

Nyelvek és automaták tételkidolgozás

0.	Chomsky hierarchia, üresszó lemma (+ bizonyítás)	1
1.	Formális rendszer és néhány főbb típusa	2
2.	Automaták fogalma és főbb típusai. Véges automaták ábrázolása táblázattal és gráffal...	2
3.	Automata leképezés fogalma. Raney tétel (+ bizonyítás).....	4
4.	Automaták ekvivalenciája. Gill tétel (+ bizonyítás).....	6
5.	Redukált automaták. Aufenkamp-Hohn féle eljárás (+ bizonyítás).....	6
6.	Véges automaták analízise. McNaughton módszer (+ bizonyítás)	7
7.	Véges automaták szintézise. Gluskov módszer (Bizonyítás nem kell!).....	7
8.	Automaták és nyelvek kapcsolata	8
9.	Nyelvtanok normális alakra hozása. Chomsky-féle normálalak	8
10.	Bar-Hillel lemma (+ bizonyítás)	9
11.	Hossz nemcsökkentő nyelvtanok és kapcsolatuk az 1-es típusú nyelvtanokkal.	10
12.	Kuroda-féle normálalak (+ bizonyítás)	10
13.	Révész-féle normálalak (+ bizonyítás).....	11
14.	Rekurzív-, és rekurzívan felsorolható nyelvek, eldönthetőség.....	12
15.	Univerzális Turing-gép, Turing-gépek megállási problémája (+ bizonyítás).....	12

0. Chomsky hierarchia, üresszó lemma (+ bizonyítás)

A $G = (V_N, V_T, S, H)$ -t i -típusú nyelvtannak nevezzük, ha az alábbi megkötések közül az i -edik teljesül:

- $i = 0$: Nincs semmilyen további megkötés
- $i = 1$: Minden H -beli szabály $P_1QP_2 \rightarrow P_1RP_2$ alakú, ahol $P_1, P_2 \in (V_N \cup V_T)^*$, $Q \in V_N$, $R \in (V_N \cup V_T)^* / \{\lambda\}$, vagy pedig $S \rightarrow \lambda$ alakú, de ekkor S nem fordulhat elő egyetlen H -beli szabály jobb oldalán sem. (Környezetfüggetlen nyelvtan)
- $i = 2$: Minden H -beli szabály $P \rightarrow Q$ alakú, ahol $P \in V_N$, $Q \in (V_N \cup V_T)^*$. (Környezetfüggetlen nyelvtan)
- $i = 3$: Minden H -beli szabály $P \rightarrow aQ$ vagy $P \rightarrow a$ alakú, ahol $P, Q \in V_N$, $a \in V_T^*$. (Reguláris nyelvtan vagy jobb-lineáris nyelvtan)
- Minden H -beli szabály $P \rightarrow aQb$ vagy $P \rightarrow a$ alakú, ahol $P, Q \in V_N$; $a, b \in V_T^*$. (Lineáris nyelvtan)

Üres-szó lemma: Minden $G = (V_N, V_T, S, H)$ 2-típusú nyelvtanhoz létezik olyan vele ekvivalens 1-típusú $G' = (V_N, V_T, S', H')$ nyelvtan, melyre teljesülnek a következők:

- $\lambda \notin L(G)$ esetén H' -beli szabályok jobb oldalán nem szerepel λ
- $\lambda \in L(G)$ esetén csak $S' \rightarrow \lambda$ alakú szabály esetén szerepelhet jobb oldalt a λ , és ekkor S' egyetlen szabály jobb oldalán sem fordulhat elő.

Bizonyítás: Legyen $G = (V_N, V_T, S, H)$ környezetfüggetlen nyelvtan. Generáljuk az U_i halmazokat az alábbiak szerint:

$$U_1 = \{P \mid P \rightarrow \lambda \in H\}$$

$$U_{k+1} = U_k \cup \{P \mid P \rightarrow Q \in H, Q \in U_k^*\}$$

Ekkor van olyan i , melyre teljesül, hogy $U_i = U_{i+1}$. Legyen $P \rightarrow Q \in H'$, ha $P \rightarrow R \in H, Q \neq \lambda$, és vagy $Q=R$ vagy Q úgy áll elő, hogy R -ből U_i -beli elem(ek)et törölünk. Legyen $G' = (V_N, V_T, S', H')$. Ekkor $L(G) \setminus \{\lambda\} = L(G')$.

Ilyenkor:

- ha $\lambda \notin L(G)$, akkor $L(G) = L(G')$, valamint a nyelvtan 1-típusú,
- ha $\lambda \in L(G)$, akkor $V'_N = V_N \cup \{S'\}, S' \notin (V_N \cup V_T)$ és $H'' = H' \cup \{S' \rightarrow S, S' \rightarrow \lambda\}$ választásokkal megkonstruált $G'' = (V_N, V_T, S', H'')$ nyelvtan 1-típusú, és $L(G) = L(G'')$.

1. Formális rendszer és néhány főbb típusa

Formális rendszernek (vagy átírási rendszernek) nevezünk minden olyan $W=(V,H)$ párt, amelyben V egy ábécé, H pedig a $V^* \times V^*$ direkt szorzat egy véges részhalmaza. A H elemeit helyettesítési szabályoknak hívjuk és ha $(P,Q) \in H$, akkor a $P \rightarrow Q$ jelölést használjuk.

Legyen $P, Q \in V^*$. Akkor mondjuk, hogy P -ből közvetlenül (egy lépésben) levezethető Q ($P \Rightarrow Q$), ha léteznek olyan $P', P_1, P'', Q_1 \in V^*$ szavak, hogy $P = P' P_1 P'', Q = P' Q_1 P''$ és $P_1 \rightarrow Q_1 \in H$.

Azt mondjuk, hogy P -ből Q levezethető ($P \Rightarrow^* Q$), ha léteznek olyan $P_0, P_1, \dots, P_k \in V^*$ szavak, hogy $P_0 = P, P_k = Q$ és $P_i \Rightarrow P_{i+1} (i = 0, \dots, k-1)$.

Ha olyan formális rendszereket tekintünk, melyekben a helyettesítési szabályok szimmetrikusak, akkor eljutunk az *asszociatív kalkulus* fogalmához.

