálható függvények esetén a feltétel – legalábbis lokálisan – elégséges is.

1. definíció. Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ***leképezés***t (függvényt) ***reguláris***nak nevezzük, ha folytonosan differenciálható és

$$\det f'(x) = \begin{vmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(x) & \dots & D_n f_n(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (x \in D)\ .$$

2. definíció. Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezést (függvényt) ***lokálisan invertálható***nak nevezzük D-n, ha $\forall\ x_0 \in D$ esetén $\exists\ K(x_0, r) \subset D$, hogy $f|_{K(x_0,r)}$ (f leszűkítése $K(x_0, r)$-re) invertálható függvény.

Az alábbi három (az inverzfüggvény-tétel bizonyítását előkészítő) tételt bizonyítás nélkül közöljük.

1. tétel (a lokális invertálhatóság elegendő feltétele).
Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ reguláris leképezés (függvény), akkor lokálisan invertálható D-n

2. tétel (az inverz függvény folytonossága). *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény (D nyílt) reguláris és kölcsönösen egyértelmű D-n, akkor*

a) *$f(D)$ nyílt $\mathbb{R}^n$-ben;*
b) *az f függvény $g : f(D) \to D$ inverz függvénye folytonos.*

3. tétel (az inverz függvény regularitása). *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény (D nyílt) reguláris és kölcsönösen egyértelmű D-n, akkor a $g : f(D) \to D$ inverz függvénye reguláris.*

Az előző három tétel eredményeinek összefoglalása a következő:

4. tétel (inverzfüggvény-tétel). *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény a D nyílt halmazon reguláris, akkor lokálisan invertálható és a lokális inverzek regulárisak, azaz $\forall\ x_0 \in D$ esetén $\exists\ U$ és V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, hogy $x_0 \in U \subset D$, $f(U) = V$, továbbá f kölcsönösen egyértelmű U-n, a $g = f^{-1}$ függvény folytonosan differenciálható V-n, és $\det g' \neq 0$ V-n.*

Bizonyítás. Az 1. tétel adja f lokális invertálhatóságát D-n, így $\forall\ x_0 \in D$ esetén létezik $K(x_0, \delta) = U \subset D$ nyílt halmaz, hogy f kölcsönösen egyértelmű U-n. A 2. tétel miatt az $f(U) = V$ halmaz nyílt $\mathbb{R}^n$-ben, míg 3. tétel miatt a $g = f^{-1}$ lokális inverz reguláris V-n. $\square$

Megjegyzés. Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény lokális invertálhatóságát úgy is fogalmazhatjuk, hogy az $y = f(x)$ egyenlet, illetve az

$$y = (y_1, \dots, y_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) = f(x)$$

miatt adódó

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

egyenletrendszer megoldható $x_1, \dots, x_n$-re az $y_1, \dots, y_n$ függvényében (ha $\forall\ x_0 \in D$-re x és y az x_0 és $y_0 = f(x_0)$ elég kis környezetében vannak).

Példák.

1. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.
   Ha $D =]0,1[\times]0, b[$, akkor f' nem szinguláris D-n, de akkor és csak akkor kölcsönösen egyértelmű D-n, ha $b < 2\pi$.
   Bármely $(r, \varphi) \in D$-re
   $$\exists\ \ f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$
   így $\det f'(r, \varphi) = r > 0\ \forall\ (r, \varphi) \in D$-re, ezért f' nem szinguláris.
   Ekkor az inverzfüggvény-tétel adja, hogy f lokálisan invertálható D-n (és a lokális inverzek regulárisok).
   A Kalkulus I. I.3.1 tétel miatt f akkor és csak akkor invertálható D-n, ha $\forall\ (r_1, \varphi_1), (r_2, \varphi_2) \in D$ esetén $f(r_1, \varphi_1) = f(r_2, \varphi_2)$-ből $(r_1, \varphi_1) = (r_2, \varphi_2)$, azaz $r_1 = r_2$ és $\varphi_1 = \varphi_2$ következik.
   Tehát legyen $(r_1\cos\varphi_1, r_1\sin\varphi_1) = (r_2\cos\varphi_2, r_2\sin\varphi_2)$, akkor $r_1\cos\varphi_1 = r_2\cos\varphi_2$ és $r_1\sin\varphi_1 = r_2\sin\varphi_2$ következik D-n, melyből

négyzetreemeléssel és összeadással $r_1^2 = r_2^2$, illetve $r_1 = r_2$ következik.
Így az egyenletrendszer φ_1 és φ_2-re

$$0 = \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 = -2\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$$
$$0 = \sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 = 2\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\ ,$$

ami akkor és csak akkor teljesül, ha $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$.
Ha $\varphi_1, \varphi_2 \in]0, 2\pi[$, úgy ez csak $k = 0$-ra lehet igaz, azaz $\varphi_1 = \varphi_2$ is teljesül. Ha tehát $b < 2\pi$, úgy f kölcsönösen egyértelmű D-n. Ha $b \geq 2\pi$ úgy nem.

2. Határozzuk meg az $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \frac{x}{1+x_1+x_2} = \left(\frac{x_1}{1+x_1+x_2}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}\right)$$

függvény inverzét, ha $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 + x_1 + x_2 \neq 0\}$.
Belátható, hogy

$$\exists\ \ f'(x_1, x_2) = \frac{1}{(1+x_1+x_2)^2} > 0\ ,$$

így a lokális invertálhatóság igaz.
A megjegyzés szerint f akkor (lokálisan) invertálható, ha az

$$\frac{x_1}{1+x_1+x_2} = y_1\ , \quad \frac{x_2}{1+x_1+x_2} = y_2$$

egyenletrendszer megoldható x_1, x_2-re y_1 és y_2 függvényében (lokálisan). A megoldás egyszerűen jön:

$$x_1 = \frac{y_1}{1-y_1-y_2}\ , \quad x_2 = \frac{y_2}{1-y_1-y_2}\ ,$$

ha $1 - y_1 - y_2 \neq 0$ (ami nyilván igaz), így f invertálható D-n.

8. Implicit függvények

Definíció. Legyenek $D_1 \subset \mathbb{R}^k$ és $D_2 \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazok és

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : D = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$$

adott függvény (függvényrendszer).
A $g = (g_1, \ldots, g_n) : D_1 \to \mathbb{R}^n$ függvényt (függvényrendszert) az

(1) $\qquad f(x, y) = 0 \qquad (x = (x_1, \ldots, x_k),\ y = (y_1, \ldots, y_n))$

egyenlet (illetve az

(1') $\qquad f_i(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$

egyenletrendszer) ***megoldásá***nak nevezzük, ha

(2) $\qquad f(x, g(x)) = 0 \qquad (x \in D_1)$

teljesül. Ekkor a $g = (g_1, \ldots, g_n)$ függvényt (függvényrendszert) az (1) egyenlet által adott ***implicit függvény***nek (***függvényrendszer***nek) szokás nevezni.
(Ha $k = n = 1$, úgy az f és a g függvény $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, illetve $g : D_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú.)

Fontos kérdések:

- Mikor létezik implicit függvény?
- Mit mondhatunk (alkalmas feltételek mellett) az implicit függvény differenciálhatóságáról?

Jelölések:

- Ha $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ differenciálható, úgy

$$f' \doteq \frac{\partial f}{\partial x} \doteq \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}.$$

- Ha $f : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ ($D = D_1 \times D_2$ nyílt), akkor

$$f' \doteq \left[\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right] \qquad (x = (x_1, \ldots, x_k),\ y = (y_1, \ldots, y_n)).$$

Megjegyzés. Az implicit függvény meghatározásánál egy n egyenletből álló $k+n$ ismeretlenes egyenletrendszert oldunk meg úgy, hogy az utolsó n ismeretlent fejezzük ki az első k-val (az egyszerűség kedvéért).

1. tétel. *Legyen $f : D = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ (D_1 és D_2 nyílt) differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik az (1) egyenlet által adott (2)-t teljesítő $g : D_1 \to \mathbb{R}^n$ differenciálható implicit függvény. Akkor*

$$\text{(ID1)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0,$$

illetve ha a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ $n \times n$-es mátrix nem szinguláris az $(x, g(x))$ pontban, akkor

$$\text{(ID2)} \qquad g'(x) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$$

teljesül.

Bizonyítás. Ha létezik differenciálható g, úgy legyenek $h, H : D_1 \to \mathbb{R}^{k+n}$,

$$h(x) \doteq (x, g(x)), \qquad H(x) \doteq f(h(x)) = f(x, g(x)),$$

akkor egyrészt $H(x) = 0$ $(x \in D_1)$ másrészt (az összetett függvény differenciálási szabálya miatt):

$$0 = H'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(h(x)) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(h(x))\right] \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ g'(x) \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x)$$

azaz (ID1) teljesül. Ha pedig $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$ nem szinguláris, úgy (ID1)-et $\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right]^{-1}$-gyel balról szorozva, rendezés után kapjuk (ID2)-t is. $\square$

2. tétel (implicitfüggvény-tétel). *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ olyan folytonosan differenciálható függvény, hogy $\exists\ (a, b) \in D$, $\det \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ (azaz $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ nem szinguláris). Akkor $\exists\ K(a, r) \subset \mathbb{R}^k$ és egy egyértelműen meghatározott, folytonos $g : K(a, r) \to \mathbb{R}^n$ függvény, hogy*

$g(a) = b$ és $f(x, g(x)) = 0$ $(x \in K(a, r))$ (azaz az (1) által meghatározott, (2)-t teljesítő implicit függvény $K(a, r)$-en). Továbbá g folytonosan differenciálható.

Példa. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$. Vizsgáljuk az

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$$

egyenlet által meghatározott

$$f(x, g(x)) = x^2 + g^2(x) - 5 = 0$$

egyenletet teljesítő $g : K(a, r) \to \mathbb{R}$ implicit függvényt létezését, ha $(a, b) = (1, 2)$.
f-ről belátható, hogy folytonosan differenciálható.
Ha $(a, b) = (1, 2)$, úgy $f(a, b) = f(1, 2) = 1^2 + 2^2 - 5 = 0$, továbbá $\exists\ D_1 f(1, 2) = 2 \neq 0$ és $D_2 f(1, 2) = 2 \neq 0$, így az egyenlet lokálisan megoldható bármely változóra (a másik függvényében).
Ha $r = 1$, úgy nyilván a $g : K(1, 1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{5 - x^2}$ egyértelmű megoldás (implicit függvény). Az 1. tétel szerint

$$g'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{5 - x^2}}\ .$$

9. Feltételes szélsőérték

Definíció. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}$, $h = (h_1, \ldots, h_n) : D \to \mathbb{R}^n$. Az f függvénynek az $x_0 \in D$ (D nyílt) pontban a

$$h(x) = 0 \qquad (h_1(x) = \cdots = h_n(x) = 0)$$

feltétel mellett ***feltételes lokális szélsőérték***e van, ha

- $h(x_0) = 0 \quad (h_1(x_0) = \cdots = h_n(x_0) = 0)$

és

- $\exists\ \delta > 0,\ \forall\ x \in K(x_0, \delta)\ \wedge\ h(x) = 0 \quad f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$

teljesül.

Tétel (a feltételes lokális szélsőérték szükséges feltétele). *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}$, $h = (h_1, \ldots, h_n) : D \to \mathbb{R}^n$. Ha az f függvénynek az $x_0 \in D$ (D nyílt) pontban a $h(x) = 0$ feltétel mellett feltételes lokális* *szélsőértéke van, továbbá f és h folytonosan differenciálhatók az x_0 egy környezetében, akkor*

- *vagy a $\left(D_j h_i(x_0)\right)_{n\times(k+n)}$ mátrix minden n-edrendű aldeterminánsa zérus*
- *vagy $\exists\ \lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ számok, hogy a*

$$F : D \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i(x)$$

függvény minden parciális deriváltja zérus x_0-ban, azaz

$$D_j F(x_0) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k+n).$$

Megjegyzés. A tétel szerint a lehetséges feltételes szélsőérték helyek meghatározásához a

$$\begin{cases} D_j f(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i D_j h_i(x) = 0 & j = 1, \ldots, k+n \\ h_i(x) = 0 & i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

$k + 2n$ egyenletből álló $k + 2n$ ismeretlenes $(x_1, \ldots, x_{k+n}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ egyenletrendszert kell megoldani.

Példa. Határozza meg az

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

függvény feltételes lokális szélsőérték helyeit és azok értékét a

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

feltételre (azaz az $x_1^2 + x_2^2 = 1$ körvonalon).
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú, így a megjegyzés szerint, mivel

$$\begin{aligned} D_1 f(x_1, x_2) &= 1\ , & D_2 f(x_1, x_2) &= 2\ , \\ D_1 h(x_1, x_2) &= 2x_1\ , & D_2 h(x_1, x_2) &= 2x_2\ , \end{aligned}$$

az

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x_1 = 0 \\ 2 + 2\lambda x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai (x_1, x_2)-re adják a lehetséges feltételes szélsőérték helyeket.
Egyszerű számolás adja, hogy ezek

$$\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{10}\right) \quad \text{és} \quad \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{10}\right).$$

Az $x_1^2 + x_2^2 = 0$ körvonal kompakt halmaz $\mathbb{R}^2$-ben, így azon f felveszi a maximumát és minimumát, melyek

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{10}\right) = 2\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{illetve} \quad f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{10}\right) = -2\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

VII. fejezet

Riemann-integrál $\mathbb{R}^n$-ben

Bevezetés

Ebben a fejezetben először a (I.2.–6. és 9. fejezetben tárgyalt) Riemann-integrál fogalmát és az arra vonatkozó bizonyos eredményeket általánosítjuk n-dimenziós tégla felett értelmezett korlátos függvényekre, kiegészítve az általánosabb Riemann-integrál kiszámítására vonatkozó tételekkel.

Ezt követően (a téglán definiált integrálra visszavezetve) értelmezzük az integrált korlátos $\mathbb{R}^n$-beli halmazokra, melyhez kapcsolódva $\mathbb{R}^n$-beli korlátos halmazok Jordan-mérhetőségét és mértékét, s a mérték fontosabb tulajdonságait is vizsgáljuk. Rámutatunk arra is, hogy például az $\mathbb{R}^2$-beli Jordan-mérték és az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény gráfja alatti terület egybeesik.

