STATIKA MUNKAFÜZET

Filotás János
2008

A statika olyan testek vizsgálatával foglalkozik, amelyekre terhelésként különféle erők hatnak. A terhelés lehet:

- koncentrált erő (F), amely egyetlen pontban, egy meghatározott irányban működik [kN]
- megoszló erő (q), amely egy ℓ hosszúságon hat, méterenként megadott kN erővel [kN/m]
- nyomaték (M), amely egy adott pontban elforgatni igyekszik a testet [kNm]

Ha a megoszló erő q értékét megszorozzuk a hosszával (ℓ-lel), akkor átválthatjuk koncentrált erővé. Ebben az esetben a $Q=q\cdot l$ koncentrált erőt a megoszlási hossz közepében kell működtetni.

A terhelések együttes hatására a testet megtámasztó elemekben (a támaszokban) támaszerők keletkeznek, amelyek a terhekkel együtt az úgynevezett külső erőket alkotják.

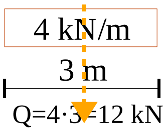
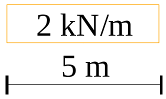
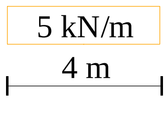
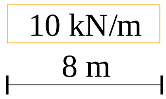
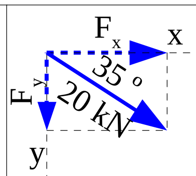
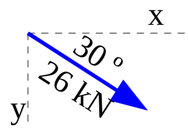
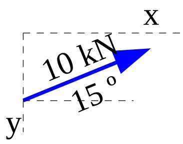
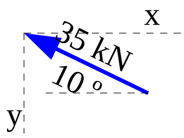
A támaszok lehetnek fix csukló (2), görgős csukló (1), támasztórúd(1), kötél (1), befogás (3), Gerber csukló (-1).
(A zárójelben lévő számok a támaszoknál keletkező ismeretleneket jelentik.)

A koncentrált erőket a számítások miatt fel kell tudni bontani F_x és F_y összetevőkre:

$F_x=F\cdot\cos\alpha$ és $F_y=F\cdot\sin\alpha$ (α az x tengellyel bezárt szög, x jobbra(→), y lefelé (↓) mutat!)

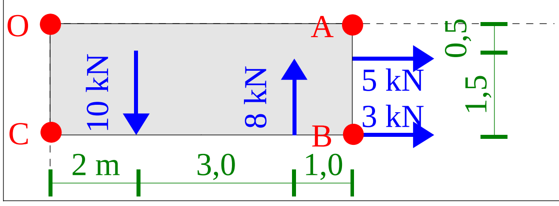
1.Feladat: Erők típusa, ferde erők felbontása, megoszló erő koncentrált erővé alakítása

Számítsa ki és jelölje be a megoszló erőből a koncentrált erőt, illetve bontsa fel a ferde erőt x és y összetevőre!

  Q=.......·.......=.......	 Q=.......·.......=.......  Q=.......·.......=.......	 F_x=20 · cos 35° = 16,383 kN (→) F_y=20 · sin 35° = 11,472 kN (↓)	 F_x=...... · .... = ... kN (....) F_y=...... · .... = ... kN (....)	 F_x=...... · .... = ... kN (....) F_y=...... · .... = ... kN (....)	 F_x=...... · .... = ... kN (....) F_y=...... · .... = ... kN (....)

2.Feladat: Nyomatékszámítás

Számítsa ki a megadott F erőknek az A,B,C pontra vonatkozó nyomatékait!



Példa:$\Sigma M^{(0)}$= +10·2 −8·5 −5·0.5 −3·2=-28,5 kNm (↺)	
$\Sigma M^{(A)}$=	.......·....... ....·....... ....·....... ....·....... =..............( )
$\Sigma M^{(B)}$=	.......·....... ....·....... ....·....... ....·....... =..............( )
$\Sigma M^{(C)}$=	.......·....... ....·....... ....·....... ....·....... =..............( )

3.Feladat: Tartók, támaszok

a., Egészítse ki az alábbi definíciókat!

Tartószerkezet: olyan test, amely a rá ható .... elviseli, s a .... keresztül továbbítja.

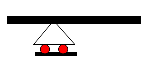
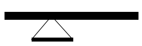
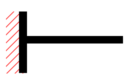
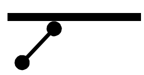
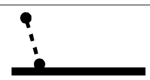
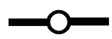
Terhelés: a ....ható ismert nagyságú hatás. Lehet koncentrált, vagy .... erő, illetve nyomaték.

Támaszerők: a terhelések hatására a .... keletkező erők, hatások.

Külső erők: a .... és a .... összessége.

Belső erők: A Külső erők hatására a tartó ...., keresztmetszetében keletkező erők, hatások.

b., Nevezze meg az ábrán szereplő támaszokat! Hány ismeretlen erő keletkezhet bennük? Rajzolja is be azokat!

						
Név:	....	....	....	....	....	....
Erők száma:	....	....	....	....	....	....

A tartószerkezetekre általában több erő hat. Több erő együttesét erőrendszernek nevezzük, amelyből van síkbeli, térbeli és speciális. Minden erőrendszer helyettesíthető egyetlen hatással, az úgynevezett eredővel, annak érdekében, hogy a számításokat könnyebben elvégezhessük. Az eredő tehát egy olyan hatás, amely az erőrendszert annak minden hatásában helyettesíteni képes. Ahhoz, hogy egy erő helyettesíthesse az erőrendszert, három feltételt kell teljesítenie:

-x összetevője megegyezik az erőrendszer erőinek x összetevőinek összegével: $R_x = \Sigma F_x$

-y összetevője megegyezik az erőrendszer erőinek y összetevőinek összegével: $R_y = \Sigma F_y$

-egy tetszőleges pontra vonatkozó nyomatéka megegyezik az erőrendszer ugyenezen pontra vett nyomatékösszegével: $\Sigma M^{(O)} = \text{eredő nyomatéka} = R_y \cdot x_0 = -R_x \cdot y_0$

A gyakorlatban az eredőt szerkesztésse4l, vagy számítással határozhatjuk meg. Számítás esetén a lépések:

-ferde erők felbontása x és y összetevőkre

-x, illetve y irányú erők összegzése $R_x = \Sigma F_x$ $R_y = \Sigma F_y$

-eredő nagyságának kiszámítása pitagorasz tétellel: $R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

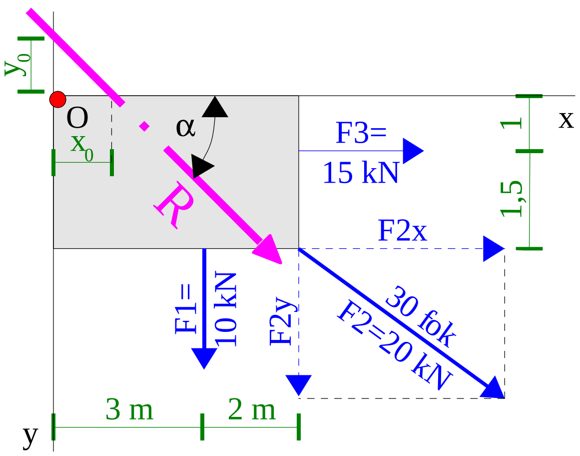
-eredő hajlásszögének kiszámítása: $tg\,\alpha = \dfrac{R_y}{R_x}$, ebből a számítható

-kiválasztott pontra vonatkozó nyomatékösszeg kiszámítása: $\Sigma M^{(O)} = ...$

-eredő x és y tengelyen lévő metszéspontjának (helyének) kiszámítása: $x_O = \dfrac{\Sigma M^{(O)}}{R_y}$,és $y_O = \dfrac{\Sigma M^{(O)}}{-R_x}$

1.Feladat: Eredő számítása példa: *A példa áttekintése után számítsa ki a b, feladatrészt!*

a., példa



Erő	X (+ →→)	Y (+↓)
F1=10 kN	0,00	+10 (↓)
F2=20 kN	20·cos30= +17,32 (→)	20·sin30= +10 (↓)
F3=15 kN	+ 15,00 kN (→)	0
Összeg:	**Rx=+32,32 kN (→)**	**Ry=+20 kN (↓)**

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = R = \sqrt{32{,}32^2 + 20^2} = 38{,}008\,kN$ **(↘)**

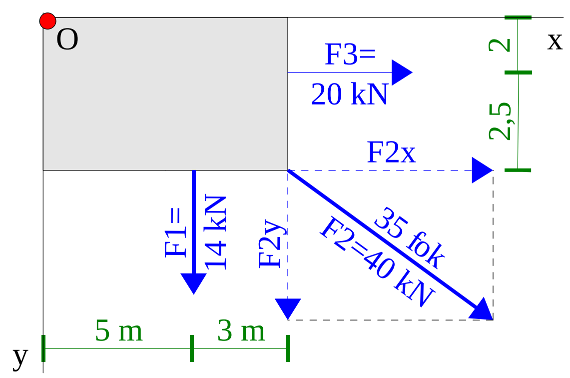
$tg\,\alpha = R_y / R_x = 20/32{,}32 = 0{,}6188$ → **α=31,75°**

$\Sigma M^{(O)}$= +10·3 – 17,32·2,52,5 + 10·5 – 15·1=+21,7 kNm (↻)

$x_0 = \Sigma M^{(O)}$ / Ry= 21,7 / 20 = 1,085 m

$y_0 = \Sigma M^{(O)}$ / -Rx= 21,7 / -32,32 = -0,671 m

b, feladat



Erő	X (+ →)	Y (+↓)
F1=14 kN	……..(....)	…….. (....)
F2=40 kN	……·……..= …….. (....)	……·……..= …….. (....)
F3=25 kN	……...(....)	………...(....)
Összeg:	**Rx=..............(....)**	**Ry=..............(....)**

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = R = \sqrt{........^2 + ...^2} = ... \,kN.$ **(....)**

$tg\,\alpha = \dfrac{R_y}{R_x} = \dfrac{..........}{...........} = ...$ → **α=…………**

$\Sigma M^{(O)}$= +14·...... – ……·4,5 + …....·8 – 20·......=............(…...)