Egy $W=(V,H)$ formális rendszert *generatív rendszernek* nevezünk, ha ki van tüntetve V^* egy nem üres és véges részhalmaza, amelyet W axiómarendszerének nevezünk (és az Ax jelölést használjuk). Egy ilyen W generatív rendszert $W=(V,Ax,H)$ alakban szokás megadni.

Egy $W=(V,Ax,H)$ generatív rendszert *szemi-Thue rendszernek* nevezünk, ha ki van tüntetve V^* egy olyan F részhalmaza, melyre $Ax \subseteq F$. Egy ilyen szemi-Thue rendszert $W=(V,Ax,H,F)$ alakban adunk meg, ahol F a formulák halmaza, és a W -nek a generatív rendszerhez hasonló értelmezése esetén mondhatjuk még azt is, hogy F az igaz állítások halmaza.

A *Post-féle normál rendszer* egy olyan V ábécéből, Ax axiómarendszerből és H helyettesítési szabályokból felépülő $W=(V,Ax,H)$ hármas, melyben H elemei $PX \rightarrow XQ$ alakúak, ahol $X \in V$ egy olyan betű, mely sem P -ben, sem Q -ban nem fordul elő.

2. Automaták fogalma és főbb típusai. Véges automaták ábrázolása táblázattal és gráffal

Automatán egy olyan absztrakt rendszert értünk, mely egy diszkrétnek elképzelt időskála időpillanataiban érkezett ingerek hatására válasszal reagál, miközben belső állapotát

megadott szabályok szerint változtatja. Az ingerekre adott válasz függ az ingerektől és a belső állapottól.

Mealy-automatán értjük azt az $A = (A, X, Y, \delta, \gamma)$ ötöst, ahol

- A : belső állapotok nem üres, véges halmaza;
- X : a bemenő jelek véges halmaza, a bemenő ábécé;
- Y : a kimenő jelek véges halmaza, a kimenő ábécé;
- $\delta: A \times X \rightarrow A$ átmenetfüggvény;
- $\eta: A \times X \rightarrow Y$ kimenetfüggvény.

A Mealy-automata diszkrét időskálán működik, s annak minden egyes időpillanatában egy-egy jól meghatározott állapotban van. Ha valamely időpontban egy $A = (A, X, Y, \delta, \gamma)$ Mealy-automata egy $a \in A$ állapotban az $x \in X$ bemenő jelet kapja, akkor ugyenezen időpillanatban a $\gamma(a, x)$ kimenő jellel reagál, majd a következő időpillanatra átmegy a $\delta(a, x)$ állapotba.

Működése: Legyen adva egy $x_1 x_2 \dots x_k \in X^*$ bemeneti szó. Az $a \in A$ kezdeti állapotból az η kimeneti függvény megadja az első kimeneti jelet.

$$\begin{array}{ll} a_1 = \delta(a, x_1) & y_1 = \eta(a, x_1) \\ a_2 = \delta(a_1, x_2) & y_2 = \eta(a_1, x_2) \\ \dots & \dots \\ a_k = \delta(a_{k-1}, x_k) & y_k = \eta(a_{k-1}, x_k) \end{array}$$

Működése eredményeként az $y_1 y_2 \dots y_k$ kimeneti szót kapjuk.

Ha ehhez a Mealy-automatához létezik olyan $\mu: A \rightarrow Y$ függvény, hogy tetszőleges $a \in A$ állapotban és $x \in X$ bemenő jel esetén teljesül a $\gamma(a, x) = \mu(\delta(a, x))$ egyenlőség, akkor Moore-automatáról beszélünk. A Moore-automatát $A = (A, X, Y, \delta, \mu)$ alakban szokás megadni, ahol $\mu: A \rightarrow Y$ a Moore-automata jelfüggvénye. $\mu(a)$ az $a \in A$ állapot jele.

Tehát Moore-automatának nevezünk egy olyan $A = (A, X, Y, \delta, \mu)$ automatát, ahol

- A : belső állapotok nem üres, véges halmaza;
- X : a bemenő jelek véges halmaza, a bemenő ábécé;
- Y : a kimenő jelek véges halmaza, a kimenő ábécé;
- $\delta: A \times X \rightarrow A$ átmenetfüggvény;
- $\mu: A \rightarrow Y$ jelfüggvény

Ha egy $A = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore-automatára $A=Y$ és $\mu: A \rightarrow A$ egy identikus leképezés (azaz minden $a \in A$ -ra $\mu(a) = a$), akkor a kimenő jel nélküli automata fogalmához jutunk. Azt is mondhatjuk, hogy a kimenő jel nélküli automata egy olyan $A = (A, X, Y, \delta, \gamma)$ Mealy-automata, melyre $A=Y$ és $\delta = \gamma$. $A = (A, X, \delta)$ formában szokás megadni.

A fent említett automaták *véges automaták*, ha az állapothalmaz, a bemenő jelhalmaz és a kimenő jelhalmaz végesek.

Iniciális automata: mikor kijelölünk az automatánál egy a_0 kezdőállapotot.

Teljesen definiált és parciális automata: Ha az átmenet- és kimenetfüggvénye minden (a, x) ($a \in A, x \in X$) párra értelmezve van, akkor az automatát teljesen definiáltnak mondjuk. Ellenkező esetben, amikor az átmenet és kimenet függvények valamelyike csupán részlegesen definiált, az automatát parciális automatának nevezzük.

Determinisztikus és nemdeterminisztikus automata: Ha az automatahoz tartozó átmenetfüggvények és kimenetfüggvények egyértékűek ($\delta: A \times X \rightarrow A$), akkor az automata determinisztikus, ellenkező esetben ($\delta: A \times X \rightarrow 2^A$) az automatát nem determinisztikusnak mondjuk. A nemdeterminisztikus automatánál δ átmenetfüggvénnyel meghatározzuk az összes lehetséges következő konfigurációt, amibe az eredeti átvihető. Ezután az összes új konfigurációra is meghatározzuk a lehetséges új konfigurációkat stb.