1. Riemann-integrál téglán

a) Riemann-integrál fogalma téglán

A Riemann-integrál fogalma (és ebből eredően tulajdonságai is) az $\mathbb{R}^n$ tégláin (intervallumain) szoros analógiát mutat (mutatnak) az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre felépített Riemann-integrállal. Geometriai tartalma pedig a terület- és térfogatszámításhoz is kapcsolódik.

A továbbiakban legyen $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ egy ***tégla***, vagy ***n-dimenziós intervallum*** (ahol az $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ intervallumokat Q komponens-intervallumainak nevezzük), míg $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.

1. definíció. A $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ***tégla mértékén*** (***térfogatán***) a

$$V(Q) \doteq (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

valós számot értjük. (Speciálisan ez $n = 1$-re egy valós intervallum hossza, $n = 2$-re egy téglalap területe.)

2. definíció. Ha $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ adott tégla, úgy a $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ halmazt Q ***egy felosztásá***nak nevezzük, ha $\forall\ j = 1, \ldots, n$-re P_j az $[a_j, b_j]$ intervallum egy (korábban már definiált) felosztása, azaz

$$P_j = \{x_{ji} \mid a_j = x_{j0} < x_{j1} < \cdots < x_{jk_j} = b_j\}\ .$$

Ha $\forall\ j$-re $I_{ji} = [x_{ji-1}, x_{ji}]$ $(i = 1, \ldots, k_j)$ jelöli az $[a_j, b_j]$ komponens-intervallum P_j által meghatározott részintervallumait, akkor a $T_{i_1 \ldots i_n} = I_{1i_1} \times \cdots \times I_{ni_n}$ téglákat (ahol $i_1 = 1, \ldots, k_1;\ \ldots\ ; i_n = 1, \ldots, k_n$) a Q tégla P felosztás által meghatározott ***résztéglái***nak (részintervallumainak), míg a

$$\|P\| = \sup_{i_1, \ldots, i_n} \{\operatorname{diam} T_{i_1 \ldots i_n}\}$$

számot (ahol $\operatorname{diam} T_{i_1 \ldots i_n}$ a $T_{i_1 \ldots i_n}$ tégla átmérője) a P ***felosztás finomságá***nak nevezzük.

3. definíció. Legyen P^1 és P^2 Q két felosztása. P^2 ***finomítása*** (továbbosztása) P^1-nek, ha $P^1 \subset P^2$. A $P = P^1 \cup P^2$ halmazt a P^1 és P^2 felosztások egyesítésének (illetve $P^1 \subset P^1 \cup P^2$ és $P^2 \subset P^1 \cup P^2$ miatt közös finomításának) nevezzük.

4. definíció. $\langle P^k \rangle$ ***normális felosztássorozat***a Q-nak, ha $\lim\limits_{k \to \infty} \|P^k\| = 0$ teljesül.

Megjegyzések.

1. Ha $P = P_1 \times \cdots \times P_n$, akkor $\|P\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|P_k\|^2, \quad \|P_k\| \le \|P\|$.
2. Ha $\langle P^k \rangle = \langle P_1^k \times \cdots \times P_n^k \rangle$, úgy $\langle P^k \rangle$ akkor és csak akkor normális, ha $\langle P_i^k \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ normális.
3. $P^1 \subset P^2$ akkor és csak akkor $P_i^1 \subset P_i^2$ $(i = 1, \ldots, n)$.
4. $Q = \bigcup\limits_{i_1, \ldots, i_n} T_{i_1 \ldots i_n}$.

5. definíció. Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, P a Q egy felosztása és $T_{i_1 \dots i_n}$ e felosztás résztéglái, továbbá

$$m_{i_1 \dots i_n} \doteq \inf_{x \in T_{i_1 \dots i_n}} \{f(x)\} \qquad M_{i_1 \dots i_n} \doteq \sup_{x \in T_{i_1 \dots i_n}} \{f(x)\}$$

(ezek f korlátossága miatt léteznek).
A

$$s(f,P) \doteq \sum m_{i_1 \dots i_n} V(T_{i_1 \dots i_n}) \ , \qquad S(f,P) \doteq \sum M_{i_1 \dots i_n} V(T_{i_1 \dots i_n}) \ ,$$

$$\mathcal{O}(f,P) \doteq S(f,P) - s(f,P) = \sum (M_{i_1 \dots i_n} - m_{i_1 \dots i_n}) V(T_{i_1 \dots i_n})$$

számokat az f függvény P felosztáshoz tartozó ***alsó***, ***felső***, illetve ***oszcillációs összeg***einek, míg tetszőleges $t_{i_1 \dots i_n} \in T_{i_1 \dots i_n}$ pontokra a

$$\sigma(f,P) \doteq \sum f(t_{i_1 \dots i_n}) V(T_{i_1 \dots i_n})$$

számot az f függvény P felosztáshoz és $t_{i_1 \dots i_n}$ pontokhoz tartozó integrálközelítő összegének nevezzük, ahol az összegzés kiterjed a Q tégla P által meghatározott összes résztéglájára.

1. tétel. *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

a) *bármely P és bármely $\sigma(f,P)$-re: $s(f,P) \le \sigma(f,P) \le S(f,P)$;*
b) *bármely $P^1 \subset P^2$-re: $s(f,P^1) \le s(f,P^2)$, $\quad S(f,P^1) \ge S(f,P^2)$;*
c) *bármely P^1, P^2-re: $s(f,P^1) \le S(f,P^2)$.*

6. definíció. Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az

$$\underline{I} \doteq \underline{\int}_Q f \doteq \sup_P \{s(f,P)\} \qquad \bar{I} \doteq \overline{\int}_Q f \doteq \inf_P \{S(f,P)\}$$

(létező) számokat az f függvény Q feletti ***alsó***, illetve ***felső Darboux-integrál***jának nevezzük.

2. tétel. *Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

$$\underline{I}, \bar{I} \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \underline{I} \le \bar{I}, \quad 0 \le \bar{I} - \underline{I} \le \mathcal{O}(f,P).$$

Bizonyítás. Lásd Kalkulus I., IX.2., 2. tétel bizonyítása. □

Példák.

1. Ha $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, akkor $\underline{I} = \bar{I}$, mert Q bármely P feloszását választva, $m_{i_1 \dots i_n} = M_{i_1 \dots i_n} = c$ miatt

$$s(f,P) = S(f,P) = \sum cV(T_{i_1 \dots i_n}) = c(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n),$$

ami adja, hogy

$$\underline{I} = \sup_P \{s(f,P)\} = c(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) = \inf_P \{S(f,P)\} = \bar{I} \ .$$

2. Ha $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } x \text{ bármely koordinátája racionális,} \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases}$$

akkor $\underline{I} \ne \bar{I}$, mert Q bármely P felosztására (mivel minden $T_{i_1 \dots i_n}$ résztéglában van csupa racionális koordinátájú és más típusú pont is)
$m_{i_1 \dots i_n} = 0$, $M_{i_1 \dots i_n} = 1$, így

$$s(f,P) = \sum 0 \cdot V(T_{i_1 \dots i_n}) = 0 \ ,$$

$$S(f,P) = \sum 1 \cdot V(T_{i_1 \dots i_n}) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) \ ,$$

ezért

$$\underline{I} = \sup_P \{s(f,P)\} = 0 < (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) = \inf_P \{S(f,P)\} = \bar{I} \ .$$

7. definíció. Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény ***Riemann-integrálható*** Q-n, ha $\underline{I} = \bar{I}$ és ezt a közös értéket az f függvény Q ***tégla feletti Riemann-integrál***jának nevezzük, és rá az I, $\int\limits_Q f$, vagy $\int\limits_Q f(x)dx$ jelöléseket használjuk.

Megjegyzések.

1. Az előző 1. példa függvénye Riemann-integrálható és $I = c(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$.
2. Létezik nem Riemann-integrálható függvény (a 2. példa függvénye).

b) A Darboux-tétel és következményei

1. tétel (Darboux-tétel). *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ ($Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla) korlátos függvény, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy Q bármely P felosztására, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$,*

$$S(f,P) - \bar{I} < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad \underline{I} - s(f,P) < \varepsilon$$

teljesül.

2. tétel (A Darboux-tétel következménye). *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

a) Q bármely $\langle P^k \rangle$ normális felosztássorozatára létezik

$$\lim_{k\to\infty} s(f,P^k) = \underline{I}\ , \quad \lim_{k\to\infty} S(f,P^k) = \bar{I}\ , \quad \lim_{k\to\infty} \mathcal{O}(f,P^k) = \bar{I} - \underline{I}\ ;$$

b) Q bármely $\langle P^k \rangle$ normális felosztássorozatára léteznek $\langle \sigma^1(f,P^k) \rangle$ és $\langle \sigma^2(f,P^k) \rangle$ integrálközelítő összegsorozatok, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \sigma^1(f,P^k) = \underline{I}\ , \qquad \lim_{k\to\infty} \sigma^2(f,P^k) = \bar{I}\ .$$

c) A Riemann-integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

1. tétel. *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható Q-n, ha létezik $I \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy bármely olyan P felosztására Q-nak, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$, $|\sigma(f,P) - I| < \varepsilon$ teljesül bármely $\sigma(f,P)$-re.*

2. tétel. *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható Q-n, ha bármely $\langle P^k \rangle$ normális felosztássorozathoz tartozó bármely $\langle \sigma(f,P^k) \rangle$ integrálközelítő összegsorozat konvergens.*

3. tétel (Riemann-kritérium). *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható Q-n, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik P felosztása Q-nak, hogy*

$$\mathcal{O}(f,P) = S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon\ .$$

Bizonyítás. Mint valósban, csak $[a,b]$ helyett Q-t írunk. (Lásd I.4., 3. tétel bizonyítása.) □

4. tétel. *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható Q-n, ha Q bármely $\langle P^k \rangle$ normális felosztássorozata esetén $\langle \mathcal{O}(f,P^k) \rangle$ nullsorozat.*

5. tétel. *$f : Q \to \mathbb{R}$ folytonos függvény Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Mint valósban, csak $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ helyett $\dfrac{\varepsilon}{V(Q)}$-t használunk. (Lásd I.4., 5. tétel bizonyítása.) □

Definíció. Az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt ***Lebesgue szerint nullmértékű***nek nevezzük $\mathbb{R}^n$-ben, ha bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik megszámlálható sok $Q_1, \dots,$ $Q_n, \dots$ tégla, hogy

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} V(Q_n) < \varepsilon.$$

6. tétel (Lebesgue-kritérium). *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha egy Lebesgue szerint nullmértékű $\mathbb{R}^n$-beli halmaztól eltekintve folytonos.*

7. tétel. *Ha az $f : Q_1 \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható és $Q_2 \subset Q_1$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ is tégla, úgy $f\big|_{Q_2}$ Riemann-integrálható Q_2-n.*

8. tétel (az integrál additivitása téglára). *Legyenek $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ olyan téglák, hogy nincs közös belső pontjuk és $Q = Q_1 \cup Q_2$ is tégla (azaz van közös lapjuk). Ha az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható Q_1-en és Q_2-n, akkor Q-n is és*

$$\int_Q f = \int_{Q_1} f + \int_{Q_2} f.$$

Megjegyzés. A tételből következik, hogy ha egy Q téglát közös belső pont nélküli $Q_1, \dots, Q_k$ résztéglákra bontunk, hogy $Q = \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$ és az $f : Q \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható bármely Q_k-n, akkor Riemann-integrálható Q-n is és

$$\int_Q f = \sum_{i=1}^{k} \int_{Q_i} f\ .$$

Utóbbi igaz alsó, illetve felső Darboux-integrálokra is.

d) A Riemann-integrál műveleti tulajdonságai, egyenlőtlenségek, középértéktételek

1. tétel. *Ha az $f, g : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvények Riemann-integrálhatók, $p, q \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, akkor a $(p \cdot f + q \cdot g) : Q \to \mathbb{R}$ függvény* *is Riemann-integrálható és*

$$\int_Q (p\cdot f + q\cdot g) = p\cdot \int_Q f + q\cdot \int_Q g\,.$$

Bizonyítás. Lásd I.6., 1. tétel bizonyítása. □

2. tétel. *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor f^2 is, továbbá ha létezik $c > 0$, hogy $|f(x)| \ge c$ bármely $x \in Q$, akkor $\frac{1}{f}$ is Riemann-integrálható.*

3. tétel. *Ha az $f, g : Q \to \mathbb{R}$ függvények Riemann-integrálhatók, akkor $f\cdot g$ is, továbbá ha létezik $c > 0$, hogy $|g(x)| > c$ bármely $x \in Q$-ra, úgy $\frac{f}{g}$ is Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Lásd I.6., 3. tétel bizonyítása. □

4. tétel. *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor $|f|$ is Riemann-integrálható.*

5. tétel. *Ha $f, g : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvények és $f \le g$, akkor*

$$\underline{\int}_Q f \le \underline{\int}_Q g \ \wedge\ \overline{\int}_Q f \le \overline{\int}_Q g\,.$$

Ha továbbá f, g Riemann-integrálhatók, akkor $\int\limits_Q f \le \int\limits_Q g$.

Bizonyítás. Lásd I.7., 1. tétel bizonyítása. □

6. tétel. *Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor*

$$\left|\int_Q f\right| \le \int_Q |f|\,.$$

Bizonyítás. Lásd I.7., 2. tétel bizonyítása. □

7. tétel (középértéktétel). *Legyenek $f, g : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhatók, továbbá*

$$m \le f(x) \le M\,, \quad 0 \le g(x) \qquad (x \in Q),$$

akkor

$$m\int_Q g \le \int_Q f\cdot g \le M\int_Q g\,.$$

Bizonyítás. Lásd I.6., 3. tétel bizonyítása. □

1. következmény. *Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, $m \le f \le M$, akkor*

$$m \le \frac{1}{V(Q)}\int_Q f \le M\,.$$

Bizonyítás. A 7. tételből $g \equiv 1$ választással, $\int\limits_Q 1 = V(Q)$ miatt jön az állítás. □

2. következmény. *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor $\exists\ c \in Q$, hogy*

$$f(c) = \frac{1}{V(Q)}\int_Q f\,.$$

e) Az integrál kiszámítása (a Fubini-tétel)

Cél: Az n-dimenziós tégla feletti integrál kiszámításának visszavezetése alacsonyabb dimenziójú integrálokra, az úgynevezett ismétléses integrálással.