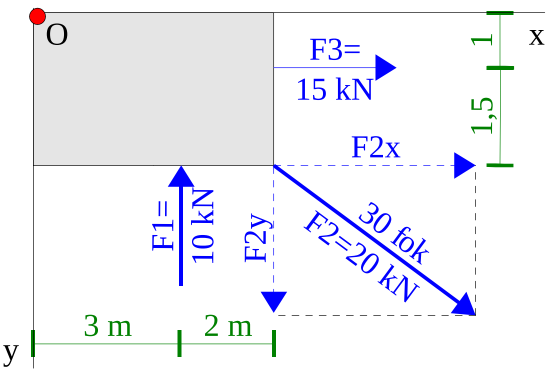
$x_0 = \Sigma M^{(O)}$ / Ry= ………..... / ……….. = …………… m

$y_0 = \Sigma M^{(O)}$ / -Rx= ………..... / ……….. = …………… m

Bizonyos erőrendszereknél kiadódhat olyan eset, hogy az eredő valamelyik (esetleg mindkét) komponense nulla.
Ha az Rx komponens nulla, akkor az eredő egy y irányú erő, vagyis a hajlásszöge: α = 90 fok.
Ha pedig az Ry komponens nulla, akkor az eredő erő egy x irányú erő, vagyis a hajlásszöge α =0 fok.
Ha mindkét komponens nulla, akkor az eredő nem erő, hanem nyomaték, ami azt jelenti, hogy a test, amelyre az erőrendszer hat, nem fog eltolódni semerre sem, csak forgást végez. Ebben az esetben nem értelmezhető sem az eredő iránya, sem a helye, tehát nincs x0, y0 távolság és Rx, Ry, valamint R erő sem. CSAK a $\Sigma M^{(0)}$ nyomatékösszeget lehet kiszámítani, amely ilyenkor minden pontra azonos értékű lesz!

1.Feladat: Eredő számítása

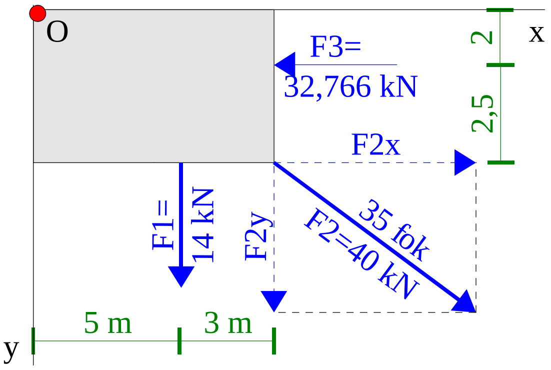
Számítsa ki az eredőt!



Erő	X (+ →)	Y (+↓)
F1=..........	........(....)	.... (....)
F2=...........	......·........= .... (....)	......·........= .... (....)
F3=...........	.........(....)	.............(....)
Összeg:	Rx=..............(....)	Ry=...............(....)
$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=R=\sqrt{......^2+......^2}=.........kN$ (....)		
$tg\,\alpha=R_y/R_x=..../.....=.........$ → α=.........°		
$\Sigma M^{(O)}$= +......·..... – .....·...... + ...·..... – ......·......=............(....)		
$x_0=\Sigma M^{(O)}$ / Ry. Itt Ry=0, ezért az x_0 távolság végtelen lenne!		
$y_0=\Sigma M^{(O)}$ / -Rx= .... / .... = ... m		

2.Feladat: Eredő számítása

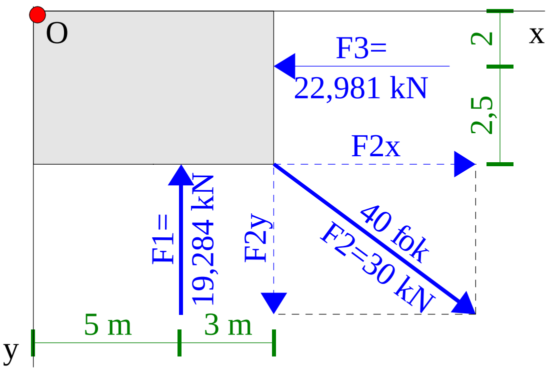
Számítsa ki az eredőt!



Erő	X (+ →)	Y (+↓)
F1=..........	........(....)	.... (....)
F2=..........	......·........= .... (....)	......·........= .... (....)
F3=..........	.........(....)	.............(....)
Összeg:	Rx=..............(....)	Ry=...............(....)
$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=R=\sqrt{........^2+........^2}=......kN.$ (....)		
$tg\,\alpha=\frac{R_y}{R_x}=\frac{..........}{..........}=.........$ → α=............		
$\Sigma M^{(O)}$= +......·..... – .....·...... + ...·..... – ......·........=...........(....)		
$x_0=\Sigma M^{(O)}$ / Ry= .... / .... = ... m		
$y_0=\Sigma M^{(O)}$ / -Rx. Itt Rx=0, vagyis az y_0 távolság végtelen lenne!		

3.Feladat: Eredő számítása

Számítsa ki az eredőt!



Erő	X (+ →)	Y (+↓)
F1=..........	........(....)	.... (....)
F2=	......·........= .... (....)	......·........= .... (....)
F3=	.........(....)	.............(....)
Összeg:	Rx=..............(....)	Ry=...............(....)
$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=R=\sqrt{........^2+........^2}=.......kN.$ (....)		
$\Sigma M^{(O)}$= +......·..... – .....·...... + ...·..... – ......·........=...........(....)		
Az α, x_0 és y_0 számításának nincs értelme ebben az esetben!		

Az eredő NEM erő, hanem NYOMATÉK!

4.Reakcióerő számítása konzoltartón

A tartóra ható terhelések a tartót alátámasztó támaszokban támaszerőket keltenek. Ha a tartót alátámasztó támaszerő-komponensek száma pontosan három, akkor a tartót statikailag határozottnak nevezzük, és az egyensúlyi egyenletek segítségével ki is tudjuk számítani a támaszerőket. Az összesen három egyensúlyi egyenlet a tartó mozdulatlanságát fejezi ki. Két vetületi egyenlet: $\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ továbbá egy nyomatéki egyenlet van: $\Sigma M = 0$

Ha a támaszkomponensek száma **háromnál több**, akkor **statikailag határozatlan** tartóról beszélünk, mert az egyensúlyi egyenletek segítségével nem lehet meghatározni az ismeretlen támaszerőket, hiszen több az ismeretlen, mint az egyenlet.
Ha pedig a támaszerő-komponensek száma **háromnál kevesebb**, akkor a tartó **statikailag túlhatározott,** mert több megoldása is lehet ilyenkor az egyenleteknek, hiszen több az egyenlet, mint az ismeretlen.

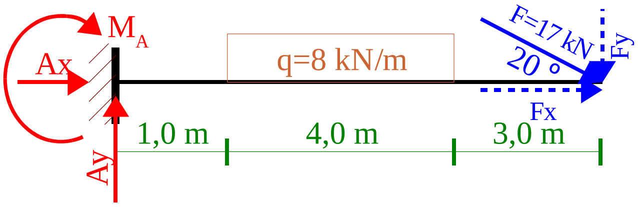
A konzoltartó olyan statikailag határozott tartó, amelynek egyetlen támasza van, mégpedig a befogás. Ennek megfelelően a konzoltartó reakcióerői:

- egy x irányú erő a befogásnál (A_x)
- egy y irányú erő a befogásnál (A_y)
- egy nyomaték a befogásnál (M_A). Ez a tartó elfordulását gátolja meg.

1.Feladat: Konzoltartó reakciói -példa

Az a., feladat áttekintése után oldja meg a b., feladatrészt!

a., Példa



$F_x = 17 \cdot \cos 20^\circ = 15{,}975$ kN (→)

$F_y = 17 \cdot \sin 20^\circ = 5{,}814$ kN (↓)

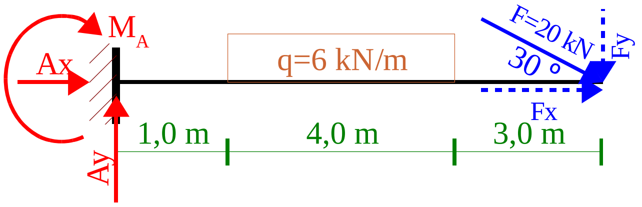
$\Sigma F_x = 0 = A_x + F_x \rightarrow A_x = -F_x = -15{,}975$ kN (←)

$\Sigma F_y = 0 = -A_y + 8 \cdot 4 + F_y \rightarrow A_y = 32 + 5{,}814 = 37{,}814$ kN(↓)

$\Sigma M^{(A)} = 0 = M_A + 8 \cdot 4 \cdot 3 + F_y \cdot 10 \rightarrow$

$M_A = -32 \cdot 3 - 5{,}814 \cdot 10 = -154{,}14$ kNm (↶)

b., Feladat



F_x=20 · cos …… = ………… kN (……)

F_y=….. · sin ……..= ………… kN (……)

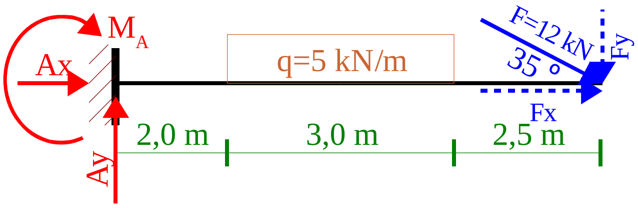
$\Sigma F_x = 0 = A_x + F_x \rightarrow A_x = -F_x =$ ………… kN (…….)