Valószínűségi (sztochasztikus) automata: $\mathbf{A} = (A, X, y, P)$

P : Bármely $a \in A, x \in X$ párhoz hozzárendel egy 0 és 1 közötti számot.

$P((a', y') | (a, x)) \in [0, 1]$

Annak a valószínűsége, hogy az automata az a' állapotba megy át és az y' kimenő jelet adja ki, feltéve, hogy az a állapotban volt és az x bemenő jelet kapta.

Robin-Scott féle automata:

Felismerő vagy elfogadó automatának is hívják. Egy olyan $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta, A_F)$ ötös, ahol A a nemüres állapothalmaz, $a_0 \in A$ a kezdőállapot, X a nemüres bemenő jelhalmaz, $\delta: A \times X \rightarrow A$ az átmeneti függvény, $A_F \subseteq A$ pedig a végállapotok nemüres halmaza.

Véges automaták ábrázolása táblázattal:

$\mathbf{A}$	$\dots a \dots$	$\mu(a)$	$\mathbf{A}$	$\dots a \dots$
		$\dots a \dots$		
x	$(\delta(a, x), \gamma(a, x))$	x	x	$\gamma(a, x)$
	Mealy			kim. jel. nélk.
		$\delta(a, x)$		
		Moore		

Véges automaták ábrázolása gráffal:

Mealy: Minden csúcs egy állapottal van megcímkézve. Minden irányított él meg van címkézve egy 2 komponensből álló vektorral, melynek első komponense egy bemenő jel, a második pedig egy kimenőjel.

Moore: Minden csúcs egy 2 komponensből álló vektorral van megcímkézve. Első komponense egy állapot, második pedig ezen állapot jele. A csúcsból kivezető minden irányított él meg van címkézve egy bemenő jellel.

Kimenő jel nélküli aut.: Olyan, mint a Moore, csak itt a csúcsok csak egy állapottal vannak címkézve.

3. Automata leképezés fogalma. Raney tétel (+ bizonyítás)

Legyen $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \gamma)$ egy Mealy-automata. A $\delta: A \times X \rightarrow A$ és $\gamma: A \times X \rightarrow Y$ függvények értelmezését kiterjesztjük $A \times X^*$ -ra a következő definícióval:

Legyenek a $\delta: A \times X^* \rightarrow A$, $\gamma: A \times X^* \rightarrow Y^*$ úgy definiálva, hogy tetszőleges $a \in A$ és $x_1, \dots, x_n \in X$ esetén álljanak fenn a

$$\delta(a, x_1 \dots x_n) = a_1 \dots a_n$$

és a

$$\gamma(a, x_1 \dots x_n) = y_1 \dots y_n$$

összefüggések, ahol

$$a_1 = \delta(a, x_1), \dots, a_n = \delta(a_{n-1}, x_n), \text{ illetve}$$

$y_1 = \gamma(a, x_1), \dots, y_n = \gamma(a_{n-1}, x_n)$. Emellett legyen $\delta(a, \lambda) = \lambda, \gamma(a, \lambda) = \lambda$. Ez a formális definíció annak az interpretációnak felel meg, hogy bármely $a \in A$ állapotból indulva az **A** automata egy bemenő jelsorozatnak egy kimenő jelsorozatot feleltet meg. (Az automata üres bemenő szóra üres kimenő szóval reagál.)

Az $\alpha : X^* \rightarrow Y^*$ leképezést *alfabetikus leképezésnek* hívjuk.

Legyen adott egy $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \gamma)$ Mealy-automata. Ennek az automatának minden egyes $a \in A$ állapotához a $\varphi_a(p) = \gamma(a, p), p \in X^*$ összefüggéssel definiált $\varphi_a : X^* \rightarrow Y^*$ leképezést hozzárendelve megkapjuk az $a \in A$ állapot által indukált leképezést.

Iniciális $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \gamma)$ Mealy automata esetén az a_0 kezdő állapottal indukált φ_{a_0} leképezést az **A** iniciális automata által indukált leképezésnek, vagy röviden az **A** automata leképezésének is mondjuk, melyet jelölhetünk φ_A -val is.

Egy alfabetikus leképezést *automata leképezésnek* nevezünk, ha van olyan Mealy-automata, és annak olyan állapota, amely éppen ezt a leképezést indukálja.

Raney tétel:

Egy $\varphi : X^* \rightarrow Y^*$ alfabetikus leképezés akkor és csak akkor *automata leképezés*, ha eleget tesz a következő feltételeknek:

- hossztartó, azaz tetszőleges $p \in X^*$ -ra $|p| = |\varphi(p)|$
- kezdőszelet-tartó (kezdőszeletet kezdőszeletbe visz át), azaz minden $p, q \in X^*$ -hoz létezik olyan $r \in Y^*$, hogy $\varphi(pq) = \varphi(p)r$.

Bizonyítás (Papp Z. féle, eredeti a jegyzetben, a 33. oldalon):

Legyen $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \gamma)$ egy tetszőleges Mealy-automata. Annak a bizonyítását, hogy tetszőleges $a \in A$ esetén $\varphi_{a,A} = \varphi_a$ hossz és kezdőszelettartó, a függvény argumentumának, illetve argumentum végződésének hosszára vonatkozó teljes indukcióval végezzük:

$$\varphi_a(\lambda) = \gamma(a, \lambda) = \lambda$$

$$\varphi_a(px) = \gamma(a, px) = \gamma(a, p)\gamma(\delta(a, p), x)$$

$$\varphi_a(q\lambda) = \varphi_a(q)\lambda$$

$$\varphi_a(qpx) = \gamma(a, qpx) = \gamma(a, qp)\gamma(\delta(a, qp), x) = \gamma(a, q)r\gamma(\delta(a, qp), x)$$

ahol $a \in A; x \in X; p, q \in X^*; r \in Y^*$

Ha adott egy tetszőleges, hossz- és kezdőszelet-tartó $\varphi : X^* \rightarrow Y^*$ függvény, akkor rögzített $q \in X^*$ szó esetén az a φ_q függvény, amely tetszőleges $p \in X^*$ szóhoz azt az $r \in Y^*$ szót rendeli, amelyre a $\varphi(qp) = \varphi(q)r$ teljesül, szintén hossz- és kezdőszelet-tartó leképezés lesz. Legyen most

$$A = \{\varphi_q \mid q \in X^*\}, \delta(\varphi_q, x) = \varphi_{qx}, \gamma(\varphi_q, x) = \varphi_q(x).$$

Az így definiált $A = (A, X, Y, \delta, \gamma)$ Mealy-automatára igaz, hogy $\varphi_{\varphi_e, A} = \varphi$.