1. tétel (Fubini). *Legyen $Q \doteq A\times B \subset \mathbb{R}^n$, ahol $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$ téglák. Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, melyet $f(x, y)$ alakban írunk, ha $x \in A$ és $y \in B$. Bármely $x \in A$ esetén tekintsük az*

$$\underline{I}(x) \doteq \underline{\int}_{y\in B} f(x,y) \qquad \text{és} \qquad \overline{I}(x) \doteq \overline{\int}_{y\in B} f(x,y)$$

alsó és felső integrálokat.
Ha létezik $\int\limits_Q f$, akkor az $\underline{I}, \overline{I} : A \to \mathbb{R}$ függvények Riemann-integrálhatók és

$$\int_Q f = \int_{x\in A}\left[\underline{\int}_{y\in B} f(x,y)\right] = \int_{x\in A}\left[\overline{\int}_{y\in B} f(x,y)\right].$$

A Fubini-tétel következményei:

1. Legyen $Q = A\times B$ ($A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$ téglák), $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.
   Ha létezik $\int\limits_Q f$ és bármely $x \in A$-ra létezik $\int\limits_{y\in B} f(x,y)$, vagy bármely

$y \in B$-re létezik $\int\limits_{x\in A} f(x,y)$, akkor

$$\int\limits_Q f = \int\limits_{x\in A}\left[\int\limits_{y\in B} f(x,y)\right] \qquad \text{vagy} \qquad \int\limits_Q f = \int\limits_{y\in B}\left[\int\limits_{x\in A} f(x,y)\right].$$

teljesül.

2. Ha $A=[a,b]\subset\mathbb{R},\ B=[c,d]\subset\mathbb{R},\ f:Q=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ korlátos és Riemann-integrálható függvény Q-n, azaz létezik

$$\int\limits_Q f \doteq \int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\ dxdy\ ,$$

és

$$\text{bármely}\quad x\in[a,b]\quad\text{létezik}\quad \int\limits_c^d f(x,y)\ dy$$

vagy

$$\text{bármely}\ y\in[c,d]\quad\text{létezik}\quad \int\limits_a^b f(x,y)\ dx$$

akkor

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\ dxdy = \int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)\ dy\right]\ dx$$

vagy

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\ dxdy = \int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,y)\ dx\right]\ dy$$

teljesül, azaz a kettős integrál kétszeres ismételt (valós Riemann) integrállal számítható.

3. Legyen $Q=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^n$ tégla, $f:Q\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\int\limits_Q f = \int\limits_{a_1}^{b_1}\left(\int\limits_{a_2}^{b_2}\cdots\left(\int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)dx_n\right)\cdots\right)dx_1$$

Példák.

1. A

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xy\,dxdy$$

kettős integrál létezik, mert az $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x,y)=xy$ függvény folytonos, így a Fubini-tétel 3. következménye miatt (felhasználva a Newton-Leibniz formulát is)

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xy\,dxdy = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 xy\,dy\right)dx = \int\limits_0^1\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\ .$$

2. A

$$\iiint\limits_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} xy^2\sqrt{z}\,dxdydz$$

hármas integrál létezik, mert az $f:[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=xy^2\sqrt{z}$ függvény folytonos, így a Fubini-tétel 3. következményét és a Newton-Leibniz formulát felhasználva

$$\iiint\limits_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} xy^2\sqrt{z}\,dxdydz = \int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 xy^2\sqrt{z}\,dz\right)dy\right]dx =$$

$$= \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\left[xy^2\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]dy\right)dx = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\frac{2}{3}xy^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1\left[\frac{x^2y^2}{3}\right]_{y=0}^{y=1}dx = \int\limits_0^1\frac{x^2}{3}dx = \left[\frac{x^3}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{9}\ .$$

2. Riemann-integrál korlátos $\mathbb{R}^n$-beli halmazon

Definíció. Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, $f : S \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, továbbá $f_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x \in S \\ 0 & , \ x \in CS \ . \end{cases}$$

Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ olyan tégla, hogy $S \subset Q$.
Az f függvényt ***Riemann-integrálható***nak mondjuk S ***felett***, ha létezik $\int\limits_Q f_S$ és az

$$\int\limits_S f \doteq \int\limits_Q f_S$$

számot az f ***függvény*** S ***feletti Riemann-integrálјá***nak nevezzük.

Megjegyzés. Az itt definiált integrál független Q megválasztásától.

1. tétel (az integrál tulajdonságai). *Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, $f, g : S \to \mathbb{R}$ korlátos függvények.*

a) *Ha f és g Riemann-integrálható S felett, akkor $\lambda f + \mu g$ is, és*

$$\int\limits_S (\lambda f + \mu g) = \lambda \int\limits_S f + \mu \int\limits_S g \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) *Ha f és g Riemann-integrálható S felett és $f(x) \leq g(x)$ $(x \in S)$, akkor $\int\limits_S f \leq \int\limits_S g$.*

c) *Ha f Riemann-integrálható S felett, akkor $|f|$ is Riemann-integrálható és $\left|\int\limits_S f\right| \leq \int\limits_S |f|$.*

d) *Legyen $T \subset S$. Ha $f \geq 0$ S-en és Riemann-integrálható T-n és S-en, akkor $\int\limits_T f \leq \int\limits_S f$.*

e) *Ha f Riemann-integrálható S_1 és S_2 felett, akkor Riemann-integrálható $S_1 \cup S_2$ és $S_1 \cap S_2$ felett is és*

$$\int\limits_{S_1 \cup S_2} f = \int\limits_{S_1} f + \int\limits_{S_2} f - \int\limits_{S_1 \cap S_2} f$$

Bizonyítás. Például:
a) Mivel $(\lambda f + \mu g)_S = \lambda f_S + \mu g_S$, így a 1/d, 1. tétel és a definíció miatt

$$\int\limits_S (\lambda f + \mu g) \doteq \int\limits_Q (\lambda f + \mu g)_S = \int\limits_Q (\lambda f_S + \mu g_S) =$$

$$= \lambda \int\limits_Q f_S + \mu \int\limits_Q g_S \doteq \lambda \int\limits_S f + \mu \int\limits_S g.$$

b) $f_S \leq g_S$ és az 1/d, 5. tétel miatt

$$\int\limits_S f \doteq \int\limits_Q f_S \leq \int\limits_Q g_S \doteq \int\limits_S g$$

□

1. következmény. *Ha $S \subset \mathbb{R}^n$, $f_i : S \to \mathbb{R}$, $(i = 1, \ldots, k)$ korlátos függvények, melyek Riemann-integrálhatók S felett, akkor $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$ is Riemann-integrálható és*

$$\int\limits_S \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_S f_i \ .$$

2. következmény. *Legyenek $S_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, k)$ korlátos halmazok, továbbá $f : \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható $\forall$ S_i-n, akkor f Riemann-integrálható az $S = \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$ halmazon. Ha még az is igaz, hogy $\forall$ $i \neq j$-re $S_i \cap S_j$ Lebesgue szerint nullmértékű $\mathbb{R}^n$-ben, akkor*

$$\int\limits_S f = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{S_i} f \ .$$

Bizonyítás. Ha $k = 2$, akkor az állítás jön e)-ből, mert a feltétel miatt $\int\limits_{S_1 \cap S_2} f = 0$ is igaz.
Általában pedig teljes indukcióval bizonyítunk. □

3. Jordan-mérhető halmazok $\mathbb{R}^n$-ben

1. definíció. Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ha az $f(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ konstans függvény Riemann-integrálható S-en, akkor azt mondjuk, hogy S ***Jordan-mérhető*** $\mathbb{R}^n$-ben és az

$$m_J(S) \doteq \int_S 1$$

számot S ***Jordan-mértéké***nek nevezzük.

Megjegyzések.

1. Ha $S = Q \subset \mathbb{R}^n$ egy tégla, akkor

$$m_J(Q) \doteq \int_Q 1 = V(Q) \ ,$$

azaz egy Q tégla Jordan-mértéke éppen a korábban definiált térfogata.

2. A Jordan-mérhetőség és Jordan-mérték fogalmát szemléletesebbé teszi a következő gondolatmenet:
   - $m_J(S) \doteq \int\limits_S 1 \doteq \int\limits_Q 1_S$, ahol $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla és $S \subset Q$. Így S mérhetősége azzal ekvivalens, hogy

$$\underline{\int_Q} 1_S = \overline{\int_Q} 1_S \ ,$$

azaz az

$$1_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad 1_S(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in S \\ 0 & , \ x \in CS \end{cases}$$

függvény (S karakterisztikus függvénye) alsó és felső Darboux-integrálja megegyezik, továbbá S Jordan-mértéke ez a közös érték.

   - $$\underline{\int_Q} 1_S \doteq \sup_P \{s(1_S, P)\} \qquad \text{és} \qquad \overline{\int_Q} 1_S \doteq \inf_P \{S(1_S, P)\}$$
   ahol P a Q tégla egy tetszőleges felosztása.
   - Ugyanakkor

$$s(1_S, P) = \sum_* V(T_{i_1 \dots i_n}) \doteq j(S, P),$$

illetve

$$S(1_S, P) = \sum^* V(T_{i_1 \dots i_n}) \doteq J(S, P),$$

ahol $\sum_*$ és $\sum^*$ olyan $i_1 \dots i_n$-ekre való összegzést jelent, hogy

$$\forall \ x \in T_{i_1 \dots i_n} \implies x \in S^0 \text{ (belső pont } S\text{-ben)},$$

illetve

$$T_{i_1 \dots i_n} \cap (S \cup \operatorname{Bd} S) \neq 0$$

teljesül.
Így $j(S, P)$ és $J(S, P)$ az S halmazt, adott felosztás esetén belülről, illetve kívülről közelítő (egymáshoz csatlakozó és közös belső pont nélküli) téglák térfogatainak összegei.
Nyilván igaz, hogy: $0 \leq j(S, P) \leq J(S, P) \leq m(Q)$ (a s és S megfelelő tulajdonságai miatt).
   - A korábbiak miatt

$$\underline{\int_Q} 1_S \doteq \sup_P \{s(1_S, P)\} \doteq \sup\{j(S, P)\} \doteq m_{*J}(S),$$

illetve

$$\overline{\int_Q} 1_S \doteq \inf_P \{S(1_S, P)\} \doteq \inf\{J(S, P)\} \doteq m_J^*(S)$$

is teljesül, ahol az $m_{*J}(S)$ és $m_J^*(S)$ számokat az S halmaz ***belső*** és ***külső Jordan-mértéke***inek szokás nevezni.
Továbbá $0 \leq m_{*J}(S) \leq m_J^*(S) \leq m(Q)$ és $m_{*J}(S)$ és $m_J^*(S)$ értéke nem függ a Q tégla megválasztásától.
   - Mindezek alapján úgy is fogalmazhatunk, hogy egy $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha

$$m_{*J}(S) = m_J^*(S) \doteq m_J(S)$$

és ezt az $m_J(S)$ számot az S halmaz Jordan-mértékének nevezzük.

3. Ha Q^0 a $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla belseje, akkor Q^0 Jordan-mérhető és $m_j(Q^0) = m_J(Q)$

Bizonyítás. Ha $Q = [a_1, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ és $\forall$ (elég kicsi) $\varepsilon > 0$-ra

$$Q_\varepsilon = [a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon] \times \dots \times [a_n + \varepsilon, b_n - \varepsilon] \ ,$$

akkor
$$Q_\varepsilon \subset Q^0 \subset Q$$
teljesül, ami a korábbiak (az 1. megjegyzés, a Jordan-mérték definíciója, az integrál tulajdonságai) miatt adja, hogy
$$\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i - 2\varepsilon) = m_J(Q_\varepsilon) = \int\limits_{Q_\varepsilon} 1_{Q_\varepsilon} \leq \underline{\int}_{Q_\varepsilon} 1_{Q_\varepsilon} \leq \underline{\int}_{Q^0} 1_{Q^0} \leq$$
$$\leq \overline{\int}_{Q^0} 1_{Q^0} \leq \overline{\int}_{Q} 1_Q = \int\limits_{Q} 1_Q = m_J(Q).$$
Ebből pedig $\varepsilon \to 0$ határátmenettel jön, hogy
$$m_J(Q^0) = \underline{\int}_{Q^0} 1_{Q^0} = \overline{\int}_{Q^0} 1_{Q^0} = m_J(Q)$$
amit bizonyítani kellett. □

1. tétel. *Az $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazra $m_J(S) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\exists$ véges sok S-et lefedő zárt tégla (vagy zárt kocka), hogy Jordan-mértékük összege kisebb, mint ε.*

2. tétel. *Az $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha $m_J(\mathrm{Bd}\, S) = 0$.*

3. tétel. *Legyenek $S, S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazok.*

a) *Ha S Jordan-mérhető, akkor $m_J(S) \geq 0$.*
b) *Ha S_1 és S_2 Jordan-mérhető, $S_1 \subset S_2$, akkor $m_J(S_1) \leq m_J(S_2)$.*
c) *Ha S_1 és S_2 Jordan-mérhető, akkor $S_1 \cup S_2$ és $S_1 \cap S_2$ is az, továbbá*
$$m_J(S_1 \cup S_2) = m_J(S_1) + m_J(S_2) - m_J(S_1 \cap S_2)$$
teljesül.

Bizonyítás. A Jordan-mérték definíciója és az integrál előző fejezetbeli b), d), e) tulajdonsága adja az állítást. □

Következmény. *Ha S_1 és S_2 Jordan-mérhető, közös belső pont nélküli halmazok $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $m_J(S_1 \cap S_2) = 0$, így*
$$m_J(S_1 \cup S_2) = m_J(S_1) + m_J(S_2)\ ,$$

*melyből teljes indukcióval a **Jordan-mérték véges additivitása**, azaz*
$$m_J\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right) = \sum_{i=1}^{k} m_J(S_i)$$
is következik, ha S_i-k $(i = 1, \ldots, k)$ páronként közös belső pont nélküli halmazok.

Megjegyzések.

1. Bizonyítható, hogy a ***Jordan-mérték transzláció*** (***eltolás***) ***-invariáns***, azaz egy S Jordan-mérhető halmaz S^* eltoltjára igaz, hogy létezik $m_J(S^*) = m_J(S)$.
2. A Jordan-mérték tehát egy nemnegatív, végesen additív, mozgásinvariáns mérték, melynél az egységkocka mértéke egy.

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív, Riemann-integrálható függvény Riemann-integráljának geometriai (mértékelméleti) tartalmára mutat a következő:

4. tétel. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív, Riemann-integrálható függvény, akkor az*
$$S \doteq \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ y \in [0, f(x)]\} \subset \mathbb{R}^2$$
halmaz Jordan-mérhető és
$$m_J(S) = \int\limits_a^b f(x)dx$$
(a Riemann-integrál megadja a görbe alatti halmaz Jordan-mértékét).