$\Sigma F_y = 0 = -A_y +$…·…$+ F_y \rightarrow A_y =$…….+………=………kN(...)

$\Sigma M^{(A)} = 0 = M_A$ ….·….·…. ……·………→

$M_A =$ …….·…….. ……..·…….. = ……………kNm (…..)

2.Feladat: Konzoltartó reakciói -gyakorlat



F_x=….. · ……… …… = ………… kN (……)

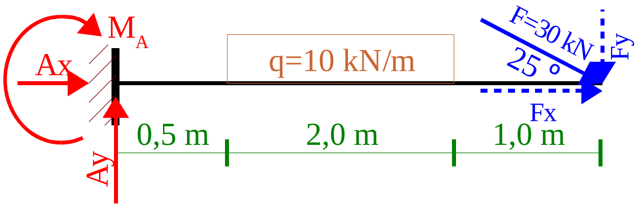
F_y=….. · ……… ……..= ………… kN (……)

$\Sigma F_x = 0 = A_x + F_x \rightarrow A_x = -F_x =$ ………… kN (…….)

$\Sigma F_y = 0 = -A_y +$…·…$+ F_y \rightarrow A_y =$…….+………=………kN(...)

$\Sigma M^{(A)} = 0 = M_A$ ….·….·…. ……·………→

MA= …….·…….. ……..·…….. = …..........kNm (…..)



F_x=….. · ……… …… = ………… kN (……)

F_y=….. · ……… ……..= ………… kN (……)

$\Sigma F_x = 0 = A_x + F_x \rightarrow A_x = -F_x =$ ………… kN (…….)

$\Sigma F_y = 0 = -A_y +$…·…$+ F_y \rightarrow A_y =$…….+………=………kN(...)

$\Sigma M^{(A)} = 0 = M_A$ ….·….·…. ……·………→

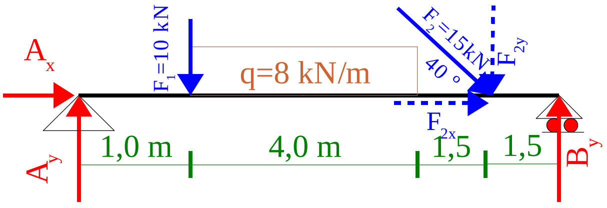
$M_A =$ …….·…….. ……..·…….. = ……………kNm (…..)

Azokat a tartókat, amelyeket egy fix és egy görgős csukló támaszt alá, kéttámaszú tartóknak nevezzük. Mivel a fix csukló két, a görgős pedig egy ismeretlent jelent, ezért a kéttámaszú tartó statikailag határozott. A reakcióerők tehát a három egyensúlyi egyenlettel meghatározhatók. $\Sigma F_x=0$ $\Sigma F_y=0$ $\Sigma M=0$

1.Feladat: Kéttámaszú tartó reakciói -példa

Az a., feladat áttekintése után oldja meg a b., feladatrészt!

a., Példa



F_{2x}=15· cos 40° = 11,49 kN (→)

F_{2y}=15 · sin 40° = 9,642 kN (→)

$\Sigma F_x=0=A_x+F_{2x} \rightarrow \underline{A_x=}-F_{2x}=\underline{-11{,}49\text{ kN }(\leftarrow)}$

$\Sigma M^{(A)}=0=\ 8\cdot4\cdot3+10\cdot1+9{,}642\cdot6{,}5\ -B_y\cdot 8$

$168{,}673-B_y\cdot 8=0 \rightarrow B_y=\dfrac{168{,}673}{8}=21{,}084\text{ kN}(\uparrow\uparrow)$

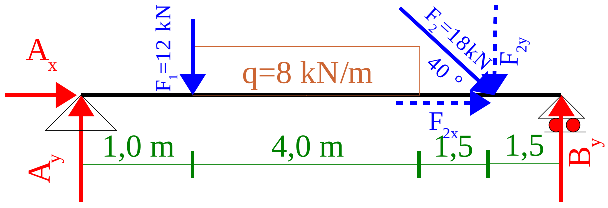
$\Sigma M^{(B)}=0=A_y\cdot 8-\ 8\cdot4\cdot5-\ 10\cdot7-9{,}642\cdot1{,}5.$

$A_y\cdot 8-244{,}463=0 \rightarrow A_y=\dfrac{244{,}463}{8}=30{,}558\text{ kN }(\uparrow)$

<u>Ellenőrzés:</u>

$\Sigma F_y=-30{,}558+8\cdot4.+10+9{,}642-21{,}084.=0{,}000$ ✓

b., Feladat



F_{2x}=..... · .... = ... kN (......)

F_{2y}=..... · ....= .... kN (......)

$\Sigma F_x=0=A_x+F_{2x} \rightarrow$ <u>A_x=</u> – F_{2x}= <u>.............. kN (.......)</u>

$\Sigma M^{(A)}=0=$ ....·....·.... .....·...... ......·..... – B_y· ......

.... – B_y· ......=0 →B_y= $\dfrac{........}{........}$=.......... kN (.....)

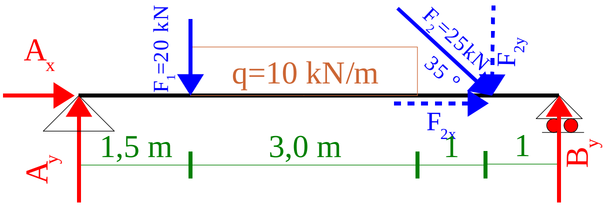
$\Sigma M^{(B)}=0=A_y\cdot$ ....·....·.... .....·...... ......·.....

A_y· ....=0 →A_y= $\dfrac{........}{........}$=.......... kN (.....)

<u>Ellenőrzés:</u>

ΣF_y= –..........+.....·.....+........ +........ –...........=.........

2.Feladat: Kéttámaszú tartó reakciói -gyakorlatok



F_{2x}=..... · .... = ... kN (......)

F_{2y}=..... · ....= .... kN (......)

$\Sigma F_x=0=A_x+F_{2x} \rightarrow$ <u>A_x=</u> – F_{2x}= <u>.............. kN (.......)</u>

$\Sigma M^{(A)}=0=$ ....·....·.... .....·...... ......·..... – B_y· ......

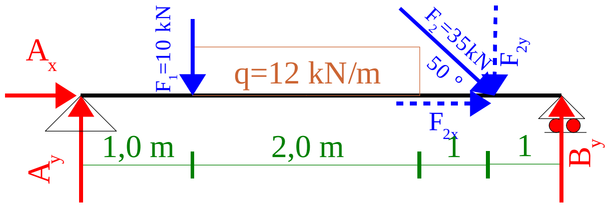
.... – B_y· ......=0 →B_y= $\dfrac{........}{........}$=.......... kN (.....)

$\Sigma M^{(B)}=0=A_y\cdot$ ....·....·.... .....·...... ......·.....

A_y· ....=0 →A_y= $\dfrac{........}{........}$=.......... kN (.....)

<u>Ellenőrzés:</u>

ΣF_y= –..........+.....·.....+........ +........ –...........=.........



F_{2x}=..... · .... = ... kN (......)

F_{2y}=..... · ....= .... kN (......)

$\Sigma F_x=0=A_x+F_{2x} \rightarrow$ <u>A_x=</u> – F_{2x}= <u>.............. kN (.......)</u>

$\Sigma M^{(A)}=0=$ ....·....·.... .....·...... ......·..... – B_y· ......

.... – B_y· ......=0 →B_y= $\dfrac{........}{........}$=.......... kN (.....)

$\Sigma M^{(B)}=0=A_y\cdot$ ....·....·.... .....·...... ......·.....

.A_y· ....=0 →A_y= $\dfrac{........}{........}$=.......... kN (.....)

<u>Ellenőrzés:</u>

ΣF_y= –..........+.....·.....+........ +........ –...........=.........

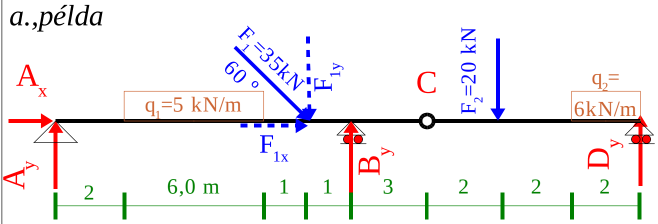
Azokat a tartókat, amelyeket gerber-csuklóval egymáshoz kapcsolt tartórészekből építenek, GERBER-tartóknak nevezzük. A támaszerő-komponensek száma több ugyan háromnál, de mivel a gerber-csukló egyel mindig csökkenti a határozatlanságot, ezért a gerber-tartók statikailag határozottak, ha a támaszok és a csuklók elrendezése megfelelő.
A gerber-tartók számítása úgy történik, hogy a tartót a csuklók mentén tartórészekre kell szedni, majd a tartórészeket külön-külön kell kiszámítani az alábbi feltételekkel:

-a számítást mindig azzal a tartószakasszal kell kezdeni, amelyik a szétszedés után leesne (ez a befüggesztett rész)
-a befüggesztett rész(ek) kiszámítása után a kapott csuklóerőket ellentétes irányban rá kell tenni a többi tartórészre, majd azokat is ki kell számítani.