4. Automaták ekvivalenciája. Gill tétel (+ bizonyítás)

A közös X, Y halmazokkal rendelkező $A = (A, X, Y, \delta, \gamma)$ és $B = (B, X, Y, \delta', \gamma')$ automata $a \in A$ és $b \in B$ állapotait egymással ekvivalens állapotnak mondjuk, ha a és b az A , illetve B automatában ugyanazt a leképzést indukálja, azaz $\varphi_{a, A} = \varphi_{b, B}$. Magukat az A és B automatákat ekvivalensnek nevezzük, ha bármelyikük bármely állapotához van a másiknak ezzel az állapottal ekvivalens állapota, azaz $F_A = F_B$.

Két iniciális automata akkor ekvivalens egymással, ha kezdőállapotaik ekvivalensek.

Gill tétel: Bármely Mealy-automatához létezik vele ekvivalens Moore-automata. Emellett, ha a Mealy automata véges, akkor a hozzá megkonstruált, ekvivalens Moore automata is választható végesnek.

Bizonyítás:

Legyen $A = (A, X, Y, \delta, \gamma)$ tetszőleges Mealy-automata. Egy vele ekvivalens Moore-automatát a következőképpen konstruálhatunk meg:

Legyen $A' = (A', X, Y, \delta', \gamma')$, ahol $A' = A \cup A \times X$, továbbá tetszőleges $a' \in A', x \in X$ párra

$$\delta'(a', x) = \begin{cases} (a', x) & \text{ha } a' \in A \\ (\delta(a, x'), x) & \text{ha } a' = (a, x') \in A \times X \end{cases}$$

$$\gamma'(a', x) = \begin{cases} \gamma(a, x) & \text{ha } a' \in A \\ \gamma(\delta(a, x'), x) & \text{ha } a' = (a, x') \in A \times X \end{cases}$$

1. $A' \equiv A$
2. A' egy Moore-automata

5. Redukált automaták. Aufenkamp-Hohn féle eljárás (+ bizonyítás)

Definiáljunk egy $A = (A, X, Y, \delta, \gamma)$ Mealy-automata állapothalmazán egy ρ_A relációt:

$$a \rho_A b \Leftrightarrow \varphi_a = \varphi_b \\ a, b \in A$$

Azaz $a \rho_A b \Leftrightarrow \gamma(a, p) = \gamma(b, p)$, minden p bemenő szóra.

Ezek szerint két belső állapot akkor lesz egy osztályban, ha egy tetszőleges szó beolvasása után az automata a két belső állapotból ugyanabba az új állapotba megy át. Az így definiált ρ_A kongruencia, és a ρ_A -hoz tartozó C_A kompatibilis osztályzás maximális. A megfelelő A / ρ_A faktorformulát pedig az A automatához tartozó *redukált automatának* nevezzük.

Általában egy $A = (A, X, Y, \delta, \gamma)$ Mealy-automatát redukálnak nevezünk, ha tetszőleges $a, b \in A$ pár esetén: $a \rho_A b \Leftrightarrow a = b$

Aufenkamp-Hohn féle eljárás:

Egy véges $A = (A, X, Y, \delta, \gamma)$ automata esetén az A_0 redukált automatahoz úgy jutunk el, hogy a

$$\forall a, b \in A: (a \rho_A b \Leftrightarrow \forall p \in X^*: \gamma(a, p) = \gamma(b, p))$$

relációhoz tartozó C_A osztályozást osztályzások egy $C_1, C_2, \dots$ sorozatán keresztül szerkesztünk meg, amelyeket a következőképp definiálunk:

- $\forall a, b \in A: (C_1[a] = C_1[b] \Leftrightarrow \forall x \in X: \gamma(a, x) = \gamma(b, x))$
- ha $i \geq 1$, akkor $C_{i+1}[a] = C_{i+1}[b] \Leftrightarrow C_i[a] = C_i[b]$ és $\forall x \in X: C_i[\delta(a, x)] = C_i[\delta(b, x)]$

Először megszerkesztjük az A állapothalmaz C_1 szerinti osztályait. Pontosan akkor tartozik két állapot egy osztályba, amikor minden egyes bemenő jel hatására ugyanazt a kimenőjelet adják.

Ezután minden egyes $m > 1$ -re megszerkesztjük a C_m szerinti osztályokat egészen addig, amíg $C_m = C_{m+1}$ teljesül. Igazolható, hogy ez a C_m osztályzás épp az A maximális kompatibilis osztályzása.

Ezután a redukált automata megszerkesztése van csak hátra, amelynek szerkezete $A / C_m = (C_m, X, Y, \delta_{C_m}, \gamma_{C_m})$, ahol minden $C_m[a] \in C_m, x \in X$ -re $\delta_{C_m}(C_m[a], x) = C_m[\delta(a, x)]$, illetve $\gamma_{C_m}(C_m[a], x) = \gamma(a, x)$.

Speciálisan, ha az eredeti automata iniciális volt, és a kezdőállapota a_0 volt, akkor a redukált automata is választható iniciálisnak, éspedig úgy, hogy a kezdő állapotát $C_m[a_0]$ -nak választjuk.

Bizonyítás a jegyzetben (38., 39. oldal).

6. Véges automaták analízise. McNaughton módszer (+ bizonyítás)

A véges automaták analízise jelentse olyan univerzális algoritmus megadását, amelynek alkalmazásával bármely adott $A = (A, a_0, X, \delta)$ véges, kimenő jel nélküli iniciális automatahoz és állapotai M részhalmazához meg tudjuk adni annak a nyelvnek egy reguláris kifejezését, amely A -ban az M halmazzal előállítható.

T(McNaughton-Yamada): Ha a véges X halmaz feletti L nyelv előállítható véges kimenő jel nélküli iniciális automata állapotai valamely M részhalmazával, akkor az L nyelv reguláris.