Következmények.

1. A tétel feltételei mellett az f gráfja, a $\mathrm{Gr}\, f$ halmaz Jordan-mérhető és Jordan-mértéke 0.
2. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény $[a, b]$-n, akkor $\mathrm{Gr}\, f$ Jordan-mérhető és $m_J\, \mathrm{Gr}\, f = 0$.

2. definíció. Legyen $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt és mérhető halmaz, $\Phi, \Psi : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, hogy $\Phi(x) \leq \Psi(x)$ $(x \in K)$. Az
$$S = \{(x, y) \mid x \in K,\ \Phi(x) \leq y \leq \Psi(x)\}$$
halmazt ***egyszerű tartomány***nak nevezzük $\mathbb{R}^n$-ben.

Bizonyítható a következő:

5. tétel. *Az $S \subset \mathbb{R}^n$ egyszerű tartomány kompakt és Jordan-mérhető $\mathbb{R}^n$-ben.*

6. tétel (a Fubini tétel egyszerű tartományra). *Legyen S egyszerű tartomány, $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f integrálható S-en és*

(F)
$$\int_S f = \int_{x\in K} \left[\int_{y=\Phi(x)}^{y=\Psi(x)} f(x,y) \right] .$$

Példa. Számítsa ki a $\iint_S (x^2+y)dxdy$ integrált, ha

$$S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}.$$

$K = [0,1] \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz $\Phi(x) = x^2$, $\Psi(x) = \sqrt{x}$ $(x \in [0,1])$ folytonos függvények, hogy $\Phi(x) \le \Psi(x)$ $(x \in [0,1])$ is teljesül, így a 2. definíció szerint S egyszerű tartomány $\mathbb{R}^2$-ben.
$f(x,y) = x^2 + y$ $((x,y) \in S)$ folytonos függvény, így tételünk szerint f integrálható S-en és (alkalmazva a Newton-Leibniz formulát is)

$$\iint_S (x^2+y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)dy \right] dx = \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx =$$
$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}x^4 \right) dx = \left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{33}{140} .$$

4. Integráltranszformáció

Az egyváltozós függvények Riemann-integráljánál ismert a helyettesítéses integrálás tétele, mely a következő módon is fogalmazható:

Legyen $g : [a,b] \to [c,d]$ folytonosan differenciálható függvény, hogy $c = g(a)$, $d = g(b)$, $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

(1)
$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

Ha g szigorúan monoton $[a,b]$-n (azaz a fentieken túl az is teljesül, hogy $g'(x) \ne 0$, $x \in [a,b]$), úgy $a = g^{-1}(c)$ és $b = g^{-1}(d)$ (ha g növekvő), vagy $a = g^{-1}(d)$ és $b = g^{-1}(c)$ (ha g csökkenő) teljesül. Így (1) a

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(t))g'(t)dt ,$$

vagy

$$\int_c^d f(x)dx = -\int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(t))g'(t)dt ,$$

illetve együttesen a

$$\int_c^d f(x)dx = \int_a^b f(g(t))|g'(t)|dt$$

alakba írható (és ekkor g lehet növekvő vagy csökkenő is).

Cél: A tétel általánosítása, amikor f n-változós valós értékű függvény, g pedig $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ típusú transzformáció, elég jó tulajdonságokkal.

Kérdések:

a) milyen g függvényt kell helyettesíteni a „régi” változó helyére, azaz milyen g transzformációval vezessünk be új változókat,

b) az intervallumok helyett milyen részhalmazait tekinthetjük $\mathbb{R}^n$-nek,

c) s végül, hogy $f(g(x))$-et, $|g'(x)|$ helyett, mivel kell szorozni?

A korábbiaknál sokkal nehezebb és hosszadalmasabb az előbbi „kívánalmaknak” megfelelő következő általánosítás bizonyítása.

Tétel (integráltranszformáció).
Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $g : G \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható, hogy $\det g'(x) \ne 0$ $(x \in G)$ (azaz reguláris) és kölcsönösen egyértelmű leképezés. Ha $E \subset G$ összefüggő, mérhető és kompakt halmaz, míg $f : g(E) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor az $(f \circ g)|\det g'|$ függvény Riemann-integrálható az E halmazon és

(I–T)
$$\int_E (f \circ g)|\det g'| = \int_{g(E)} f .$$

Megjegyzések.

1. (I–T) írható a

(I–T*) $$\int\limits_{g(E)} f(x)dx = \int\limits_{E} f(g(t))|\det g'(t)|dt$$

(ahol $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$), vagy $A = g(E)$ mellett (ahol az előző paragrafus 9. tétele és annak következménye miatt $A = g(E)$ mérhető, kompakt és összefüggő is)

(I–T**) $$\int\limits_{A} f(x)dx = \int\limits_{g^{-1}(A)} f(g(t))|\det g'(t)|dt$$

alakba is.

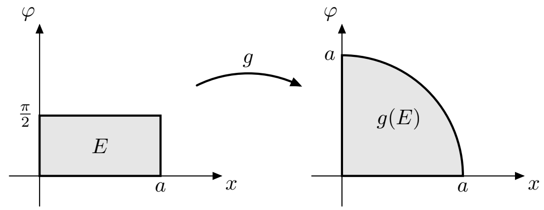
2. A tétel akkor is igaz, ha csak f Riemann-integrálhatóságát tesszük fel. Illetve e mellett csak E kompaktságát és mérhetőségét követeljük meg.
3. Igaz az integráltranszformáció tételének következő alakja is: Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $g : G \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható G-n, E olyan Jordan-mérhető halmaz, hogy $E \subset \bar{E} \subset G$ és $g|_{E^0}$ injektív. Ha $f : g(E) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor $\exists \int\limits_E (f \circ g)|\det g'|$ és (I–T) teljesül.
4. Ha $f = 1$ (és g-re az eredeti, vagy a módosított feltételek teljesülnek), akkor
$$m_J g(E) = \int\limits_E |\det g'|\ .$$
5. Utóbbiak adják a Jordan-mérték transzláció (illetve mozgás) invarianciáját.
6. A tétel adja, hogy ha $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, $\det g' \neq 0$ és $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt és mérhető halmaz, akkor $g(E)$ szintén kompakt és mérhető, továbbá
$$m_J g(E) = |\det g'| m_J E\ .$$
7. Az integráltranszformáció (ahogy valósban is) az adott integrál kiszámításának egy eszköze (módszere), melynek révén esetleg „jobb” függvényt kell integrálni „alkalmasabb” $g^{-1}(A) = E$ tartományon.

Általános útmutatás nincs arra, hogy mikor milyen helyettesítést kell alkalmazni, de (az egyváltozós esethez hasonlóan) tudunk „tippeket” adni.

Példák.

1. Legyen $A = g(E) = \{(x, y \,|\, x, y > 0,\ x^2 + y^2 < a^2)\}$. Számítsuk ki a $\iint\limits_A x^2y^2dxdy$ integrált.

Megoldás: Válasszuk g-t a
$$g(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
polár-transzformációnak.
$$\det g' = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$
Továbbá g az $E = \{(r, \varphi) \,|\, 0 < r < a,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$ nyílt téglalapot képezi az A halmazba kölcsönösen egyértelmű módon és $\det g' = r > 0$ is teljesül E-n.



Így (a Fubini-tételt is felhasználva)
$$\iint\limits_A x^2y^2dxdy = \iint\limits_E (r\cos\varphi)^2(r\sin\varphi)^2 \cdot r\,drd\varphi =$$
$$= \iint\limits_{[0,a]\times[0,\frac{\pi}{2}]} r^3(\cos\varphi\cdot\sin\varphi)^2drd\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int\limits_0^a r^3\frac{\sin^2 2\varphi}{4}dr\right]d\varphi\ .$$

Az utóbbi integrálás pedig már nem túl nehéz. Itt egy körcikk alakú tartomány helyett egy téglalapon kell integrálni és a függvény sem bonyolódott el tulságosan.

2. Számítsuk ki a $\iint\limits_A \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ integrált, ha

$$A = g(E) = \{(x,y)\,|\,\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}\ .$$

Megoldás: Alkalmazzuk most is a $g(r,\varphi) = (r\sin\varphi, r\sin\varphi)$ polár-transzformációt. Ez most az

$$E = \{(r,\varphi)\,|\,\pi \le r \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

zárt téglalapot képezi az A halmazba, $\det g' = r > 0$ és „majdnem" kölcsönösen egyértelmű módon (hol a „baj"?), de akkor is igaz, hogy

$$\iint\limits_S \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_E (\sin r)\cdot r\,drd\varphi =$$

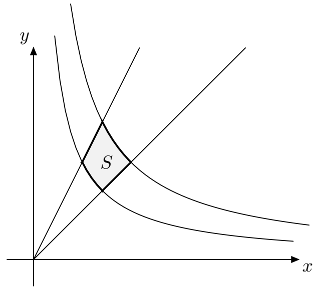
$$= \iint\limits_{[\pi,2\pi]\times[0,2\pi]} r\sin r\,drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_\pi^{2\pi} r\sin r\,dr\right)d\varphi$$

és ez utóbbi integrál „módszeresen" számítható.
Most egy körgyűrű alakú tartomány helyett jött az egyszerűbb téglalap és a függvény is kedvezőbb lett számunkra.
Megjegyzés: Ha az eredeti tartomány körgyűrűcikk, akkor gondolhatunk a polár-transzformációra.

3. Számítsa ki az

$$xy = a^2\ ,\quad xy = 2a^2\ ,\quad y = x\ ,\quad y = 2x \qquad (x,y>0)$$

görbékkel határolt tartomány Jordan-mértékét.
Megoldás: Az adott S tartomány most:



A tanultak szerint $m_J(S) = \iint\limits_S 1dydy$, ha az $\int\limits_S 1$ létezik. A határoló görbék egyenletei azt „sugallják", hogy olyan g transzformáció kell,

melynek inverzét az

$$(*) \qquad t = xy\ ,\qquad s = \frac{y}{x} \qquad (x,y>0)$$

szerint $g^{-1}(x,y) = (xy, \frac{y}{x})$ $(x,y>0)$ adja. g-t a $(*)$ egyenletrendszer egyértelmű

$$x = \sqrt{\frac{t}{s}}\ ,\qquad y = \sqrt{ts} \qquad (t,s>0)$$

megoldása miatt pedig a

$$g(t,s) = \left(\sqrt{\frac{t}{s}}, \sqrt{ts}\right) \qquad (t,s>0)$$

transzformáció adja.
Könnyen ellenőrízhető, hogy ez az

$$E = \{(t,s)\,|\,a^2 \le t \le 2a^2,\ 1 \le s \le 2\}$$

téglalapot képezi S-re kölcsönösen egyértelmű módon és

$$\det g'(t,s) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{ts}} & -\dfrac{\sqrt{t}}{2\sqrt{s^3}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{s}{t}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{t}{s}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2s} > 0$$

teljesül E-n. Így

$$m_J(S) = \iint\limits_S 1\,dxdy = \iint\limits_E 1\cdot\frac{1}{2s}\,dtds =$$

$$\int\limits_{a^2}^{2a^2}\left(\int\limits_1^2 \tfrac{1}{2s}ds\right)dt = \int\limits_{a^2}^{2a^2} \ln\sqrt{2}\,dt = a^2\ln\sqrt{2}\ .$$

4. Legyen $S = \{(x,y,z)\,|\,x,y>0,\ x^2+y^2+z^2<a^2\}$. Számítsuk ki a

$$\iiint\limits_S x^2z\,dxdydz$$

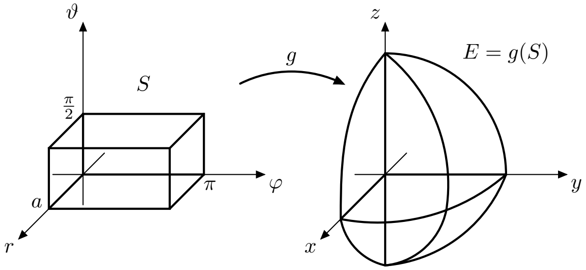
integrált.
Megoldás: Alkalmazzuk a

$$g(r,\varphi,\vartheta) \doteq (r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\varphi)$$

térbeli polár transzformációt. Most $\det g' = r^2 \sin\varphi > 0$ (ahogy ezt már számoltuk).
g (ahogy ez könnyen belátható) az

$$E = \{(r,\varphi,\vartheta) \,|\, 0 < r < a,\ 0 < \varphi < \pi,\ 0 < \vartheta < \pi/2\}$$

halmazt kölcsönösen egyértelmű módon képezi le S-re.



Így

$$\iiint\limits_S x^2 z\, dxdydz = \iiint\limits_E (r\sin\varphi\cos\vartheta)^2 (r\cos\varphi)^2 r^2 \sin\varphi\, drd\varphi d\vartheta =$$

$$= \iiint\limits_{(0,a)\times(0,\pi)\times(0,\frac{\pi}{2})} r^6 \sin^3\varphi \cos^2\varphi \cos^2\vartheta\, drd\varphi d\vartheta\ ,$$

ami a Fubini-tétellel számítható.

VIII. fejezet

Differenciálegyenletek

Bevezetés

Legyen adott az egyenesen mozgó pont v sebességfüggvénye, mely folytonos. A t_0 időpillanatban tartózkodjon a pont az S_0 helyen. Határozzuk meg a pont S útfüggvényét!

Megoldás: A sebesség definíciójából következik az

$$S'(t) = v(t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

egyenlet, ahol S az ismeretlen, v az ismert függvény.
Az egyenletben S' szerepel (ez nehézséget jelent), de (1) azt mutatja, hogy S primitív függvénye v-nek (ez viszont jó), így

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + C \tag{$*$}$$

teljesül. Ugyanakkor a feladat szerint $S(t_0) = S_0$ is teljesül, így a probléma az

$$S'(t) = v(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad S(t_0) = S_0 \tag{2}$$

alakban fogalmazható meg, azaz (1)-et az $S(t_0) = S_0$ feltétel mellett kell megoldani, ami $(*)$ miatt adja, hogy $C = S_0$, így az

$$S(t) = S_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau \qquad (t \in \mathbb{R})$$

szerint adott a feladat megoldása.