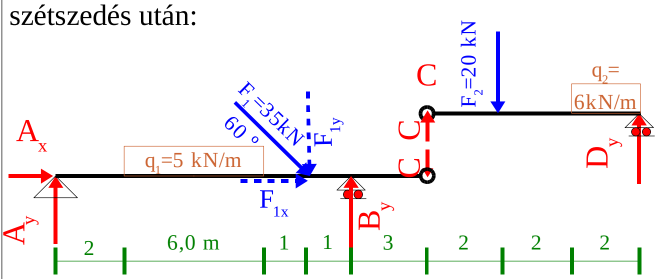
1.Feladat: Gerber-tartó számítása

Az a., feladat áttekintése után oldja meg a b., feladatrészt!

a.,példa



szétszedés után:



Befüggesztett rész: C-D közötti szakasz.

$\Sigma M^{(c)}=0= 20\cdot 2 + 6\cdot 2\cdot 5 - D_y\cdot 6$

$100 - D_y\cdot 6=0 \rightarrow D_y=\dfrac{100}{6}=16{,}667$ kN(↑)

$\Sigma M^{(D)}=0=C\cdot 6 - 20\cdot 4 - 6\cdot 2\cdot 1$

$C\cdot 6 - 92=0 \rightarrow C=\dfrac{92}{6}=15{,}333$ kN(↑)

Főtartó: A-C közötti szakasz

$F_{1x}=35\cdot\cos 60° = 17{,}5$ kN (→)

$F_{1y}=35\cdot\sin 60°= 30{,}311$ kN (↓)

$\Sigma F_x=0=A_x+F_{1x} \rightarrow A_x= - F_{1x}= -17{,}5$ kN (←)

$\Sigma M^{(A)}=0= 5\cdot 6\cdot 5 + 30{,}311\cdot 9 + 15{,}333\cdot 13 - B_y\cdot 10$

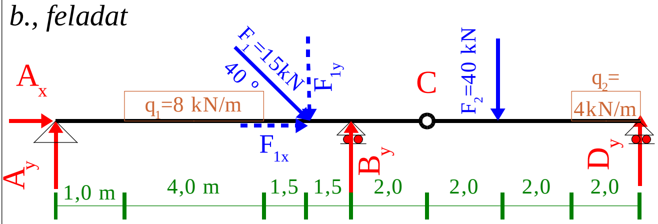
$622{,}128 - B_y\cdot 10=0 \rightarrow B_y=\dfrac{622{,}128}{10}=62{,}213$ kN(↑)

$\Sigma M^{(B)}=0=A_y\cdot 10 - 5\cdot 6\cdot 5 - 30{,}311\cdot 1 + 15{,}333\cdot 3$

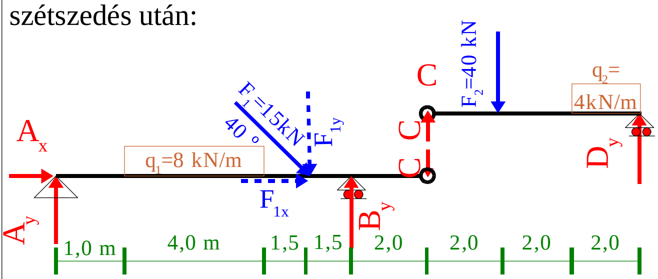
$A_y\cdot 10 - 134{,}312=0 \rightarrow A_y=\dfrac{134{,}312}{10}=13{,}431$ kN(↑)

Ellenőrzés a teljes tartóra, C NÉLKÜL!: $\Sigma F_y= -13{,}431$
$+5\cdot 6+30{,}311-62{,}213+20+6\cdot 2-16{,}667=0{,}000$ kN ✓

b., feladat



szétszedés után:



Befüggesztett rész: …............. közötti szakasz.

$\Sigma M^{(c)}=0=$..........·......... ....·.......·........ – D_y· ....

.... – D_y· …....=0 → D_y= ..../........ =.......... *kN* (.....)

$\Sigma M^{(D)}=0=C$ · ....·....·.... ......·.....

C·….... …..........=0 → C= ..../........ =.......... *kN* (.....)

Főtartó: .... közötti szakasz

F_{1x}=........ · …..... …... = ... kN (…)

F_{1y}=........ · .... ….....= .... kN (…)

$\Sigma F_x=0=A_x+F_{1x} \rightarrow A_x= - F_{1x}=$ .... kN (….....)

$\Sigma M^{(A)}=0=$ .....·.....·..... ......·....... …....·...... – B_y· ....

…............ – B_y· ......=0→ B_y= ..../........ =.......... *kN* (.....)

$\Sigma M^{(B)}=0=A_y$· .... …...·......·...... …....·........ …......·.......

A_y· ....=0 → A_y= ..../........ =.......... *kN* (.....)

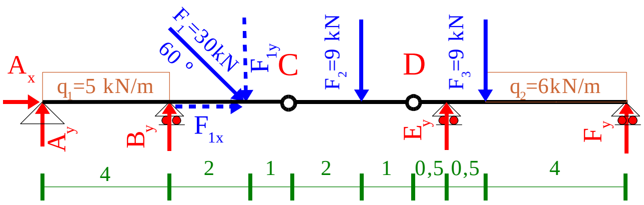
Ellenőrzés a teljes tartóra, C NÉLKÜL!: ΣF_y= –..........
+......·.......+.........–..........+......... +......·...... –.........=........

A gerber-tartók befüggesztett részeiből származó reakcióerők minden esetben terhelést jelentenek a főtartókra, illetve a talajra. A gerber-csuklón keresztül átadódó erőnek lehet x és y komponense is! A főtartók önmagukban statikailag határozott tartók, tehát vagy kéttámaszú, vagy befogott tartók lehetnek.

1.Feladat: Gerber-tartó számítása

Az a., feladat áttekintése után oldja meg a b., feladatrészt!

a., Példa



Befüggesztett rész: C-D közötti szakasz.

ΣM^(c)=0= 9·2 – D_y· 3

18 – D_y· 3=0 →D_y= $\dfrac{18}{3}$ =6,000 kN(↑)

ΣM^(D)=0=C · 3 – 9·1

C·3 –9=0 →C= $\dfrac{9}{3}$ =3,000 kN(↑)

Bal oldali főtartó: A-C közötti szakasz

F_{1x}=30· cos 60° = 15,000 kN (→)

F_{1y}=30· sin 60° = 25,981 kN (↓)

ΣF_x=0=A_x+F_{1x} → A_x= – F_{1x}= –15,00 kN (⟵)

ΣM^(A)=0= 5·4·2 – B_y· 4 + 25,981·6 + 3·7

216,886 – B_y· 4=0 →B_y= $\dfrac{216,886}{4}$ =54,222 kN(↑)

ΣM^(B)=0=A_y· 4 – 5·4·2 + 25,981·2 +3·3

A_y· 4+20,962=0 →A_y= $\dfrac{-20,962}{4}$ = –5,240 kN(↓)

Jobb oldali főtartó: D-F közötti szakasz:

ΣM^(E)=0= –6·0,5 + 9·0,5 + 6·4·2,5 – F_y·4,5

61,5 – F_y· 4,5=0 →F_y= $\dfrac{61,5}{4,5}$ =13,667 kN(↑)

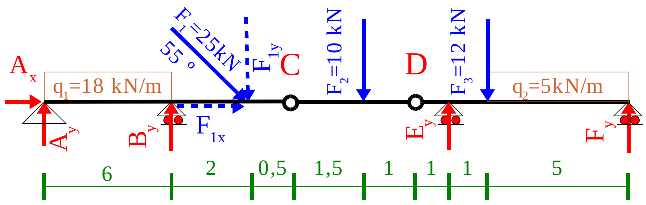
ΣM^(F)=0= –6·5 +E_y·4,5 – 9·4 – 6·4·2

E_y·4,5 + 114=0 →E_y= $\dfrac{114}{4,5}$ =25,333 kN(↑)

Ellenőrzés a teljes tartóra, C és D NÉLKÜL!:

ΣF_y= 5,240+ 5·4 – 54,222 +25,981 + 9 – 25,333 + 9 +6·4 –13,667=**0,001 kN** ✓

b., Feladat



Befüggesztett rész: …............. közötti szakasz.

ΣM^(c)=0= ....·........ – D_y· ....

.... – D_y· ....=0→D_y= $\dfrac{........}{........}$ =......... kN (.....)

ΣM^(D)=0=C · ....·.....

C·........ …..........=0 →C= $\dfrac{........}{........}$ =......... kN (.....)

Bal oldali főtartó: .... közötti szakasz

F_{1x}=........ · …..... …... = ... kN (…)

F_{1y}=........ · .... …....= .... kN (…)

ΣF_x=0=A_x+F_{1x} → A_x= – F_{1x}= .... kN (…....)

ΣM^(A)=0= ....·.....·..... – B_y· ....·....... …....·......

…........... – B_y· ......=0→B_y= $\dfrac{........}{........}$ =......... kN (.....)

ΣM^(B)=0=A_y· .... …...·......·...... …....·........ ….....·.......

A_y· ....=0 →A_y= $\dfrac{........}{........}$ =......... kN (.....)