Bizonyítás: jegyzet, 53. oldal.

7. Véges automaták szintézise. Gluskov módszer (Bizonyítás nem kell!)

A véges automaták szintézise jelentse olyan univerzális algoritmus megadását, amelynek alkalmazásával bármely véges X halmaz feletti, reguláris kifejezéssel megadott L reguláris nyelvhez meg tudunk konstruálni olyan véges, kimenő jel nélküli iniciális $A = (A, a_0, X, \delta)$ automatát, amelyben az adott L nyelv az állapothalmaz valamely M részhalmazával előállítható.

Gluskov módszer:

Számba vesszük azoknak a szavaknak a struktúráját, amelyek az adott nyelv közül legalább egyikben előfordulnak.

Legyenek $L_1, L_2, \dots, L_k$ olyan nyelvek az $X = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\}$ ábécé felett, amelyek reguláris kifejezéssel vannak megadva.

A nyelvvalgebra műveleti azonosságaihoz hozzáadjuk a reguláris kifejezéseket minél rövidebb alakra. Majd a reguláris kifejezésekben előforduló betűket balról-jobbra haladva úgy, hogy az azonos betűk különböző előfordulási helyükön más-más indexet kapjanak.

8. Automaták és nyelvek kapcsolata

A 3-as típusú (reguláris) nyelvtanokkal generálható $\mathcal{L}_3$ osztálya megegyezik a véges automaták által felismerhető nyelvek osztályával (vagyis a reguláris nyelvek osztályával). Más szóval, a 3-as típusú (reguláris) nyelvtan, mint generatív eszköz, azonos értékű a véges automatával, mint felismerő eszközzel.

T: A nemdeterminisztikus véges automatákhoz előállítható nyelvek $\mathcal{L}_{\text{NFA}}$ osztálya megegyezik a véges automatákhoz előállítható nyelvek $\mathcal{L}_{\text{FA}}$ osztályával.

T: Minden G 3-as típusú nyelvtanhoz létezik egy vele ekvivalens G' 3-as típusú nyelvtan, amelynek szabályai jobb oldalán a mondatszimbólum nem lép fel.

T: A 3-as típusú nyelvek $\mathcal{L}_3$ osztálya egybeesik a véges automatákkal előállítható nyelvek $\mathcal{L}_{\text{FA}}$ osztályával.

9. Nyelvtanok normális alakra hozása. Chomsky-féle normálalak

Normális alak: Egy $G=(V_N, V_T, S, H)$ nyelvtant normális alakúnak hívunk, ha a terminálisok csak $X \rightarrow a$ alakú szabályok jobb oldalán fordulnak elő, ahol $X \in V_N, a \in V_T$.

Tétel: Minden $i \in \{0,1,2\}$ típusú nyelvtanhoz van vele ekvivalens normális alakú i -típusú nyelvtan.

Bizonyítás: Legyen $G=(V_N, V_T, S, H)$ egy $i \in \{0,1,2\}$ típusú nyelvtan és konstruáljuk meg hozzá a $G'=(V_N', V_T, S, H')$ grammatikát úgy, hogy

- $\forall x \in V_T$ -hez rendeljük hozzá $A_x \notin V_N$ -et, és $V_N' = V_N \cup \{A_x \mid \forall x \in V_T\}$;
- $P \rightarrow Q \in H$ (P és Q nem tartalmaz terminálist), akkor $P \rightarrow Q \in H'$;
- $P \rightarrow Q \in H$ (P vagy Q tartalmaz terminálist), akkor $\forall x \in V_T$ helyébe helyettesítsük A_x -et és $P' \rightarrow Q' \in H'$;
 $\forall x \in V_T : A_x \rightarrow x \in H'$.

Chomsky-féle normálalak: Egy $G=(V_N, V_T, S, H)$ nyelvtant Chomsky-féle normálalakúnak hívunk, ha minden szabálya vagy $X \rightarrow a$ vagy pedig $X \rightarrow YZ$ alakú, ahol $X, Y, Z \in V_N, a \in V_T$. Világos, hogy minden Chomsky-féle normálalakú nyelvtan lambda-mentes környezetfüggetlen nyelvtan.

Tétel: Minden lambda-mentes környezetfüggetlen nyelvtanhoz megadható vele ekvivalens Chomsky-féle normálalakú nyelvtan.

Bizonyítás (CNF alakra hozás):

Legyen adott a $G=(V_N, V_T, S, H)$ lambda-mentes, normális alakú nyelvtan, melyek szabályainak jobb oldalán az üres szó nem fordul elő. Megszerkesztjük először a $G_1=(V_N', V_T, S, H_1)$, majd a $G'=(V_N', V_T, S, H')$ nyelvtanokat. Legyen $H_1=H$. A G nyelvtan szabályaira a következő négy alak állhat fenn:

1. $X \rightarrow a, (X \in V_N, a \in V_T)$. Ez megfelel a követelményeknek.
2. $X \rightarrow YZ, (X, Y, Z \in V_T)$. Ez szintén megfelel a követelményeknek.
3. $X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_k, (k \geq 3; X, Y_i \in V_N)$

Legyen $V_N' = V_N \cup \{Z_1 \dots Z_{k-2} \notin V_N\}$. H_1 -ben a 3-as alakú szabályokat helyettesítsük a következőkkel:

$$X \rightarrow Y_1 Z_1,$$

$$Z_1 \rightarrow Y_2 Z_2,$$

...

$$Z_{k-2} \rightarrow Y_{k-1} Y_k.$$

Így kaptunk egy $G_1 = (V_N', V_T, S, H_1)$ grammatikát, melyre $L(G_1) = L(G)$.