Mennyi ideig emelkedik egy $v_0 = 100\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sec}}$ kezdősebességgel függőlegesen felfelé lőtt rakéta?

Megoldás: Fizikából ismeretes, hogy a rakéta v sebességfüggvénye és deriváltja kielégíti a

$$v'(t) = -g - k\,v^2(t) \tag{3}$$

egyenletet. Ennek a megoldását kell keresni a $v(0) = 100$ feltétel mellett és meg kell határozni azt a T időpillanatot, amikor $v(T) = 0$.
A feladat tehát

$$v'(t) = -g - k\,v^2(t), \qquad v(0) = 100, \quad v(T) = 0 \tag{4}$$

megoldása. Látható, hogy itt a keresett v függvény és a v' deriváltfüggvénye is szerepel. A megoldás most nem nagyon „látszik”.

Az (1) és (3), illetve (2) és (4) általánosítása elvezet a differenciálegyenlet, illetve Cauchy-feladat fogalmához.

1. A differenciálegyenlet fogalma

Jelöljön y a továbbiakban egy keresett függvényt, $y(x)$ ennek a helyettesítési értékét x-ben. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adott, ekkor a

$$y' = f(x, y) \qquad \big(\text{illetve } y'(x) = f(x, y(x))\big) \tag{1.1}$$

egyenlet ***elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet***nek szokás nevezni.

Általánosabban:

1. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény (ahol D általában egy nyílt halmaz vagy tartomány). Az

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) \tag{1.2}$$

egyenletet ***n-edrendű közönséges explicit differenciálegyenlet***nek nevezzük, ennek speciális esete $n = 1$-re a (1.1) elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet.

Az $y : I \to \mathbb{R}$ (ahol $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, mely lehet nyílt, zárt, félig nyílt, egy félegyenes vagy a számegyenes is) függvény ***megoldása*** (1.2)-nek I-n, ha

1) y n-szer differenciálható,
2) $\big(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big) \in D, \quad \forall\, x \in I,$
3) $y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big), \quad \forall\, x \in I$ teljesül.

További általánosítás:

2. definíció. Legyen $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvény. A

$$F\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{1.3}$$

egyenletet ***közönséges n-edrendű differenciálegyenlet***nek nevezzük.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény ***megoldása*** a (1.3) differenciálegyenletnek az I intervallumon, ha

1) y n-szer differenciálható,
2) $\big(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) \in D, \quad \forall\, x \in I,$
3) $F\big(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0 \quad \forall\, x \in I$

teljesül.

Megjegyzés. Ha (1.2), illetve (1.3)-ban f, illetve F az $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, illetve $y, y', \dots, y^{(n)}$ változóinak lineáris függvénye, akkor a (1.2), illetve (1.3) ***lineáris differenciálegyenlet***, egyébként ***nemlineáris***.

Példák.

1. Az $y' = 2xy^2 - 5$ differenciálegyenlet, melynél $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2xy^2 - 5$, egy elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet. f nem lineáris függvénye y-nak, így az egyenlet nemlineáris.
2. Az $y'' + 3y' - 4y - \sin(x) = 0$ differenciálegyenlet, ahol $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, y', y'') = y'' + 3y' - 4y - \sin(x)$, másodrendű közönséges implicit differenciálegyenlet. F lineáris függvénye y, y', y''-nek, így az egyenlet lineáris.
3. Az $y' = -\frac{y}{x}$ elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet, $f(x, y) = -\frac{y}{x}$, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ahol $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ nyílt halmaz (az $x = 0$ egyenestől megfosztott sík).
   Az $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $y = \frac{c_1}{x}$ függvény bármely $c_1 \in \mathbb{R}$-re a $]0, +\infty[$-en, míg az $y :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$, $y = \frac{c_2}{x}$ függvény bármely $c_2 \in \mathbb{R}$-re a $]-\infty, 0[$ intervallumon megoldása a differenciálegyenletnek.
   Ez egy olyan görbesereg, melynek egyik görbéje sem metszi az y-tengelyt.
   Később belátjuk, hogy így az összes megoldást megadtuk.

3. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f = (f_1, \dots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. A

$$y' = (y_1', \dots, y_n') = f(x, y) = f(x, y_1, \dots, y_n) \tag{1.4}$$

egyenletrendszert, amely az

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{1.4'}$$

alakba is írható, ***elsőrendű közönséges*** (n ismeretlen függvényt tartalmazó) ***explicit differenciálegyenlet-rendszer***nek nevezzük.
Az $y = (y_1, \dots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ függvény (függvényrendszer) a (1.4) (illetve (1.4′)) ***differenciálegyenlet-rendszer megoldása*** I-n, ha

1) y (illetve az y_i-k) differenciálható(k),
2) $\big(x, y(x)\big) = \big(x, y_1(x), \dots, y_n(x)\big) \in D \quad \forall\, x \in I,$
3) $y'(x) = f(x, y(x))$ (illetve $y_i'(x) = f_i\big(x, y_1(x), \dots, y_n(x)\big)$ $i = 1, \dots, n$) $\forall\, x \in I$

teljesül.

2. Kezdeti érték probléma vagy Cauchy-feladat

1. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in D$ rögzített. A

(2.1)
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

problémát egy ***n-edrendű explicit közönséges differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték problémá***nak vagy ***Cauchy-feladat***nak nevezzük (ez $n = 1$-re $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ alakú).
Az $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$ $(i = 0, \dots, n-1)$ kikötéseket kezdeti feltételeknek nevezzük.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldása (2.1) (n-KÉP)-nek, ha

1) y n-szer differenciálható,
2) $\big(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big) \in D \quad \forall\, x \in I,$

3) $y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big) \quad \forall\, x \in I$,
4) $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1)$

teljesül.

Megjegyzés. Hasonló a helyzet a nem explicit esetben is, $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ függvénnyel.

Példa. Az $y' = -\frac{y}{x}$, $y(1) = 1$ egy elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladat (kezdeti érték probléma). Az $y' = -\frac{y}{x}$ differenciálegyenletnek az $y(x) = \frac{c}{x}$ $(x > 0)$ függvény megoldása, melyre $y(1) = 1$, ami adja, hogy $c = 1$ (hiszen $1 = y(1) = \frac{c}{1} = c$). $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ valóban megoldása a feladatunknak $]0, +\infty[$-en. Később megmutatjuk, hogy más megoldás nincs. A megoldás tehát az előbbi 3. feladat megoldását leíró görbesereg azon görbéje, mely áthalad az $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ ponton.

2. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f = (f_1, \dots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $(x_0, y_0) = (x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in D$ adott pont. A

$$(2.2) \qquad y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (y = (y_1, \dots, y_n))$$

problémát egy ***differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdeti érték problémá***nak vagy ***Cauchy-feladat***nak nevezzük.
Az $y = (y_1, \dots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ függvény megoldása a (2.2) (DER-KÉP)-nek, ha

1) y differenciálható,
2) $\big(x, y(x)\big) = \big(x, y_1(x), \dots, y_n(x)\big) \in D \quad \forall\, x \in I$,
3) $y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \quad \forall\, x \in I$,
4) $y(x_0) = y_0$

teljesül.

Tétel (átviteli elv). *Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $(x_0, y_{01} \dots, y_{0n}) = (x_0, y_0) \in D$ rögzített.*

Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása a (2.1) (n-KÉP)-nek I-n, ha az $\big(y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)$ vektorfüggvény (függvény n-es) megoldása a

$$(*) \quad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ \quad\vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \qquad y_i(x_0) = y_{0i} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

(DER-KÉP)-nek I-n.

Megjegyzés. Az átviteli elv lehetővé teszi, hogy (n-KÉP) feladatok megoldhatóságát (DER-KÉP) megoldhatóságára vezessük vissza.

3. Elemi úton megoldható differenciálegyenlet-típusok

a) Szeparábilis differenciálegyenletek

Definíció. Legyenek $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ $(g \neq 0)$ adott folytonos függvények. Az

$$(\mathrm{SZ}) \qquad y' = f(x)g(y)$$

differenciálegyenletet ***szeparábilis*** (szétválasztható változójú) ***differenciálegyenlet***nek nevezzük.

1. tétel. *Az $y : [a, b] \to [c, d]$ differenciálható függvény akkor és csak akkor megoldása (SZ)-nek, ha*

$$(\mathit{SZMo}) \qquad \left(\left(\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)} dt \right) \circ y \right)(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

$\big(x, x_0 \in [a, b];\ y, y_0 \in [c, d]\big)$ *teljesül.*

Bizonyítás. f és $1/g$ folytonosak, így az

$$F(x) \doteq \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C_1 \qquad \big(x, x_0 \in [a,b]\big),$$

$$G(y) \doteq \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}dt + C_2 \qquad \big(y, y_0 \in [c,d]\big)$$

szerint definiált $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $G : [c,d] \to \mathbb{R}$ függvényekre $F' = f$, $G' = 1/g$ teljesül.

a) Ha y teljesíti (SZMo)-t, akkor

$$G\big(y(x)\big) = F(x) + C_2 - C_1 \qquad \big(x \in [a,b]\big),$$

ami y, F, G differenciálhatósága miatt adja, hogy

$$G'\big(y(x)\big) \cdot y'(x) = F'(x) \qquad \big(x \in [a,b]\big),$$

azaz

$$y'(x) = f(x)g\big(y(x)\big) \qquad \big(x \in [a,b]\big)$$

teljesül, tehát y megoldása (SZ)-nek.

b) Ha y megoldása (SZ)-nek, akkor

$$f(x) = \frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)} \qquad (x \in [a,b])$$

és a helyettesítéses integrálás tétele miatt $\forall\ x, x_0 \in [a,b]$ esetén

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g\big(y(t)\big)}dt = \left(\left(\int_{y_0=y(x_0)}^{y} \frac{1}{g(t)}dt\right) \circ y\right)(x)$$

következik, azaz (SZMo) teljesül. □

Megjegyzések.

1. A tétel szerint $y(x_0) = y_0$ is teljesül, így az $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdeti érték probléma megoldását kaptuk meg.
2. A következő formális módszert gyakran használják:

$$(\mathsf{SZ}) \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \quad (*),$$

amiből kapjuk (SZ) megoldását.
Az (x_0, y_0) ponton áthaladó megoldáshoz úgy kell megválasztani az integrációs konstansokat, hogy a $(*)$ egyenlőség teljesüljön $x = x_0$, $y = y_0$ mellett. Ez teljesül, ha

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt\ ,$$

ami adja, hogy y teljesíti (SZMo)-t.

3. Vizsgálható olyan eset is, amikor valamilyen $y_0 \in [c,d]$-re $g(y_0) = 0$ (ekkor $y(x) = y_0$ nyilván megoldás, de lehetnek más megoldások is).
4. (SZ) tekinthető $f :]a,b[\to]c,d[$ típusú függvényekkel is, tételünk és a megjegyzéseink ekkor is érvényesek.

Példák.

1. Az $y' = 2xy$ differenciálegyenlet szeparábilis, $f(x) = 2x$ $(x \in \mathbb{R})$, $g(y) = y$ $(y \in \mathbb{R})$.
$y = 0$ nyilván megoldás $\mathbb{R}$-en (hiszen ekkor $y' = 0$ miatt teljesül az egyenlet $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén).
Ha $y \neq 0$, úgy tekintsük az $y > 0$ és az $y < 0$ eseteket.
$y > 0$ esetén, tételünk szerint $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ akkor és csak akkor megoldása egyenletünknek, ha

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{y}\,dy = \int_{x_0}^{x} 2x\,dx \qquad (\forall\ x, x_0 \in \mathbb{R};\ y, y_0 \in \mathbb{R}_+),$$

azaz

$$\ln\frac{y}{y_0} = x^2 - x_0^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y = y_0\,e^{-x_0^2}\,e^{x^2}\ ,$$

ami adja az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ponton áthaladó megoldást.
Mivel bármely $c \in \mathbb{R}_+$-hoz létezik x_0, y_0, hogy $c = y_0\,e^{-x_0^2}$, így kapjuk, hogy $y = c\,e^{x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ megoldás bármely $c \in \mathbb{R}_+$-ra $\mathbb{R}$-en.
$y < 0$ esetén a megoldás $y = y_0\,e^{-x_0^2}x^2$ $(x, x_0 \in \mathbb{R};\ y, y_0 \in \mathbb{R}_-)$, illetve $y = c\,e^{x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ alakú $c < 0$ mellett.
Így az egyenlet minden megoldása $y = c\,e^{x^2}$ alakú $\mathbb{R}$-en.
2. Az $y' = -\frac{y}{x}$ differenciálegyenlet szeparábilis $f(x) = -\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ $g(y) = y$ $(y \in \mathbb{R})$ mellett. $y = 0$ nyilván megoldás $\mathbb{R}_+$-on és $\mathbb{R}_-$-on.

Tételünk (illetve a 2. megjegyzés) adja, hogy y akkor és csak akkor megoldása a differenciálegyenletnek, ha

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx \iff y = \frac{c_1}{x} \quad (x > 0), \quad y = \frac{c_2}{x} \quad (x < 0),$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Változóban homogén differenciálegyenletek

2. tétel. *Legyen $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvény, $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $0 \notin [a, b]$ és létezik y' $[a, b]$-n és $y(x)/x \in [c, d]$.*
y akkor és csak akkor megoldása $[a, b]$-n a

$$(\mathsf{VH}) \qquad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

***változóban homogén differenciálegyenlet**nek, ha az*

$$u : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad u(x) \doteq \frac{y(x)}{x}$$

függvény megoldása $[a, b]$-n az

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

szeparábilis differenciálegyenletnek.

Bizonyítás. Nyilvánvaló. □

Megjegyzés. $[a, b]$ és $[c, d]$ helyett nyílt intervallumokat is tekinthetünk.