Jobb oldali főtartó: .... közötti szakasz:

ΣM^(E)=0= …....·...... ......·....... .....·.....·..... – F_y· ....

…........... – F_y· ......=0 →F_y= $\dfrac{........}{........}$ =......... kN (.....)

ΣM^(F)=0= …......·....... E_y· .... ……·......·...... …....·.......

E_y· ....=0 →E_y= $\dfrac{........}{........}$ =......... kN (.....)

Ellenőrzés a teljes tartóra, C és D NÉLKÜL!:

ΣF_y= –..........+......·.......–.......... +......... +.........–..........

+.........+......·...... –.........=**.........**

A külső erők -amelyeket terhelésekre és az általuk kiváltott támaszerőkre bonthatunk- a tartó belsejében, keresztmetszetében is erőket okoznak, amelyeket belső erőknek nevezünk. A belső erők igénybe veszik a tartót, ezért igénybevételeknek is nevezzük őket. Értéküket pedig az úgynevezett igénybevételi ábrán szemléltetjük. Egy síkbeli tartószerkezetben háromféle igénybevétel keletkezik:

-normálerő: a tartó tengelyével párhuzamosan ható erő, amely a tartót hosszában húzza, vagy nyomja
-nyíróerő: a tartó hossztengelyére merőleges erő, amely a gondolatban kettévágott tartófeleket elcsúsztatni igyekszik
-nyomaték: a tartót elhajlítani igyekvő hatás, amely a gondolatban kivágott tartószelet egyik felét nyomja, másikat húzza

Az igénybevételeket az igénybevételi ábrákon (más néven belső erő ábrákon) tesszük szemléletessé úgy, hogy a tartó tengelyével párhuzamosan húzott vonal az ábra tengelye, s erre merőlegesen mérjük fel a vizsgált keresztmetszetben ható belső erő értékét. Az igénybevételi ábrák készítésének menete:

-A normálerő ábrát balról jobbra haladva készítjük el úgy, hogy a vizsgált keresztmetszetig előjelhelyesen összegezzük a tartó tengelyével párhuzamos erőket. A húzó hatású erőt tekintjük pozitívnak.

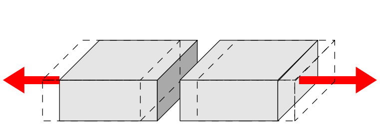
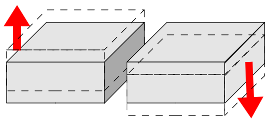
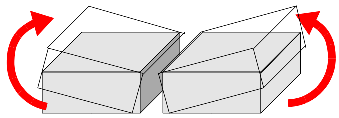
-A nyíróerő ábrát jobbról balra haladva készítjük úgy, hogy a tartó hossztengelyére merőleges erőket abba az irányba felmérjük, amerre ők mutatnak.

-A nyomatéki ábrát balról jobbra haladva készítjük úgy, hogy a már elhagyott nyíróerő ábra területeit előjelhelyesen összegezzük. Tehát szakaszonként kiszámítjuk a nyíróerő ábra terület-darabjait.

Készíthető úgy is az ábra, hogy a vizsgált keresztmetszetre vonatkozóan kiszámítjuk vagy a balra, vagy a jobbra lévő erők nyomatékainak összegét.

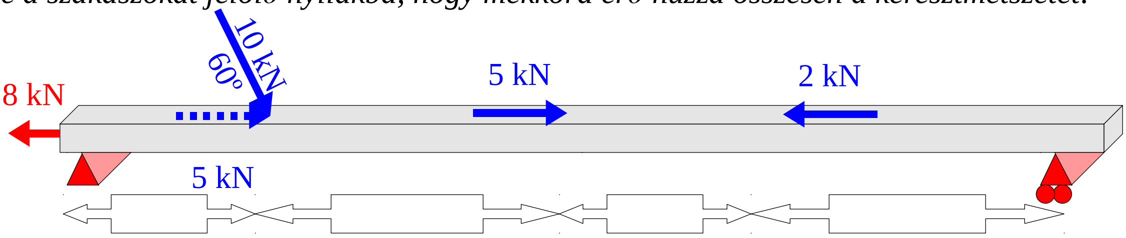
1.Feladat: Igénybevételek típusai

Nevezze meg az ábrázolt igénybevétel típust!

		
…………………………………………	…………………………………………	…………………………………………

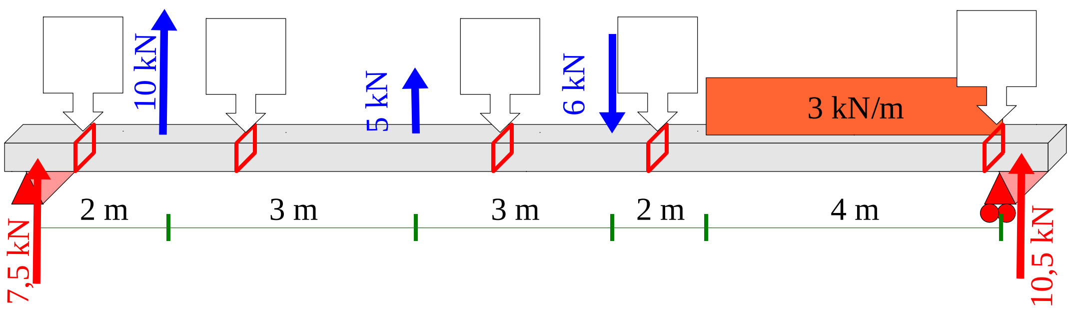
2.Feladat: Normálerő értékek

Írja bele a szakaszokat jelölő nyilakba, hogy mekkora erő húzza összesen a keresztmetszetet!



3.Feladat: Nyíróerő értékek

Írja bele a jelölt keresztmetszet feletti négyzetbe, hogy mekkora erő nyírja összesen a keresztmetszetet!

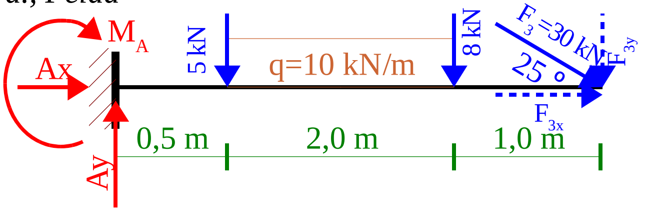


A konzoltartó igénybevételi ábráinak elkészítése során a már kiszámított reakcióerőket és az ismert terheléseket tekintve sorra kell venni az egyes jellemző keresztmetszeteket, s mindegyiknél bejelölni, hogy mekkora az adott keresztmetszetben a húzó-nyomó erő, mekkora a keresztmetszetet elcsúsztatni igyekvő nyíróerő, illetve, hogy mekkora a tartót hajlító nyomaték értéke. A befogásnál keletkezik a legnagyobb nyomaték, a tartó szabad végén pedig nulla nyomaték hat, hacsak nincs a terhelések között a tartóvégre ható nyomaték.

1.Feladat: Konzoltartó igénybevételi ábrái

Az a., feladat áttekintése után oldja meg a b., feladatrészt!

a., Példa



Reakciók számítása:

F_{3x}=..... · ……... …... = ... kN (…...)

F_{3y}=..... · ……... ....= 12,678 kN (…...)

ΣF_x=0=A_x+F_{3x} → A_x= – F_{3x} .... kN (….....)

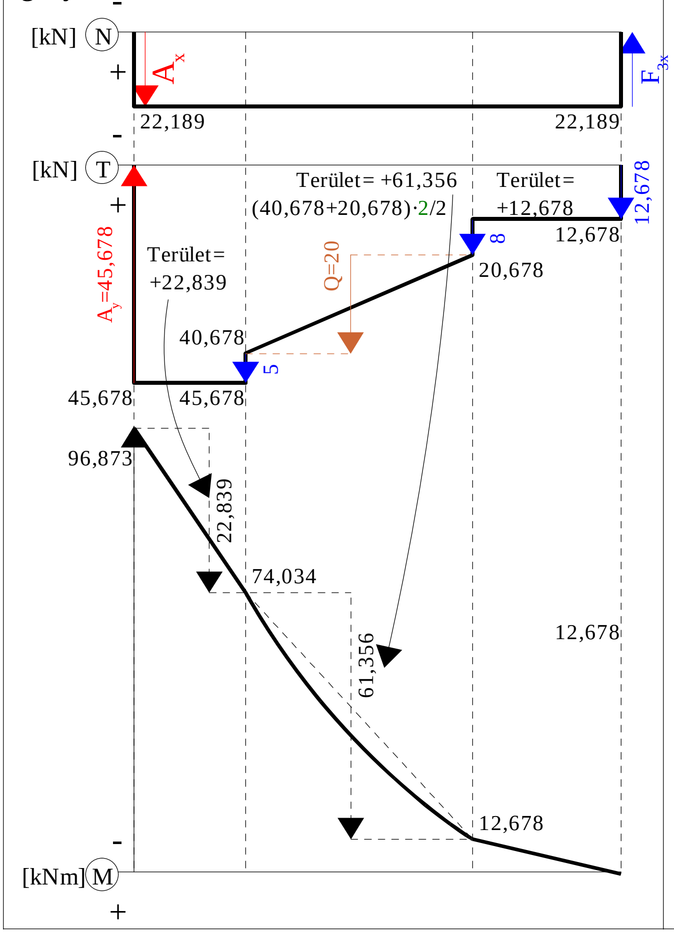
ΣF_y=0= –A_y +............+.......·.......+...........+.........→

A_y=.........kN(...)