4. $X \rightarrow Y, (X, Y \in V_N)$. Ki kell küszöbölni az ilyen alakú szabályokat. Minden $Y \in V_N'$ betűhöz definiáljunk olyan $U(Y)$ halmazokat, melyek azokat a nemterminálisokat tartalmazza, melyekből Y levezethető, és ha új nemterminális kerül be ebbe a halmazba, vegyük fel azokat a nemterminálisokat is, melyekből ez levezethető. Ezután felírjuk a H' szabályhalmazt úgy, hogy tartalmazzon minden olyan szabályt, melyet H_1 is tartalmaz és nem $X \rightarrow Y, (X, Y \in V_N)$ alakú, és vegyük hozzá a szabályokhoz azokat a szabályokat, melyeket úgy kapunk, hogy minden $P \rightarrow Q$ ($P \in V_N$, és $Q \in V_T$ vagy $Q \in V_N^*$) alakú szabály mellé felvesszük azt a $P' \rightarrow Q$ szabályokat, melyekre $P' \in U(P)$.

Az így kapott $G' = (V_N', V_T, S, H')$ nyelvtanra $L(G) = L(G')$.

10. Bar-Hillel lemma (+ bizonyítás)

Bármely L környezetfüggetlen nyelvhez létezik $p, q \in \mathbb{N}$ úgy, hogy bármely $p \in L$ esetén $|P| > p$ szóra $P = UXWYZ$ alakban írható, ahol $|XWY| \leq q$, $XY \neq \lambda$ és $UX^i W Y^i Z \in L$ minden $i \geq 0$ egész számra.

Bizonyítás:

(A nyelvben minden elég hosszú szóhoz végtelen sok további szó található).

Tegyük fel, hogy nyelvtanunk CNF-ban adott. Ha egy $P \in L(G)$ szónak a levezetése olyan fával ábrázolható, melyben a leghosszabb út k hosszúságú, akkor $|p| \leq 2^k$ (CNF miatt).

Tegyük fel, hogy V_N elemeinek száma n és legyen $p = 2^n$ és $q = 2^{n+1}$. Ha $P \in L$ és $|P| > p$, akkor az $S \Rightarrow^* P$ levezetésfájában a leghosszabb útnak n -nél hosszabbnak kell lennie.

Vegyük ennek az útnak az utolsó $n+1$ hosszú szakaszát. Lesz olyan $A \in V_N$, mely ezen a szakaszon legalább kétszer előfordul. Vegyünk két ilyen előfordulást.

Az S -hez közelebb fekvőhöz tartozó részfa végpontjainak megfelelő szó legyen Q , a másik részfaé pedig W .

Ezekre teljesül, hogy $A \Rightarrow^* Q$, $A \Rightarrow^* W$, továbbá a W részsava a Q -nak, tehát $Q = XWY$ ($X, Y \in V_T^*$). $|Q| \leq 2^{n+1}$, másrészt $S \Rightarrow^* UAZ$ és $A \Rightarrow^* XAY$ is fennáll, tehát tetszőleges $i \geq 0$ egész számra $S \Rightarrow^* UX^i W Y^i Z$.

Itt nem lehet X és Y mindkettő üres szó, mert az $A \Rightarrow^* XAY$ levezetés legalább egy lépést tartalmaz.

Ebben a levezetésben az első lépés csak egy $A \rightarrow BC$ alakú szabály alkalmazása lehet, s ezért $|XY| > 1$, miután a nyelvtanunk lambda-mentes. Ezzel beláttuk a tételt.

11. Hossz nemcsökkentő nyelvtanok és kapcsolatuk az 1-es típusú nyelvtanokkal.

Egy G generatív nyelvtant hosszúság nem csökkentőnek mondunk, ha minden $P \rightarrow Q \in H$ szabályra igaz, hogy $|P| \leq |Q|$.

Minden λ -mentes környezetfüggő nyelvtan hosszúságot nem csökkentő.

T : Minden hosszúságot nem csökkentő nyelvtanhoz megadható egy vele ekvivalens környezetfüggő nyelvtan.

Biz: Legyen $G = (V_N, V_T, S, H)$ egy hosszúságot nem csökkentő nyelvtan. Feltéhetjük, hogy terminális jelek csak az $A \rightarrow a$ alakú szabályokban fordulnak elő. Legyen $P \rightarrow Q \in H$ egy tetszőleges szabálya G -nek. Ha $|P|=1$, akkor a szabályunk a kívánt alakú. Ha $|P|>1$, akkor P és Q a következő alakban írhatóak fel:

$$P = X_1 X_2 \dots X_m, Q = Y_1 Y_2 \dots Y_n$$

Ekkor $2 \leq m \leq n$ és $X_i, Y_j \in V_N$. Vezessünk be m darab új változót e szabály helyettesítéséhez $(Z_1, \dots, Z_m \notin (V_N \cup V_T))$, és vegyük az alábbi szabályokat:

$$X_1 X_2 \dots X_m \rightarrow Z_1 X_2 \dots X_m$$

$$Z_1 X_2 \dots X_m \rightarrow Z_1 Z_2 \dots X_m$$

...

$$Z_1 Z_2 \dots Z_{m-1} X_m \rightarrow Z_1 Z_2 \dots Z_{m-1} Z_m Y_{m+1} \dots Y_n$$

$$Z_1 Z_2 \dots Z_{m-1} Z_m Y_{m+1} \dots Y_n \rightarrow Y_1 Z_2 \dots Z_{m-1} Z_m Y_{m+1} \dots Y_n$$

...

$$Y_1 Y_2 \dots Y_{m-1} Z_m Y_{m+1} \dots Y_n \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_{m-1} Y_m Y_{m+1} \dots Y_n$$

Belátható, hogy $P \rightarrow Q$ szabályt ezekkel az új szabályokkal helyettesítve egy, az eredetivel ekvivalens nyelvtant kapunk. Ezek az új szabályok pedig megfelelnek az 1-típusú nyelvtan előírásainak.

12. Kuroda-féle normálalak (+ bizonyítás)

Minden hosszúságot nem csökkentő nyelvtanhoz létezik vele ekvivalens, Kuroda-féle normál alakban lévő nyelvtan.

Biz:

Legyen $G = (V_N, V_T, S, H)$ egy hosszúságot nem csökkentő nyelvtan. Tegyük fel, hogy a nyelvtan normális alakban van, azaz terminális jel csak $X \rightarrow a$ alakú szabályokban fordul elő, ahol $X \in V_N, a \in V_T$.