Példa. Határozzuk meg az

$$y' = \frac{y^3 - x^3}{xy^2}, \qquad y(1) = 1$$

kezdeti érték probléma megoldását.

$$\frac{y^3 - x^3}{xy^2} = \frac{y}{x} - \left(\frac{x}{y}\right)^2 \qquad (x, y \neq 0)$$

miatt ez ekvivalens az

$$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{x}{y}\right)^2, \qquad y(1) = 1$$

kezdeti érték problémával, ahol a differenciálegyenlet jobboldala $\frac{y}{x}$ függvénye, így az változóban homogén. Az $y(1) = 1$ miatt feltehetjük, hogy $x, y > 0$, azaz $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ típusú megoldást keresünk és $]c, d[=]0, +\infty[$.
Tételünk szerint y akkor és csak akkor megoldása a differenciálegyenletnek $]0, +\infty[$-en, ha az $u :]0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ függvény megoldása az

$$u' = -\frac{1}{x}\frac{1}{u^2}$$

szeparábilis differenciálegyenletnek $]0, +\infty[$-en.
$y(1) = 1$ és $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ adja, hogy $u(1) = 1$.
Az a) rész szerint u akkor és csak akkor megoldása az

$$u' = -\frac{1}{x}\frac{1}{u^2}, \qquad u(1) = 1$$

kezdeti érték problémának, ha

$$\int_1^u u^2\,du = -\int_1^x \frac{1}{x}\,dx ,$$

azaz

$$\frac{u^3 - 1}{3} = -\ln x ,$$

tehát $u = \sqrt[3]{1 - \ln x^3}$ és ezért $y = x\sqrt[3]{1 - \ln x^3}$, ha $x \in]0, \sqrt[3]{e}[$.

c) Az $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$ differenciálegyenlet

- Ha $c = \gamma = 0$, akkor a címben egy (VH) típusú egyenlet szerepel, mondjuk $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú adott folytonos függvény esetén.
- Ha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a\beta - b\alpha = 0,$$

azaz ha $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \lambda$, illetve $a = \lambda\alpha$, $b = \lambda\beta$, akkor a címben szereplő egyenlet átmegy az

$$y' = g(\alpha x + \beta y + \gamma)$$

alakba, melyet az

$$u(x) = \alpha x + \beta y(x) + \gamma$$

helyettesítéssel az

$$u' = \alpha + \beta y' = \alpha + \beta g(u)$$

alakba írhatunk, ami egy speciális (SZ) egyenlet.

– Ha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0 \, ,$$

akkor az

$$ax + by + c = 0$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

lineáris egyenletrendszernek pontosan egy ξ, η megoldása van. Ekkor belátható (igen egyszerűen), hogy az

$$y : H \to \mathbb{R} \qquad (\xi \notin H,\ x \in H \ \Rightarrow\ \alpha x + \beta y + \gamma \neq 0)$$

függvény akkor és csakis akkor megoldása H-n az általános differenciálegyenletnek, ha a

$$\psi : H^* \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = y(t + \xi) - \eta \qquad \big(H^* = \{t \mid t + \xi \in H\}\big)$$

függvény megoldása az

$$\psi'(x) = F\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)$$

differenciálegyenletnek, ahol

$$F(z) = f\left(\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}\right) \, .$$

d) Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció. Legyenek $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények, $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható ismeretlen függvény. A

(LIH) $$y' = f(x)y + g(x)$$

differenciálegyenletet ***elsőrendű lineáris inhomogén***, míg az

(LH) $$y' = f(x)y$$

differenciálegyenletet ***elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenlet***nek nevezzük.

3. tétel. *Az $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása (LIH)-nek, ha $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy*

(*LIHMo*) $$y(x) = c y_H(x) + y_P(x) \qquad (x \in [a, b]),$$

*ahol $y_H : [a, b] \to \mathbb{R}$ az (LH) differenciálegyenlet sehol el nem tűnő, $y_P : [a, b] \to \mathbb{R}$ pedig (LIH) egy (**partikuláris**) **megoldása**. Továbbá, ha $x_0 \in [a, b]$ rögzített, akkor $\forall\, x \in [a, b]$ esetén*

(*H*) $$y_H(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right),$$

(*P*) $$y_P(x) = \left[\exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right)\right] \cdot \int_{x_0}^{x} g(\tau) \exp\left(-\int_{x_0}^{\tau} f(t)dt\right) d\tau \, .$$

Megjegyzések.

1. $]a, b[$ is választható.
2. $$y = c \cdot y_H(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\right) \qquad (x, x_0 \in [a, b])$$
   nyilván az (LH) általános megoldása, mely szeparábilis differenciálegyenlet.
3. (P)-t nem fontos megjegyezni, azt a ***konstansvariálás*** alábbi ***módszeré***vel minden feladatban megkapjuk:
   Keressük y_P-t (ha az (LH) megoldását már ismerjük) az

   (∗) $$y_P(x) = c(x) \exp\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\right] \qquad (x, x_0 \in [a, b])$$

   alakban. Ekkor

   $$y_P'(x) = c'(x) \exp\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\right] + c(x) f(x) \exp\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\right]$$

y_P és y'_P alakját (LIH)-be behelyettesítve, rendezés után azt kapjuk, hogy a $(*)$ alakú y_P megoldása (LIH)-nek, ha

$$c'(x) = g(x) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right] \qquad (x, x_0 \in [a,b])$$

azaz, ha

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} g(\tau) \exp\left[-\int_{x_0}^{\tau} f(t)\,d\tau\right],$$

melyet $(*)$-ba behelyettesítve kapjuk (P)-t.

4. Használhatunk határozatlan integrált is.

Példa. Az $y' = -y\sin x + \sin^3 x$ lineáris differenciálegyenletnél a homogén egyenlet

$$y' = -y\sin x\ ,$$

melynek általános megoldása $y = c\,e^{\cos x}$ $(x \in \mathbb{R})$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.
Keressük y_P-t (az inhomogén egyenlet egy megoldását) az

$$y_P(x) = c(x)\,e^{\cos x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban, ekkor

$$y'_P(x) = c'(x)\,e^{\cos x} - c(x)\sin x\,e^{\cos x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

melyet az eredeti egyenletbe helyettesítve (rendezés után)

$$c'(x) = \sin^3 x\,e^{-\cos x}\ ,$$

illetve

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \sin^3 x\,e^{-\cos x}dx = \int \sin^2 x\ \sin x\,e^{-\cos x}dx = \\ &= \sin^2 x\,e^{-\cos x} - 2\int \cos x \sin x\,e^{-\cos x}dx = \\ &= \sin^2 x\,e^{-\cos x} - 2\left[\cos x\,e^{-\cos x} + \int \sin x\,e^{-\cos x}dx\right] = \\ &= \left[\sin^2 x - 2\cos x + 2\right]e^{-\cos x} \end{aligned}$$

következik, mely adja, hogy

$$y_P(x) = \sin^2 x - 2\cos x + 2\ ,$$

ezért

$$y = \sin^2(x) - 2\cos(x) + 2 + c\,e^{\cos x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

e) Egzakt differenciálegyenletek

Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $P, Q : D \to \mathbb{R}$ adott függvények. Az

$$\text{(E)} \qquad P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

egyenletet ***egzakt***nak nevezzük, ha az $f = (P,Q) : D \to \mathbb{R}^2$ függvénynek létezik primitív függvénye, azaz létezik $F : D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy

$$F'(x,y) = f(x,y),$$

azaz

$$D_1F(x,y) = P(x,y) \quad \text{és} \quad D_2F(x,y) = Q(x,y)$$

teljesül.

Megjegyzés. (E)-t szokás az

$$\text{(E}'\text{)} \qquad P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

alakban is írni.

4. tétel. *Az (E) egzakt differenciálegyenletnek az $y : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény (melyre $(x, y(x)) \in D$, ha $x \in I$) akkor és csak akkor megoldása I-n, ha létezik $C \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\text{(EMo)} \qquad F(x, y(x)) = C \qquad (x \in I),$$

ahol F az $f = (P,Q)$ függvény primitív függvénye.

Bizonyítás.

a) Legyen y (EMo) alakú, akkor az összetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$D_1F(x,y(x)) + D_2F(x,y(x))y'(x) = 0 \qquad (x \in I)$$

következik, ami $D_1F = P$ és $D_2F = Q$-val adja, hogy y megoldása (E)-nek.

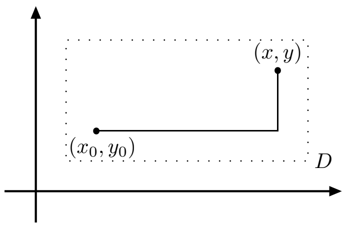
b) Ha y teljesíti (E)-t I-n és (E) egzakt, akkor

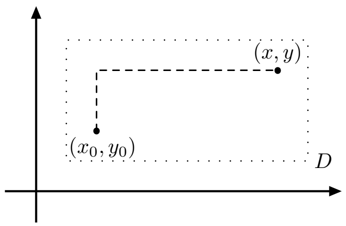
$$0 = D_1F(x, y(x)) + D_2F(x, y(x))y' = \frac{d}{dx}F(x, y(x)) \qquad (x \in I)$$

teljesül, ami adja (EMo)-t. □

Megjegyzések.

1. Ha $f = (P, Q) : D \to \mathbb{R}^2$ olyan, hogy D úgynevezett csillagszerű tartomány, f folytonosan differenciálható (azaz P és Q is), továbbá $D_2P(x, y) = D_1Q(x, y)$ $((x, y) \in D)$ (másképpen $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$ $((x, y) \in D)$), akkor létezik $f = (P, Q)$-nak primitív függvénye. Ha (x_0, y_0) egy csillagközéppont és $g : [a, b] \to D$ olyan szakaszonként sima görbe, mely az (x_0, y_0)-t (x, y)-nal köti össze, akkor ez a primitív függvény az
$$F(x, y) = \int_g f = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} f$$
integrálfüggvény.
2. Az 1. megjegyzés feltételein túl teljesüljön, hogy $g(t) \doteq (x(t), y(t))$ folytonosan differenciálható ($g(a) = (x_0, y_0)$, $g(b) = (x, y)$), akkor a görbementi integrál kiszámítására vonatkozó ismert tétel alapján, ha $\exists\ g^{-1}$, úgy
$$F(x, y) = \int_a^{g^{-1}(x,y)} P(x(t), y(t))x'(t)dt + \int_a^{g^{-1}(x,y)} Q(x(t), y(t))y'(t)dt\ .$$
3. Ha D téglalap vagy körlap, akkor bármely rögzített (x_0, y_0)-ból bármely $(x, y) \in D$ elérhető a tengelyekkel párhuzamos töröttvonal mentén, például:





A folytonos vonalra:
$$g(t) = g^1(t) \cup g^2(t) = (x^1(t), y^1(t)) \cup (x^2(t), y^2(t))\ ,$$
ahol
$$\begin{cases} x^1(t) = t \\ y^1(t) = y_0 \end{cases} \quad t \in [x_0, x], \qquad \begin{cases} x^2(t) = x \\ y^2(t) = t \end{cases} \quad t \in [y_0, y],$$
így
$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)dt\ .$$
A szaggatott vonalra (hasonlóan):
$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)dt\ .$$
4. $F(x, y)$ utóbbi két alakjában szokás az első integrálban $t \to x$, a másodikban $t \to y$ használata is, így
$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy\ ,$$
illetve
$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy\ .$$
5. Az (E) egzakt egyenlet (x_0, y_0)-on áthaladó megoldását $C = 0$ mellett kapjuk.
6. Az $y' = f(x)g(y)$ $(g \neq 0)$ szeparábilis egyenlet egzakt differenciálegyenlet.

Példa. A
$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$$
differenciálegyenletnél belátható, hogy a
$$P(x, y) = 2x + 3x^2y\ , \qquad Q(x, y) = x^3 - 3y^2 \qquad ((x, y) \in D = \mathbb{R}^2)$$
függvények folytonosan differenciálhatók a $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (végtelen) téglalapon (ez csillagszerű tartomány) és
$$P_y(x, y) = 3x^2 = Q_x(x, y) \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért az első megjegyzés miatt a differenciálegyenlet egzakt és a 4. megjegyzést $(x_0, y_0) = (0,0) \in D = \mathbb{R}^2$ mellett alkalmazva

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} (2x + 3x^2 y_0)dx + \int_{y_0}^{y} (x^3 - 3y^2)dy =$$

$$= \int_0^x 2x\,dx + \int_0^y (x^3 - 3y^2)dy = x^2 + x^3 - y^3 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

primitív függvénye (P,Q)-nak és így tételünk szerint az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása a differenciálegyenletnek, ha létezik $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$x^2 + x^3 y - y^3 = C \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ez egy görbesereg, illetve egyenletünk implicit módon tartalmazza az $y : I \to \mathbb{R}$ megoldásfüggvényt, ami megoldásával (y-ra) meghatározható.

F a következő módon is meghatározható:

F primitív függvénye az $f = (P,Q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvénynek, így

$$F_x(x,y) = 2x + 3x^2 y \ , \qquad F_y(x,y) = x^3 - 3y^2 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ha az első egyenletet (y-t állandónak tekintve) x-szerint integráljuk következik, hogy

$$F(x,y) = \int (2x + 3x^2 y)dx = x^2 + x^3 y + c(y) \ .$$

Ezt az F-et y-szerint parciálisan deriválva a második egyenlet szerint

$$F_y(x,y) = x^3 + c'(y) = x^3 - 3y^2 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

következik, ami adja, hogy $c'(y) = -3y^2$, illetve $c(y) = -y^3 + c$, így $c = 0$-val kapjuk F korábbi alakját.

f) Integráló szorzó keresése

Definíció. Ha y teljesíti (E)-t és $\exists\ \mu : D \to \mathbb{R}$ ($\mu \neq 0$) függvény, hogy a $(\mu P, \mu Q)$ függvénynek létezik primitív függvénye, azaz a

$$(*) \qquad \mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt, akkor μ-t az (E) egyenlet ***integráló szorzó***jának (Euler-multiplikátorának) nevezzük.

Megjegyzések.

1. Ha létezik integráló szorzó, úgy ((E) és $(*)$ ekvivalenciája miatt) (E) megoldása visszavezethető a $(*)$ egzakt differenciálegyenlet megoldására.
2. Integráló szorzót az alábbi módon kereshetünk:

$$D_2 \mu P = D_1 \mu Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q\mu_x - P\mu_y = (P_y - Q_x)\mu \ ,$$

melyből ha $\mu = \mu(\omega(x,y))$ (pl. $\omega(x,y) = x$ vagy y vagy $x + y\ \ldots$)

$$Q\frac{d\mu}{d\omega}\omega_x - P\frac{d\mu}{d\omega}\omega_y = (P_y - Q_x)\mu \ ,$$

illetve

$$\frac{\mu'(\omega)}{\mu(\omega)} = \frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}$$

következik, ami adja, hogy

$$\mu(\omega) = \exp \int \frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}(\omega)d\omega \ ,$$

ha $\frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}$ az ω függvénye.