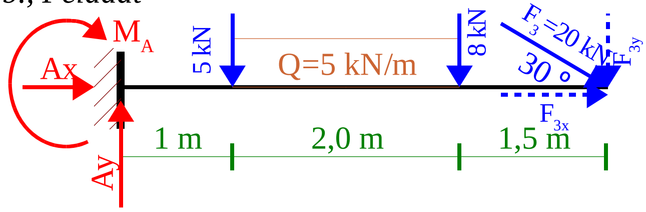
Σ$M^{(A)}$=0=M_A ......·..... ....·....·.... ......·..... .....·......→

M_A= …....96,873........kNm (…..)

Igénybevételi ábrák:



b., Feladat



Reakciók számítása:

F_{3x}=..... · ……... …... = ... kN (…...)

F_{3y}=..... · ……... ....= 12,678 kN (…...)

ΣF_x=0=A_x+F_{3x} → A_x= – F_{3x} .... kN (….....)

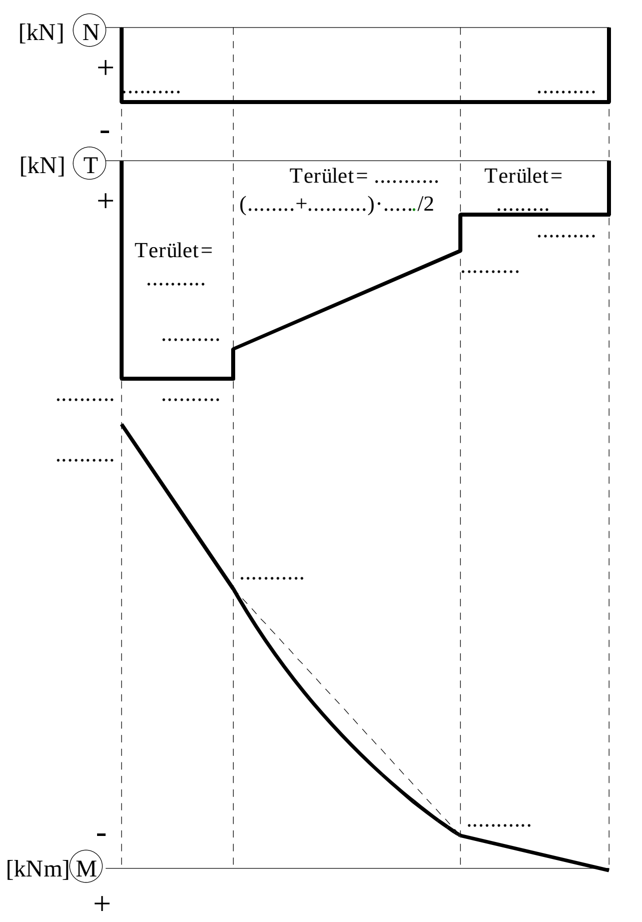
ΣF_y=0= –A_y +............+.......·.......+...........+..........→

A_y=.........kN(...)

Σ$M^{(A)}$=0=M_A ......·..... ....·....·.... ......·..... .....·......→

M_A= …...........kNm (…..)

Igénybevételi ábrák



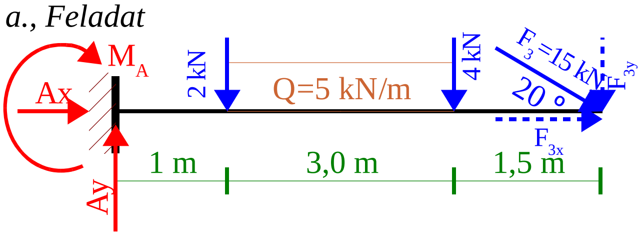
A megoszló erővel terhelt szakaszokon a nyomatéki ábra mindig parabola alakú, amelyre igaz, hogy:

-középen a belógása $\frac{q\cdot l^2}{8}$,ennyit lóg le a parabola a két végpont között, az érintő párhuzamos a húrral

1.Feladat: Konzoltartó igénybevételi ábrái -példa

Oldja meg az a és a b., feladatrészt!

a., Feladat



Reakciók számítása:

F_{3x}=..... · .... = ... kN (......)

F_{3y}=..... · ....= .... kN (......)

ΣF$_x$=0=A_x+F_{3x} → A_x= – F_{3x} .... kN (.......)

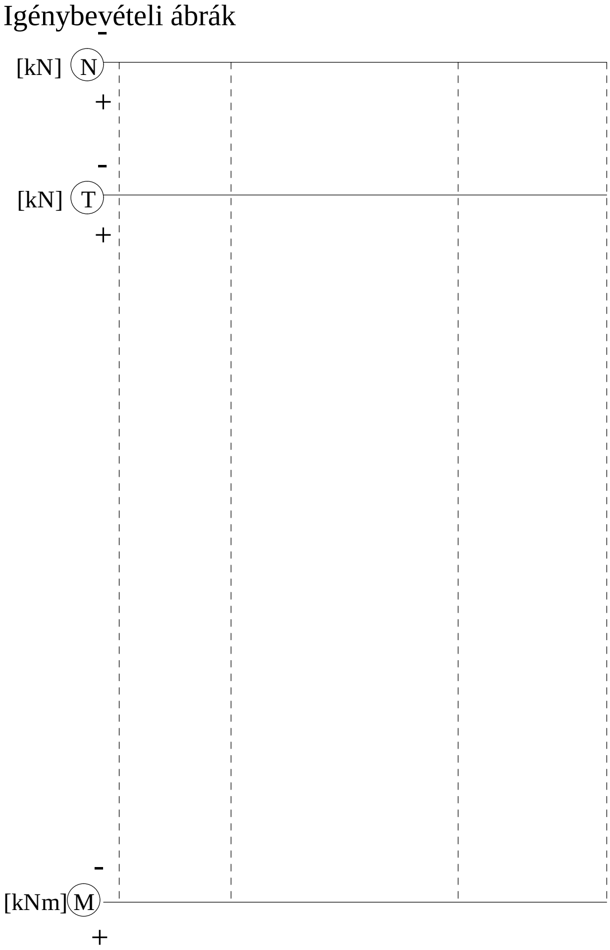
ΣF$_y$=0= –A_y +............+.......·.......+...........+...........→

A_y=..........kN(...)

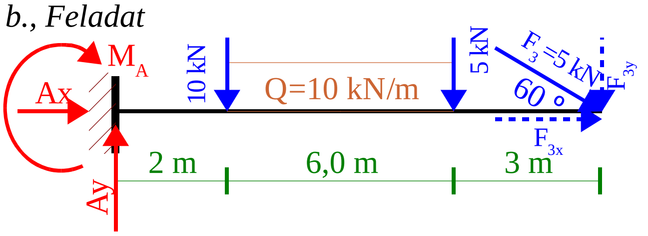
ΣM$^{(A)}$=0=M_A ......·..... ....·....·.... ......·..... .....·......→

M_A= ....kNm (.....)

Igénybevételi ábrák



b., Feladat



Reakciók számítása:

F_{3x}=..... · .... = ... kN (......)

F_{3y}=..... · ....= .... kN (......)

ΣF$_x$=0=A_x+F_{3x} → A_x= – F_{3x} .... kN (.......)

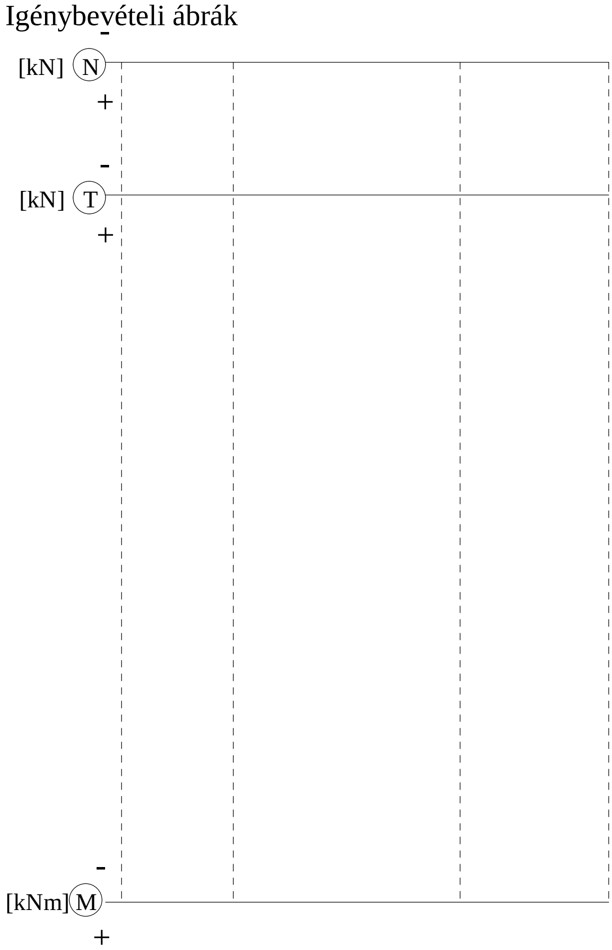
ΣF$_y$=0= –A_y +............+.......·.......+...........+...........→

A_y=..........kN(...)

ΣM$^{(A)}$=0=M_A ......·..... ....·....·.... ......·..... .....·......→

M_A= ....kNm (.....)