Legyen $P \rightarrow Q \in H, P = X_1 \dots X_m, Q = Y_1 \dots Y_n$. A nyelvtan tulajdonságai miatt $m \leq n$.

$m = 1, n = 1, 2$ esetén a szabályunk megfelelő alakban van.

$m = 2, n = 2$ esetén szintén

$m = 1, n > 2$ esetén el kell tüntetni a hosszúsabályokat, úgy mint CNF-nál.

$m \geq 2, n \geq 2$ esetben vezessünk be az adott szabály helyettesítésére új $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}$ nemterminális jeleket és vegyük a következő szabályokat:

$$X_1 X_2 \rightarrow Y_1 Z_2$$

$$Z_2 X_3 \rightarrow Y_2 Z_3$$

...

$$Z_{m-1} X_m \rightarrow Y_{m-1} Z_m$$

$$Z_m \rightarrow Y_m Z_{m+1}$$

$$Z_{m+1} \rightarrow Y_{m+1} Z_{m+2}$$

...

$$Z_{n-1} \rightarrow Y_{n-1} Y_n$$

Ezekkel a szabályokkal helyettesítve az eredeti szabályokat, a kiinduló nyelvtanokkal ekvivalens nyelvtant kapunk.

Minden lambda-mentes, környezetfüggő nyelvtanhoz megadható vele gyengén ekvivalens nyelvtan, mely Kuroda-féle normálalakban van.

13. Révész-féle normálalak (+ bizonyítás)

Tétel (Révész-féle első észrevétel): A Kuroda-féle normálalak $AB \rightarrow CD$ alakú szabályai helyettesíthetők a következő környezetfüggő szabályokkal:

$AB \rightarrow AB'$,
 $AB' \rightarrow A'B'$,
 $A'B' \rightarrow A'D$,
 $A'D \rightarrow CD$,
 ahol A' , B' új nemterminálisok.

Tétel (Révész-féle második észrevétel): A Kuroda-féle normálalak $AB \rightarrow CD$ alakú szabályai általában nem helyettesíthetők a következő három környezetfüggő szabállyal:

$AB \rightarrow A'B$,
 $A'B \rightarrow A'D$,
 $A'D \rightarrow CD$,
 ahol A' új nemterminális.

Révész-féle normálalak: Egy $G=(V_N, V_T, S, H)$ nyelvtant Révész-féle normálalakúnak nevezünk, ha szabályai a következő alakúak lehetnek:

$S \rightarrow \lambda$,
 $Z \rightarrow Z$,
 $Z \rightarrow Y$,
 $Z \rightarrow XY$,
 $XZ \rightarrow XY$,
 $ZY \rightarrow XY$,
 $ZY \rightarrow Y$,
 ahol $X, Y, Z \in V_N$, $Z \in V_T$ továbbá az S mondatzimbólum csak a szabályok baloldalán fordulhat elő.

Tétel: Minden mondat szerkezetű nyelvtanhoz létezik vele ekvivalens Révész-féle normálalakú nyelvtan.

Bizonyítás: Tekintsünk egy $G=(V_N, V_T, S, H)$ mondat szerkezetű nyelvtant. Hagyjuk el a H összes $P \rightarrow \lambda$ alakú szabályát, s minden ilyen szabály esetén vegyük fel H -ba az összes $xP \rightarrow x$ és $Px \rightarrow x$ alakú szabályt, ahol x befutja a teljes $V_N \cup V_T$ ábécét. Világos, hogy az így nyert új G' nyelvtan minden egyes ilyen $xP \rightarrow x$ és $Px \rightarrow x$ szabályának alkalmazása helyett ugyanazt érjük el, ha a G nyelvtanban a $P \rightarrow \lambda$ szabályt alkalmazzuk. Ezáltal egy olyan G' grammatikát kapunk, amelyre $L(G')=L(G)-\{\lambda\}$. Ha $\lambda \in L(G)$, akkor a G' -be felvesszük még az $S \rightarrow \lambda$ szabályt, s ezzel $L(G')=L(G)$. Ezután hozzuk a nyelvtant normális alakra. Az összes $P \rightarrow Q$ ($P, Q \in V_N^*$, $P \neq \lambda$, $Q \neq \lambda$) szabályok közül azokra, melyekre $|P| \leq |Q|$ alkalmazzuk a Kuroda-féle normálalakra hozásnál alkalmazott helyettesítéseket, illetve a Révész-féle első észrevételnél alkalmazott helyettesítéseket. Így tehát a $|P| > |Q|$ eset vizsgálata maradt hátra. Tekintsünk egy ilyen $X_1 \dots X_m \rightarrow Y_1 \dots Y_n$, $m > n \geq 1$ szabályt. Hagyjuk el ezt a szabályt, s alkalmass új $U_1, \dots, U_m, Z_{n+1}, \dots, Z_m$ nemterminálisokat és új

$X_{m-1}X_m \rightarrow Z_m U_m$,	$Z_m U_m \rightarrow U_m$,
$X_{m-2}U_m \rightarrow Z_{m-1}U_{m-1}$,	$Z_{m-1}U_{m-1} \rightarrow U_{m-1}$,
...	...

$$\begin{aligned}
&X_n U_{n+2} \rightarrow Z_{n+1} U_{n+1}, & Z_{n+1} U_{n+1} \rightarrow U_n Y_n, \\
&X_{n-1} U_n \rightarrow U_{n-1} Y_{n-1}, \\
&\dots \\
&X_1 U_2 \rightarrow U_1 Y_1, \\
&U_1 Y_1 \rightarrow Y_1
\end{aligned}$$

szabályokat vezessünk be, majd a fellépő $AB \rightarrow CD$ alakú szabályokat ismét helyettesítsük a Révész-féle első észrevételnél alkalmazott módon. $\square$

A fenti bizonyításban szerepelt egy nem konstruktív, csupán egzisztenciális állításon alapuló lépés. Nem tudjuk ugyanis, hogyan lehet általában eldönteni azt a kérdést, hogy $\lambda \in L(G)$ igaz-e vagy sem. Ha a grammatikában nincsen $P \rightarrow \lambda$ alakú szabály, akkor biztos, hogy $\lambda \notin L(G)$. De, ha vannak $P \rightarrow \lambda$ alakú szabályok, abból még nem feltétlenül következik, hogy $\lambda \in L(G)$. Egy olyan G' grammatikát mindig tudunk készíteni, amelyre $L(G') = L(G) - \{\lambda\}$, de, hogy az $S \rightarrow \lambda$ szabályt felvegyük-e, vagy sem, ahhoz tudnunk kell, hogy $\lambda \in L(G)$ igaz-e, vagy sem. Ezért fogalmaztuk úgy a tételt, hogy „létezik olyan grammatika”, és nem mondtuk azt, hogy „megadható”.