Ha például $\omega(x,y) = x$, úgy $\mu(x) = \exp \int \frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}(x)dx$ x-től függő integráló szorzó, ha $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ csak az x változó függvénye.

Példák.

1. Az $y\,dx + 2x\,dy = 0$ differenciálegyenlet nem egzakt.
Tekintsük azt a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ tartományon, ekkor a $\mu(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $((x,y) \in D)$ függvény integráló szorzó, mert az

$$\frac{y}{\sqrt{x}}\,dx + 2\sqrt{x}\,dy = 0$$

egyenlet egzakt D-n, és egyszerű számolás adja, hogy $F(x,y) = 2y\sqrt{x}$ $(x > 0)$ primitív függvénye $\left(\frac{y}{\sqrt{x}}, 2\sqrt{x}\right)$-nek, így y akkor és csak akkor megoldása egyenletünknek, ha létezik $c_1 \in \mathbb{R}$, hogy

$$2y\sqrt{x} = c_1 \qquad ((x,y) \in D).$$

Ezért az $y = \frac{c}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ adja a megoldást explicit formában.
Belátható, hogy $\mu(x, y) = y$ $((x, y) \in D)$ is integráló szorzó, mert az

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0$$

egyenlet egzakt. Ebből – rövid számolással – jön, hogy a primitív függvény $F(x, y) = xy^2$, így y akkor és csak akkor megoldás, ha létezik $c \in \mathbb{R}$ $(c \geq 0)$, hogy

$$xy^2 = c \qquad ((x, y) \in D),$$

amiből ugyancsak adódik az $y = \frac{c}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ megoldás.

2. A

$$(2x^2 + 2xy^2 + 1)y\,dx + (3y^2 + x)\,dy = 0$$

differenciálegyenlet nem egzakt (például a $D = \{(x, y) \mid x > 0\}$ félsíkot tekintve).

$$P_y(x, y) = 6xy^2 + 2x^2 + 1\ , \qquad Q_x = 1\ ,$$

így

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = 2x\ ,$$

így a 2. megjegyzés szerint

$$\mu(x) = \exp\int 2x\,dx = e^{x^2} \qquad (x > 0)$$

egy – x-től függő – integráló szorzó lesz.

4. Egzisztencia-tételek Cauchy-feladatokra

a) Egzisztencia és unicitiás tétel (DER-KÉP)-re

Igen fontos a (DER-KÉP) probléma következő átfogalmazása (visszavezetése integrálegyenlet-rendszerre):

Lemma. *Az $y : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény akkor, és csak akkor megoldása az*

(*DER-KÉP*) $\qquad y' = f(x, y)\ , \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

problémának, ha folytonos megoldása az

(*IER*) $$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

***integrálegyenlet-rendszer**nek. (Itt $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény.)*

Bizonyítás.

a) Ha $y : I \to \mathbb{R}^n$ megoldása (DER-KÉP)-nek, akkor

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad (x \in I).$$

f és y folytonossága adja, hogy $f(x, y(x))$ folytonos I-n, így létezik az

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

integrál és

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \qquad (x \in I),$$

ahol $y(x_0) = y_0$, azaz teljesül (IER).

b) Ha $y : I \to \mathbb{R}^n$ folytonos megoldása (IER)-nek I-n, akkor $f(x, y(x))$ folytonossága miatt

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

differenciálható és deriváltja $f(x, y(x))$, másrészt (IER) adja, hogy y differenciálható és $y'(x) = f(x, y(x))$ $(x \in I)$, továbbá (IER) szerint $y(x_0) = x_0$ is igaz, ebből pedig következik, hogy y megoldása (DER-KÉP)-nek. ☐

Megjegyzés. A lemma miatt (DER-KÉP) megoldhatósága és a megoldás egyértelműsége (egzisztencia és unicitás) egyet jelent (IER) megoldhatóságával és a megoldás egyértelműségével.

Tétel (Picard-Lindelöf egzisztencia és unicitás tétel).
Legyen $G \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $D = I \times G$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, hogy létezik $L > 0$, hogy

$$\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\|_{\mathbb{R}^n} < L\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^m} \qquad (\forall\ (x,y_1),(x,y_2) \in D),$$

azaz f Lipschitz-tulajdonságú D-n. Legyen továbbá $x_0 \in I$ és $y_0 \in G$ rögzített. Akkor létezik $\alpha > 0$, hogy az

$$(\textit{DER-KÉP}) \qquad y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Cauchy-feladatnak az $I_1 = I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ intervallumon létezik megoldása és az egyértelmű.

Megjegyzések.
1. A tétel feltételei mellet a (DER-KÉP) megoldását az

$$y_0(x) \doteq y_0, \quad y_k(x) \doteq y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))dt \quad (k = 1,2,\ldots; x \in I_1)$$

szerint definiált $\langle y_k \rangle$ függvénysorozat határfüggvénye adja.
Az eljárást ***Picard-féle szukcesszív approximáció***nak nevezzük.

2. $n = 1$ mellett az elsőrendű explicit differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatra vonatkozó Picard-féle egzisztencia és unicitás tételt kapjuk.

Példák.
1. A

$$(\text{KÉP}) \qquad y' = xy, \qquad y(0) = 1$$

Cauchy-feladatnak megfelelő integrálegyenelet:

$$(\text{IE}) \qquad y(x) = 1 + \int\limits_0^x ty(t)dt$$

Ekkor

$$y_0(x) = 1, \qquad y_1(x) = 1 + \int\limits_0^x tdt = 1 + \frac{x^2}{2}, \ldots$$

$$y_k(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k, \ldots,$$

és $y_k(x) \to \exp(x^2/2)$ egyenletesen, így (KÉP) megoldása:

$$y(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Legyen $G = \mathbb{R}$, $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $D = I \times \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = -\frac{y}{x}$.
f folytonos és

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|\frac{y_1 - y_2}{x}\right| \le 2|y_1 - y_2| \qquad (\forall\ (x,y_1),(x,y_2) \in D)$$

miatt Lipschitz-tulajdonságú D-n. Ezért a tétel miatt létezik $\alpha \in]0,1[$, hogy az

$$y' = -\frac{y}{x}, \qquad y(1) = 1$$

Cauchy-feladatnak létezik megoldása és az egyértelmű az $I = [1-\alpha, 1+\alpha] \cap \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ intervallumon.
E megoldás nem lehet más, mint a korábban kapott

$$y : I \to \mathbb{R}, \qquad y(x) = \frac{1}{x}$$

függvény.

b) (L-DER-KÉP) megoldhatósága

Legyenek g_{ij}, $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ adott folytonos függvények, akkor

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)y_j + \varphi_i(x), \qquad y_i(x_0) = y_{0i} \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

egy ***lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó Cauchy-feladat***, mely az

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{g}} = (g_{ij})_{n\times n}$$

jelöléssel az

$$(\text{L-DER-KÉP}) \qquad y' = \underline{\underline{g}}(x)y + \varphi(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

alakba is írható.
Ez ekvivalens az

(L-IER) $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \left[\underline{\underline{g}}(t)\, y(t) + \varphi(t)\right] dt$$

integrálegyenlet-rendszerrel.
Legyen $D = I \times \mathbb{R}^n$, akkor az

$$f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n, \qquad f(x,y) \doteq \underline{\underline{g}}(x)y + \varphi(x)$$

folytonos függvényre $\forall\ (x,y^1),(x,y^2) \in D$ esetén

$$\left\|f(x,y^1) - f(x,y^2)\right\| = \left\|\underline{\underline{g}}(x)(y^1 - y^2)\right\| =$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)(y_j^1 - y_j^2)\right]^2} \le nK\left\|y^1 - y^2\right\| = L\left\|y^1 - y^2\right\|$$

teljesül, azaz Lipschitz-tulajdonságú, így az (L-DER-KÉP) megoldható és a megoldás egyértelmű $I_1 \subset I$-n.

c) (n-KÉP) megoldhatósága

Tétel (egzisztencia és unicitás tétel (n-KÉP)-re).
Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $D = I \times G$, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy létezik $L > 0$, hogy

$$\left|f(x,y^1) - f(x,y^2)\right| < L\left\|y^1 - y^2\right\| \qquad (\forall (x,y^1),(x,y^2) \in D),$$

azaz Lipschitz-tulajdonságú D-n. Legyen továbbá $x_0 \in I$, $y_0 \in G_1$ rögzített.
Akkor $\exists\ \alpha > 0$, hogy az

(n-*KÉP*) $$y^{(n)} = f(x,y,\ldots,y^{(n-1)}), \qquad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$$

$(i = 0,\ldots,n-1)$ *Cauchy-feladatnak az $I_1 = I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ intervallumon létezik megoldása és az egyértelmű.*

Következmény ((L-n-KÉP) megoldhatósága).
Legyenek $a_1,\ldots,a_n, b : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$

rögzített. Akkor az

(L-n-KÉP) $$\begin{cases} y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y + b(x) \\ y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \qquad (i = 0,\ldots,n) \end{cases}$$

Cauchy-feladatnak egy és csak egy megoldása van I-n.

d) Egzisztenciatétel (DER-KÉP)-re

Tétel (Cauchy-Peano egzisztencia tétel). *Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $(x_0,y_0) \in D$. Akkor az*

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Cauchy-feladatnak létezik megoldása.
(De nem feltétlenül egyértelmű, lásd például az $y' = \sqrt{|y|}$ differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatot.)

5. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek

a) Az n-edrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános elmélete

1. definíció. Legyenek $a_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,n)$ adott folytonos függvények. A

($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) $$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)y^{(n-i)} = 0$$

egyenletet ***n*-edrendű lineáris homogén differenciálegyenlet**nek nevezzük.

Egyszerű számolással bizonyítható a következő tétel:

1. tétel. *Ha az $y_1,\ldots,y_k : I \to \mathbb{R}$ függvények megoldásai ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek I-n, akkor $\forall\ c_1,\ldots,c_k \in \mathbb{R}$ esetén az*

$$y = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i$$

függvény is megoldás I-n.

2. definíció (lineáris függőség és függetlenség).
Az $y_1, \dots, y_k : I \to \mathbb{R}$ függvények lineárisan függőek I-n, ha létezik $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ $(\sum\limits_{i=1}^{k} c_i^2 > 0)$ konstansrendszer, hogy

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x) = 0 \qquad (\forall x \in I).$$

$y_1, \dots, y_k : I \to \mathbb{R}$ lineárisan függetlenek, ha $(*)$ csak úgy teljesül, ha $c_i = 0$ $(i = 1, \dots, k)$.

3. definíció. Az $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ $n-1$-szer differenciálható függvények ***Wronski-determinánsa***:

$$W = W(y_1, \dots, y_n) \doteq \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

2. tétel (Liouville-formula). *Ha az $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ függvények megoldásai $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-nek I-n és $x_0 \in I$ adott, akkor*

$$W(x) = W(y_1(x), \dots, y_n(x)) = W(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt\right].$$

Következmény. $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$ egy $y_1, \dots, y_n$ megoldásrendszerének Wronski-determinánsa vagy $\equiv 0$, vagy sehol sem 0.

4. definíció (alaprendszer). Az $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ függvények $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$ alaprendszerét alkotják, ha megoldásai annak és lineárisan függetlenek.

3. tétel. *$y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ akkor, és csak akkor alaprendszere $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-nek, ha bármely y_i $(i = 1, \dots, n)$ megoldás I-n, és $W(x) \neq 0$.*

4. tétel ($(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$ általános megoldása). *Legyen $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$ alaprendszere I-n, akkor $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$ bármely $y : I \to \mathbb{R}$ megoldása*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad (x \in I)$$

alakú, ahol $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ konstansok.

Bizonyítás. Ha $y_1, \dots, y_n$ $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$ alaprendszere, akkor $W(x_0) \neq 0$ $\forall\, x_0 \in I$. Ha $y : I \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges megoldása $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-nek, akkor legyen $c_1, \dots, c_n$ a

$$(\circ) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(j)}(x_0) = y^{(j)}(x_0) \qquad (j = 0, \dots, n-1)$$

egyenletrendszer ($W(x_0) \neq 0$ miatt létező) megoldása, akkor a

$$\psi(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad (x \in I)$$

függvény olyan megoldása $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-nek I-n, melyre teljesülnek a

$$\psi^{(j)}(x_0) = y^{(j)}(x_0) \qquad (j = 0, \dots, n-1)$$

kezdeti feltételek $(\circ)$ miatt.
Így ψ és y ugyanazon $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-re vonatkozó (n-KÉP) megoldásai, ezért megegyeznek, azaz

$$y(x) = \psi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad (x \in I),$$

amit bizonyítani kellett. □

Megjegyzések.
1. Az általános megoldáshoz így elég az alaprendszert meghatározni.
2. Belátható, hogy alaprendszer mindig létezik.
3. Az alaprendszer meghatározására nincs általános módszer.

Példa. Tekintsük a

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$$

másodrendű differenciálegyenletet $2x + 1 \neq 0$-ra és adjuk meg az általános megoldását. Ehhez ismernünk kellene két lineárisan független megoldást, az alaprendszert.

Az együtthatókat látva olyan „érzésünk” van, hogy valamilyen algebrai polinom, illetve e^{ax} alakú függvény lehet megoldás (ilyen alakú megoldást általában is kereshetünk).

Ha szerencsénk van már $y_1(x) = x + b$ $(x \neq -\frac{1}{2})$ alakú megoldás is van alkalmas b-vel.