Igénybevételi ábrák



A kéttámaszú tartó számítása során gyakran adódik olyan helyzet, hogy a nyíróerő ábra a megoszló erő alatt vált előjelet. Az előjelváltás helye fontos, mert itt lesz a nyomatéknak szélső értéke. Ilyenkor ki kell számítani az előjelváltás helyét, amit x0-lal jelölünk és úgy kaphatjuk meg, hogy a nyíróerő ábra ferde vonalának induló értékét elosztjuk a megoszló erő nagyságával: $x_0=T/q$.

1.Feladat: Kéttámaszú tartó igénybevételi ábrái -gyakorlás

Az a., feladat áttekintése után oldja meg a b., feladatrészt!

$F_{2x}=15\cdot \cos 40^o = 11{,}49$ kN (→)

$F_{2y}=15 \cdot \sin 40^o = 9{,}642$ kN (→)

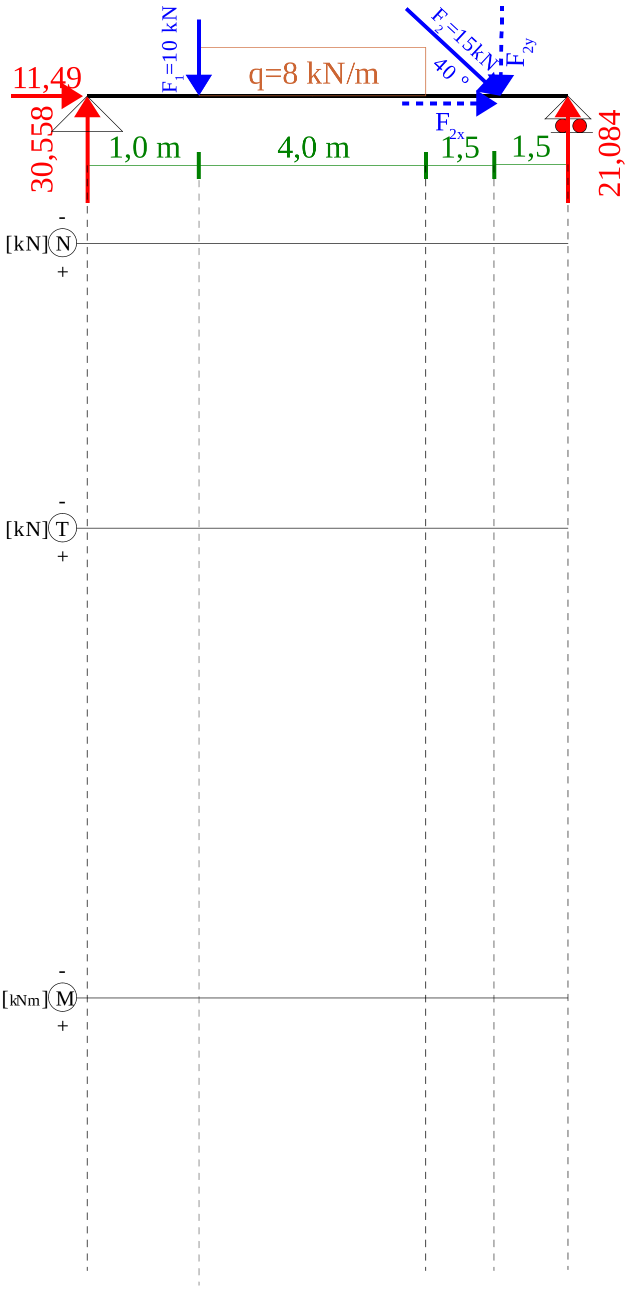
$\Sigma F_x=0=A_x+F_{2x} \rightarrow A_x= - F_{2x}= -11{,}49$ kN (←)

$\Sigma M^{(A)}=0= 8\cdot 4\cdot 3 +10\cdot 1+9{,}642\cdot 6{,}5 \; - B_y\cdot 8$

$168{,}673 - B_y\cdot 8=0 \rightarrow B_y=21{,}084$ kN(↑)

$\Sigma M^{(B)}=0=A_y\cdot 8 - 8\cdot 4\cdot 5- 10\cdot 7- 9{,}642\cdot 1{,}5.$

$A_y\cdot 8-244{,}463 =0 \rightarrow A_y=30{,}558$ kN (↑)



F_{2x}=..... · …....... …... = ... kN (…...)

F_{2y}=..... · …....... ....= .... kN (…...)

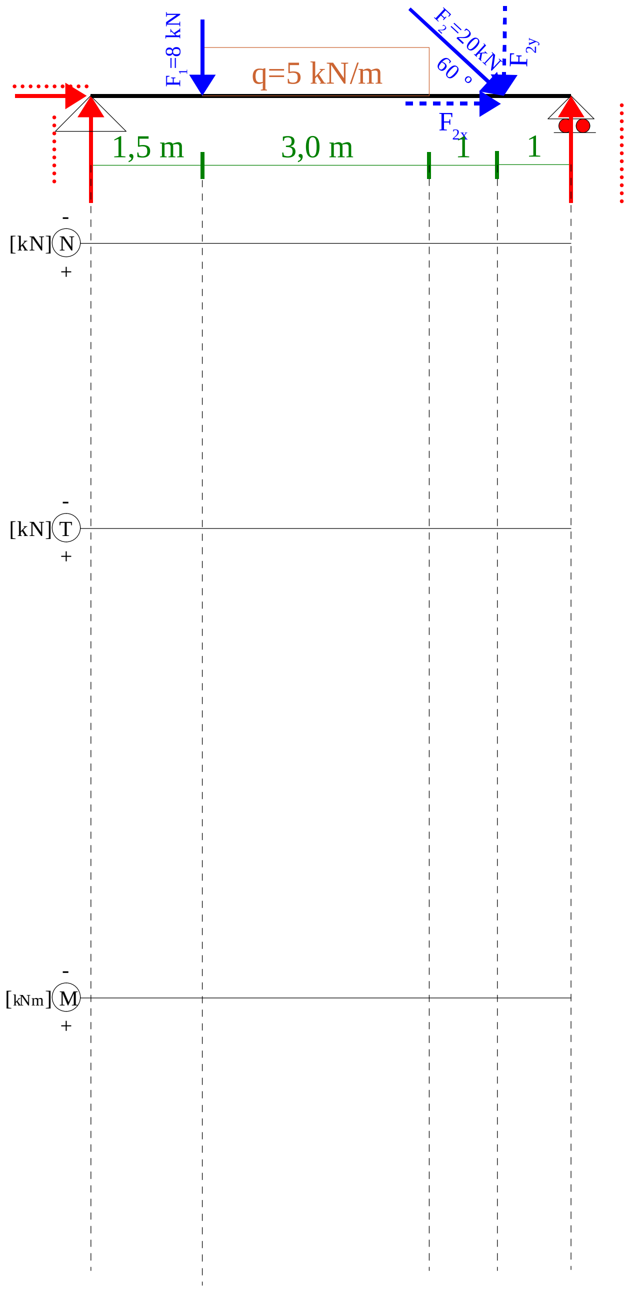
$\Sigma F_x=0=A_x+F_{2x} \rightarrow A_x= - F_{2x}=$ .... kN (....)

$\Sigma M^{(A)}=0=$ ....·....·.... .....·...... ......·..... – $B_y\cdot$ ......

.... – $B_y\cdot$ ......=0 → B_y=.............. kN(....)

$\Sigma M^{(B)}=0=A_y\cdot$ ....·....·.... .....·...... ......·.....

$A_y\cdot$ ....=0 → A_y=.............. kN(....)



Ha a kéttámaszú tartónak van konzolosan kinyúló része, akkor a konzol tövénél általában negatív nyomaték alakul ki.

1.Feladat: Kéttámaszú tartó igénybevételi ábrái -példa

Oldja meg az a., és a b., feladatrészt!

F_{2x}=..... · …....... …... = ... kN (…...)

F_{2y}=..... · …....... ....= .... kN (…...)

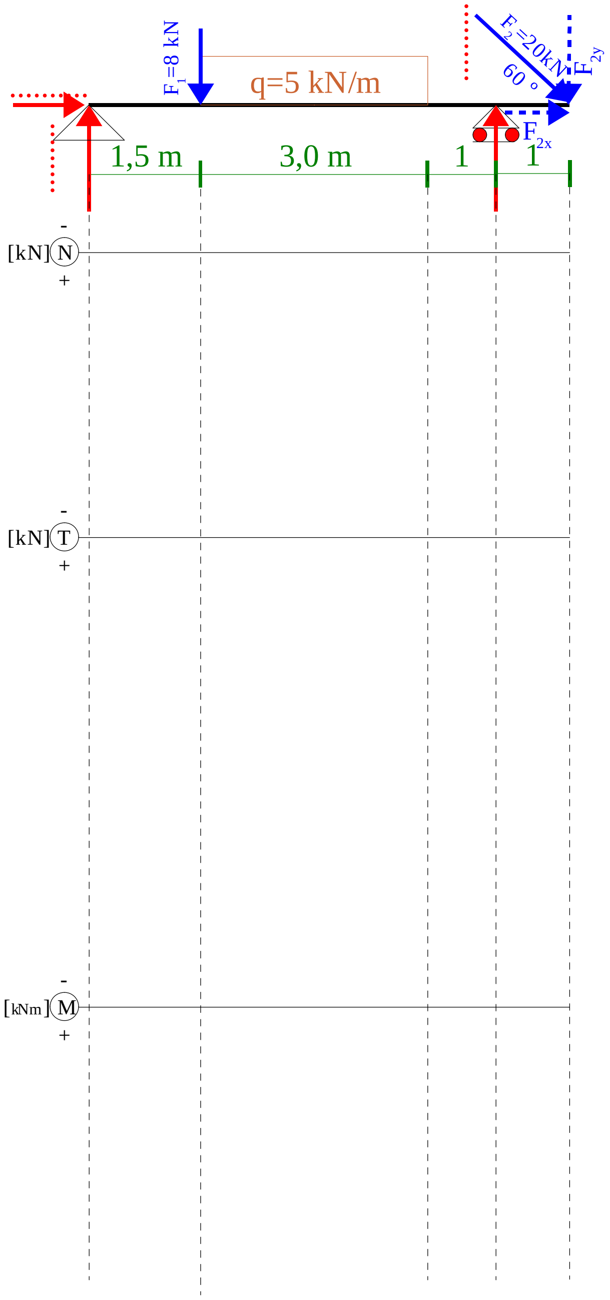
ΣF_x=0=A_x+F_{2x} → A_x= – F_{2x}= .... kN (....)