14. Rekurzív-, és rekurzívan felsorolható nyelvek, eldönthetőség

Def: Egy L nyelvet rekurzívnek nevezünk, ha a $P \in L$ tartalmazási probléma algoritmikusan eldönthető.

Def: Egy L nyelvet rekurzívan felsorolhatónak nevezünk, ha van olyan eljárás, amely az összes $P \in L$ szót valamilyen sorrendben (esetleg ismétlésekkel) felsorolja.

Minden rekurzív nyelv egyben rekurzívan felsorolható is.

T: Az L nyelv akkor és csakis akkor rekurzív, ha mind L , mind $\bar{L}$ rekurzívan felsorolható.
Biz: Ha L rekurzív, akkor a $P \in L$ probléma algoritmikusan eldönthető, akkor ugyanez áll az $\bar{L}$ nyelvre is, hiszen $P \in L$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $P \notin \bar{L}$. Eszerint ugyanazt az eldöntési algoritmust használhatjuk az $\bar{L}$ -re, azzal a különbséggel, hogy amit L esetén elfogadtunk, azt most nem, és fordítva.

T: Minden 1-típusú nyelv rekurzív, és minden 0-típusú nyelv rekurzív felsorolható.

T: Van olyan rekurzív nyelv, amely nem 1-típusú.

T: A rekurzívan felsorolható nyelvek osztálya megegyezik a 0-típusú nyelvek osztályával.

15. Univerzális Turing-gép, Turing-gépek megállási problémája (+ bizonyítás)

A Turing gép egy végtelen szalagmemóriával és egy író-olvasó fejjel ellátott véges automata. A szalagmemória pozíciókra van osztva, s minden egyes pozíción a szalagabécé pontosan egy betűjét lehet letárolni. Kezdetben a Turing gép egy meghatározott kezdőállapotban van és a szalagon egy véges hosszúságú startszó helyezkedik el. Kezdetkor az író-olvasó fej a startszó első betűjén áll. A startszó előtti és utáni szalagmemória pozíciók szóközzel vannak feltöltve. Üres szó esetén a szalag minden pozíciója szóközzel van feltöltve, s az író-olvasó fej ezek egyikére mutat.

A Turing gép diszkrét időskála mentén, elkülönített időpillanatokban hajt végre egy-egy elemi műveletet, kiindulva egy kezdeti időpontból. A Turing gép egy ilyen elemi operációja az író-olvasó fej alatti betű olvasásából, ezen betű felülírásából, a belső állapot változtatásából, s az író-olvasó fej egy pozícióval való balra vagy jobbra mozgatásából, vagy helybenhagyásból áll. Amennyiben a Turing gép eljut a végállapotba, megáll.

Formálisan a Turing gép $M = (A, a_0, X, \omega, A_F, \mu)$ hatos, ahol A a gép belső állapotinak (véges) halmaza, a_0 a kezdőállapot, X a szalagábécé, ω a szóköz betű, A_F a végállapotok halmaza, $\mu: (A \setminus A_F) \times X \rightarrow 2^{A \times X \times \{b, j, h\}}$ a Turing gép mozgásfüggvénye.

Az *univerzális Turing gép* olyan Turing gép, amely tetszőleges Turing gépet – önmagát is beleértve – képes szimulálni. Létezik univerzális Turing gép.

A Turing gép működése diszkrét időskála esetén:

- megvizsgálja a szalagon lévő x jelet.
- megvizsgálja a saját belső állapotát
- A vizsgálat eredményeként visszaír egy jelet a szalagra
- A vizsgálat eredményeként átmegy egy új állapotba
- balra vagy jobbra megy, esetleg helyben marad
- végállapotban megáll

Kezdő konfiguráció:

- A szalagon van egy véges sztring, a startszó
- az író-olvasó fej a sztring első betűjére mutat
- az (iniciális) automata a kezdőállapotban van

A Turing gép vagy megáll, és ekkor elfogadja (felismeri) a bemeneti szót, vagy soha nem áll meg és ekkor a startszó nem eleme a Turing gép által felismert nyelvnek.

Church tézis: Minden, ami algoritmikusan kiszámítható, az kiszámítható Turing géppel is.

T: A Turing gépek megállási problémája nem megoldható.

(Adott egy Turing gép és egy input szó. Meg áll e a Turing gép erre a szóra? Ez a problémaosztály nem megoldható, de parciálisan megoldható.)

Biz: Feltesszük, hogy létezik olyan általános kódolási algoritmus, mely tetszőleges M Turing gép és annak w startszava esetén megad a gép egy $l(M)$ leírást és a w által meghatározott alkalmas $c(l(M), w)$ kódolt alakot mint egy rögzített ábécé feletti szót.

Indirekt bizonyítás: Tegyük fel, hogy létezik olyan A Turing gép, mely a $c(l(M), w)$ szót startszóként megkapva:

- a) megáll és ekkor az „IGEN” válasz kódolt alakja olvasható a szalagján, ha M megáll a w inputra,
- b) megáll és ekkor a „NEM” válasz kódolt alakja olvasható a szalagján, ha M nem áll meg a w inputra.

Ha A létezik, megszerkeszthető az a B Turing gép, mely az $l(M)$ startszó hatására előállítja a $c(l(M), l(M))$ startszót, majd ezután erre a startszóra az A Turing gép működését utánozza egyetlen módosítással: valahányszor az A igen megállást ér el, a B végtelen ciklusba kerül.

A B az $l(B)$ startszó hatására pontosan akkor áll meg, ha B az $l(B)$ startszó hatására nem áll meg. Ez ellentmondás, ezért a tétel igazolást nyert.