Ekkor $y_1'(x) = 1$, $y_1''(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$. Ezeket az egyenletbe helyettesítve

$$(2x+1)\cdot 0 + 4x - 4(x+b) = 0 \qquad \left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$$

kell, hogy teljesüljön, ami $-4b = 0$, azaz $b = 0$ esetén igaz.
$y_1(x) = x$ $(x \neq -\frac{1}{2})$ tehát megoldás.
A másik megoldást keressük $y_2(x) = e^{ax}$ $(x \neq -\frac{1}{2})$ alakban, melyből $y_2'(x) = ae^{ax}$, $y_2''(x) = a^2e^{ax}$ következik. Ezeket az egyenletbe helyettesítve

$$a^2(2x+1)e^{ax} + 4axe^{ax} - 4e^{ax} = 0 \qquad \left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$$

kell, hogy teljesüljön, ami $e^{ax} \neq 0$ miatt ekvivalens azzal, hogy

$$a^2(2x+1) + 4ax - 4 = 0\ ,$$

illetve

$$2a(a+2)x + a^2 - 4 = 0\ ,$$

$(x \neq -\frac{1}{2})$ ami csak akkor igaz, ha $2a(a+2) = 0$ és $a^2 - 4 = 0$ igaz, ez pedig $a = -2$-re teljesül.
$y_2(x) = e^{-2x}$ $\left(x \neq \frac{1}{2}\right)$ is megoldás.
y_1 és y_2 lineárisan függetlenek, mert

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & e^{-2x} \\ 1 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -(2x+1)e^{-2x} \neq 0\ .$$

Így az egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1x + c_2e^{-2x} \qquad \left(x \neq -\frac{1}{2}\right).$$

5. tétel (D'Alembert-féle rendszámcsökkentő eljárás).
Legyen $y_1 : I \to \mathbb{R}$ $(y_1 \neq 0)$ megoldása az

$$(H_2D) \qquad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

differenciálegyenletnek. Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor, és csak akkor megoldása (H_2D)-nek, ha az

$$u : I \to \mathbb{R} \qquad u \doteq \left(\frac{y}{y_1}\right)'$$

függvény megoldása az

$$(H_1D) \qquad u' + \left(a_1(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right)u = 0$$

differenciálegyenletnek. Így (H_2D) általános megoldása

$$y = cy_1 \int \exp\left[-\int\left(a_1(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right)dx\right]dx =$$
$$= cy_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left[-\int a_1(x)dx\right]dx\ .$$

Megjegyzés. A rendszám csökkentésére kényelmes az alábbi (a Liouville-formulát használó és hasonló eredményre vezető) módszer.
Ha (H_2D) y_1 és y_2 lineárisan független megoldásai közül y_1 ismert, úgy a Lioville-formula adja y_2-re (rögzített x_0-lal) az

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = W(x_0)\exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt\right]$$

elsőrendű differenciálegyenletet, melyet legegyszerűbben úgy oldhatunk meg, hogy mindkét oldalt osztjuk $y_1^2 \neq 0$-lal és észrevesszük, hogy a baloldalon $\frac{y_2}{y_1}$ deriváltja szerepel, azaz teljesül

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = W(x_0)\frac{1}{y_1^2}\exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt\right].$$

Ebből kapjuk, hogy

$$y_2(x) = W(x_0)\,y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)}\exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt\right]dx\ .$$

b) Konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenletek

Definíció. Ha ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-ben

$$a_i(x) = a_i \in \mathbb{R} \qquad (x \in I),$$

akkor a kapott

$$(\mathsf{KH}_n\mathsf{D}) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)} = 0$$

egyenletet n***-edrendű konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenlet***nek nevezzük.
($\mathsf{KH}_n\mathsf{D}$) ***karakterisztikus polinom***ja:

$$(\mathsf{KP}) \qquad P(\lambda) \doteq \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i},$$

míg ***karakterisztikus egyenlet***e:

$$(\mathsf{KE}) \qquad \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i} = 0.$$

Tétel. *Ha $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ $p_1, \dots, p_k$ ($\in \mathbb{N}$)-szeres (különböző) gyökei ($\mathsf{KH}_n\mathsf{D}$) karakterisztikus egyenletének, hogy $p_1 + \dots + p_k = n$, akkor*

$$(AR) \qquad \begin{cases} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \dots, & x^{p_1-1}e^{\lambda_1 x} \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_k x}, & xe^{\lambda_k x}, & \dots, & x^{p_k-1}e^{\lambda_k x} \end{cases}$$

alaprendszere ($\mathsf{KH}_n\mathsf{D}$)-nek.

Ha például $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $\left(i \doteq \sqrt{-1}\right)$ úgynevezett konjugált komplex gyökei (KE)-nek, hogy $p_1 = p_2 = p$-szeresek, akkor (AR) első két sora helyett

$$\begin{matrix} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \dots, & x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & \dots, & x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{matrix}$$

szerepel. (Hasonló a helyzet a további komplex gyökök esetén is.)

Következmény. Az

$$(\mathsf{KH}_2\mathsf{D}) \qquad y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

karakterisztikus egyenlete a másodfokú

$$(\mathsf{KE}_2) \qquad \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

egyenlet, így ha ennek gyökei:

a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor ($\mathsf{KH}_2\mathsf{D}$) általános megoldása
$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x};$$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \in \mathbb{R}$, akkor ($\mathsf{KH}_2\mathsf{D}$) általános megoldása
$$y = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2\, x\, e^{\lambda_0 x};$$

c) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), akkor ($\mathsf{KH}_2\mathsf{D}$) általános megoldása
$$y = \left[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right] e^{\alpha x}.$$

Példa. Az $y''' - y' = 0$ harmadrendű konstansegyütthatós lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \ ,$$

melynek megoldásai

$$\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

miatt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.
Tekintsük az

$$y_1(x) = e^{0x} = 1 \ , \qquad y_2(x) = e^x \ , \qquad y_3(x) = e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényeket. Ezek megoldásai lesznek differenciálegyenletünknek (ez egyszerű számolással adódik) és Wronski determinánsuk

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} + e^x e^{-x} = 2 \neq 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így lineárisan függetlenek, tehát a differenciálegyenlet alaprendszerét alkotják.
Így a 4. tétel miatt az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

amiről meg is győződhetünk.

c) n-edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek

Definíció. Legyenek $a_i, b : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1,\dots,n)$ adott folytonos függvények, akkor az

$$(\mathsf{IH}_n\mathsf{D}) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} = b(x)$$

differenciálegyenletet ***n-edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet***nek nevezzük.

1. tétel. *Legyen y_p partikuláris megoldása $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-nek. Az y akkor, és csak akkor megoldása $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-nek, ha az*

$$y_H : I \to \mathbb{R}, \qquad y_H(x) = y(x) - y_p(x)$$

szerint definiált függvény megoldása az $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-ből képzett $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-nek.

Bizonyítás.

a) Ha y és y_p megoldásai $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-nek, akkor az y-ra és y_p-re felírt $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-t kivonva egymásból

$$(y - y_p)^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)(y - y_p)^{(n-i)} = 0$$

adódik, azaz $y - y_p \doteq y_H$ valóban megoldása $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-nek.

b) Ha y_p megoldása $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-nek és y_H megoldása $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$-nek, akkor a két egyenlet összeadása adja, hogy $y \doteq y_H + y_p$ is megoldása $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-nek. □

Következmény. Ha y_p $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$ egy ***partikuláris megoldás***a, $y_1, \dots, y_n$ pedig $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$ alaprendszere, akkor $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$ általános megoldása

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + y_p \ .$$

Hogyan határozható meg y_p?

2. tétel (a konstansvariálás módszere $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-re). *Ha $y_1, \dots, y_n$ az $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-ből képzett $(\mathsf{H}_n\mathsf{D})$ alaprendszere és a $c_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ függvények kielégítik a*

$$(C) \quad \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(j)}(x) = 0 \quad (j = 0, \dots, n-2), \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = b(x)$$

egyenletrendszert I-n, akkor

$$(P) \qquad y_p : I \to \mathbb{R}, \qquad y_p(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)$$

megoldása $(\mathsf{IH}_n\mathsf{D})$-nek.

Megjegyzések.

1. (C) $c_1', \dots, c_n'$-re egy inhomogén lineáris egyenletrendszer, melynek determinánsa a Wronszki-determináns, melyre $W(x) \neq 0$ $(I$-n$)$.
2. $(\mathsf{IH}_2\mathsf{D})$ esetén

$$(\mathsf{IH}_2\mathsf{D}) \qquad y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = b(x),$$

és ha y_1, y_2 alaprendszer, akkor (C)

$$(\mathsf{C}') \qquad \begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = b(x) \end{cases}$$

alakú. Ebből pedig

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ b(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = -\frac{b(x) y_2(x)}{W(y_1, y_2)}; \qquad c_2'(x) = \frac{b(x) y_1(x)}{W(y_1, y_2)},$$

illetve

$$c_1(x) = \int -\frac{b(x) y_2(x)}{W(y_1, y_2)} dx; \qquad c_2(x) = \int \frac{b(x) y_1(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

következik. Továbbá ezen c_1 és c_2 függvényekkel a partikuláris megoldás

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) \qquad (x \in I).$$

Példa. Az

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$$

$(\mathsf{IH}_2\mathsf{D})$-hez tartozó homogén egyenlet:

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \ .$$

Ennek karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \ ,$$

melynek megoldása $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, így általános megoldása:

$$y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Tételünk, illetve a 2. megjegyzés szerint

$$y_P(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{3x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

megoldása lesz ($\mathsf{IH_2D}$)-nek, ha c_1' és c_2' teljesíti a

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{3x} &= 0 \\ c_1'(x)(-e^{-x}) + c_2'(x)3e^{3x} &= e^{4x} \end{aligned}$$

lineáris inhomogén egyenletrendszernek, melynek Wronski determinánsa

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -e^{-x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 4e^{2x} \neq 0 \ ,$$

így (például a Cramer-szabállyal) kapjuk, hogy

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ e^{4x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{4e^{2x}} = \frac{-e^{7x}}{4e^{2x}} = -\frac{1}{4}\,e^{5x} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{4x} \end{vmatrix}}{4e^{2x}} = \frac{e^{3x}}{4e^{2x}} = \frac{1}{4}\,e^{x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ebből

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\frac{1}{4}\int e^{5x}\,dx = -\frac{1}{20}\,e^{5x} \ , \\ c_2(x) &= \frac{1}{4}\int e^{x}\,dx = \frac{1}{4}\,e^{x} \ , \end{aligned}$$

tehát

$$y_P(x) = -\frac{1}{20}\,e^{5x}\,e^{-x} + \frac{1}{4}\,e^{x}\,e^{3x} = \frac{1}{5}\,e^{4x} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami valóban megoldása ($\mathsf{IH_2D}$)-nek.
($\mathsf{IH_2D}$) általános megoldása így

$$y(x) = c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{3x} + \frac{1}{5}\,e^{4x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

d) Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Definíció. Legyenek $g_{ij}, \varphi_i : I \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ folytonos függvények. A

$$(\mathsf{LIHDER}) \qquad y_i' + \sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

illetve az $(y_1, \ldots, y_n)^\top \doteq \underline{y}$, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)^\top \doteq \underline{\varphi}$, $(g_{ij})_{n\times n} \doteq \underline{\underline{g}}$ jelölésekkel a

$$(\mathsf{LIHDER'}) \qquad \underline{y}' + \underline{\underline{g}}(x)\underline{y} = \underline{\varphi}$$

egyenletrendszert ***lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszer***nek, míg az

$$(\mathsf{LHDER}) \qquad \underline{y}' + \underline{\underline{g}}(x)\underline{y} = 0$$

egyenletrendszert ***lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszer***nek nevezzük.

Megjegyzések.

1. (LIHDER), illetve (LHDER) megoldásainak meghatározása visszavezethető az n-edrendű lineáris differenciálegyenletek elméletére.
2. Ugyanakkor önálló elmélet is kidolgozható, mely szoros analógiát mutat az n-edrendű lineáris differenciálegyenletek elméletével.

Példa. Az

$$(\mathsf{IH}) \qquad \begin{cases} y_1' - y_1 - y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = x \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszer első egyeneltét differenciálva (az egyenletek adják, hogy y_1 és y_2 is kétszer, sőt akárhányszor differenciálható)

$$y_1'' - y_1' - y_2' = 0$$

következik, melyet összehasonlítva a differenciálegyenlet-rendszerrel eliminálható y_2' és y_2, és az

$$y_1'' - 2y_1' = x$$

másodrendű konstansegyütthatós lineáris inhomogén differenciálegyenlet adódik y_1-re.

A homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, ami akkor, és csak akkor teljesül, ha $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$, amiből kapjuk, hogy

$$y_{1H}(x) = c_1 + c_2 e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Keressük y_{1p}-t

$$y_{1p}(x) = c_1(x) + c_2(x)e^{2x}$$

alakban, ez megoldás, ha $c_1'(x)$ és $c_2'(x)$ teljesíti a

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)\cdot 1 + c_2'(x)\cdot e^{2x} &= 0 \\ c_1'(x)\cdot 0 + c_2'(x)\cdot 2e^{2x} &= x \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert, amiből következik, hogy

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ x & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = -\frac{xe^{2x}}{2e^{2x}} = -\frac{x}{2} \quad\Longrightarrow\quad c_1(x) = -\frac{x^2}{4}\ ,$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix}}{2e^{2x}} = \frac{x}{2}e^{-2x} \quad\Longrightarrow\quad c_2(x) = \frac{x}{4}e^{-2x} - \frac{1}{8}e^{-2x}\ .$$

Így

$$y_1(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8} + c_1 + c_2\, e^{2x}$$

és

$$y_2(x) = y_1'(x) - y_1(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8} - c_1 + c_2\, e^{2x}\ .$$

Irodalomjegyzék

[1] Császár Á., *Valós analízis I-II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
[2] Járai A., *Modern alkalmazott analízis*, Egyetemi jegyzet, KLTE, Debrecen, 1991.
[3] Lajkó K., *Analízis II-III.*, Egyetemi jegyzet, DE Matematikai Intézet, Debrecen, 2003.
[4] Lajkó K., *Differenciálegyenletek*, Egyetemi jegyzet, DE Matematikai Intézet, Debrecen, 2003.
[5] Lajkó K., *Kalkulus II.*, Egyetemi jegyzet, DE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 2003.
[6] Lajkó K., *Kalkulus I*, mobiDIÁK könyvtár, DE Informatikai Intézet, Debrecen, 2003., illetve DE Matematikai Intézet, Debrecen, 2004.
[7] Pál J. – Schipp F. – Simon P., *Analízis II.*, Egyetemi jegyzet, Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest, 1993.
[8] Rudin, W., *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

Névjegyzék

Darboux, Jean Gaston (francia, 1842–1917)
Fubini, Guido (olasz, 1879–1943)
Jordan, Camille (francia, 1838–1922)
Lebesgue, Henri Lèon (francia, 1875–1941)
Lindelöf, Ernst Leonard (finn, 1870–1946)
Liouville, Joseph (francia, 1809–1882)
Lipschitz, Rudolf (német, 1832–1903)
Newton, Sir Isaac (francia, 1642–1727)
Picard, Émile (francia, 1856–1941)
Stieltjes, Thomas Jan (holland-francia, 1856–1894)
Sylvester, James Joseph (angol, 1814–1897)
Young, William Henry (angol, 1863–1942)

Tárgymutató