$\Sigma M^{(A)}$=0= ....·....·.... .....·...... ......·..... – B_y· ......

.... – B_y· ......=0 →B_y=.............. kN(....)

$\Sigma M^{(B)}$=0=A_y· ....·....·.... .....·...... ......·.....

A_y· ....=0 →A_y=.............. kN(....)



F_{2x}=..... · …....... …... = ... kN (…...)

F_{2y}=..... · …....... ....= .... kN (…...)

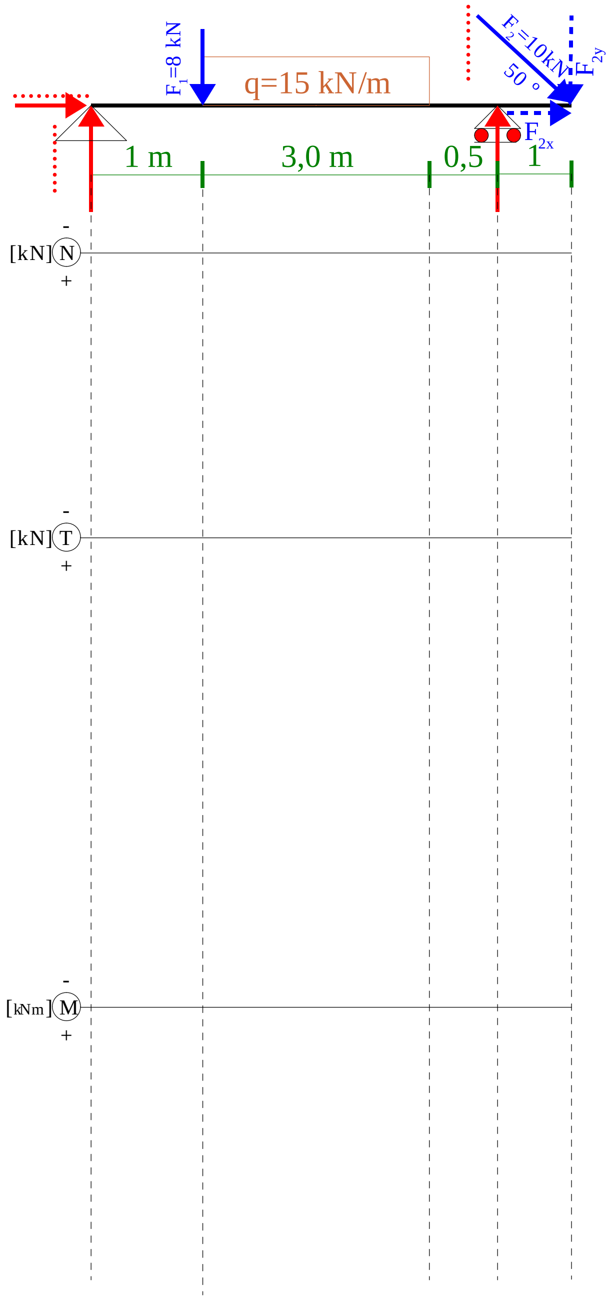
ΣF_x=0=A_x+F_{2x} → A_x= – F_{2x}= .... kN (....)

$\Sigma M^{(A)}$=0= ....·....·.... .....·...... ......·..... – B_y· ......

.... – B_y· ......=0 →B_y=.............. kN(....)

$\Sigma M^{(B)}$=0=A_y· ....·....·.... .....·...... ......·.....

A_y· ....=0 →A_y=.............. kN(....)

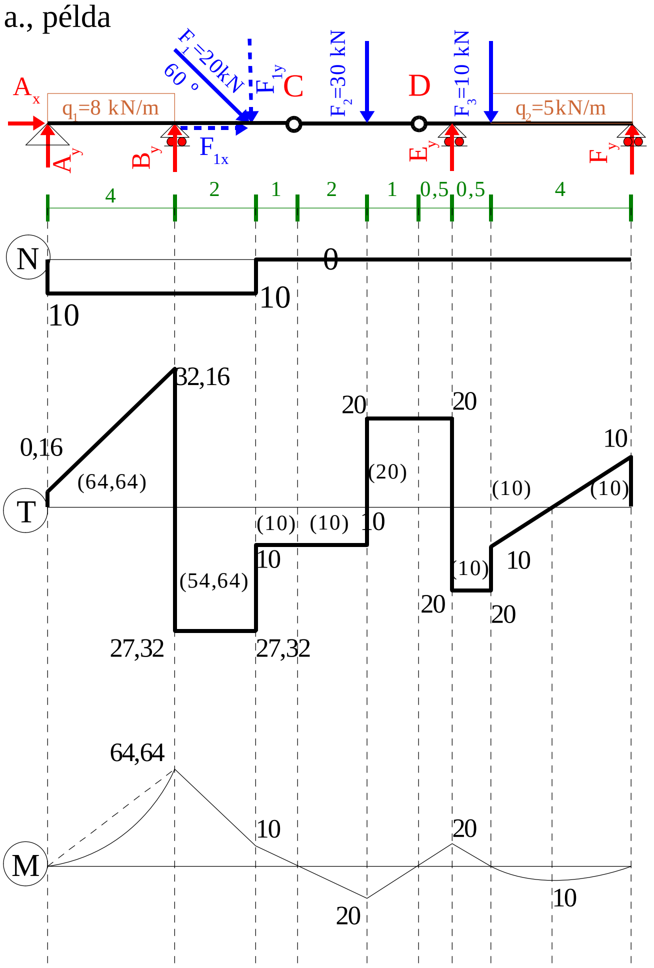


A gerber-tartók igénybevételi ábráit úgy készítjük, hogy a részekre szedett tartón kiszámítjuk a reakcióerőket, majd a teljes tartóra vonatkozóan elkészítjük az ábrákat.

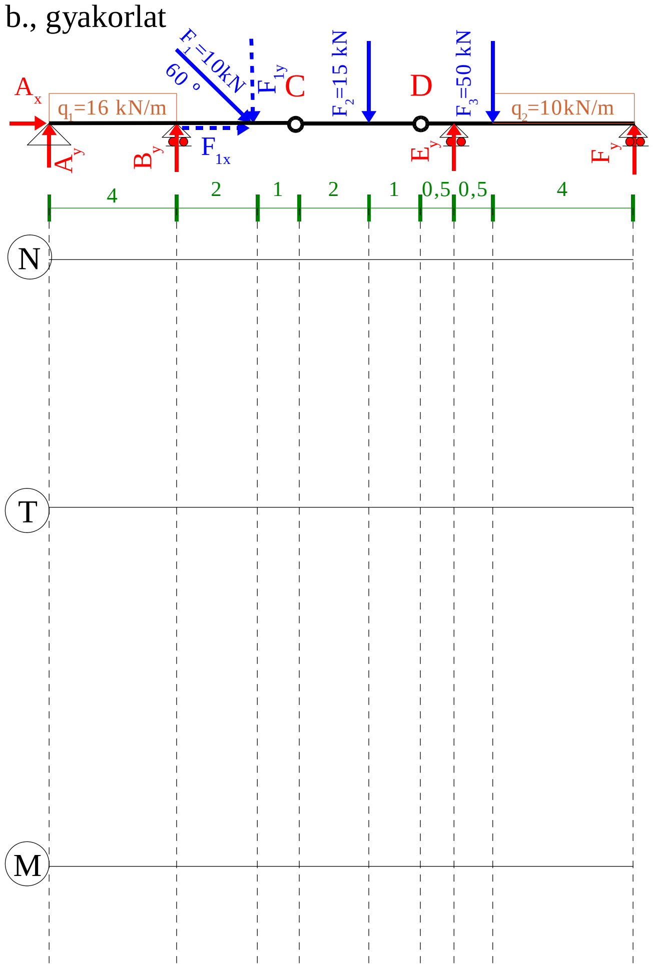
1.Feladat: Gerber-tartó igénybevételi ábrái - példa

Az a., feladat áttekintése után oldja meg a b., feladatrészt!

a., példa



b., gyakorlat



C-D szakasz:

ΣM$^{(c)}$=0= 30·2 – D_y· 3 →D_y=20,000 kN(↑)

ΣM$^{(D)}$=0=C · 3 – 30·1 →C=10,000 kN(↑)

A-C szakasz:

F_{1x}= 10,000 kN (→) F_{1y} = 17,320 kN (↓)

ΣF_x=0=A_x+F_{1x} → A_x= – F_{1x}= –10,00 kN (←)

ΣM$^{(A)}$=0= 8·4·2 – B_y· 4+17,32·6+10·7→

B_y=59,48 kN(↑)

ΣM$^{(B)}$=0=A_y· 4 – 8·4·2 + 17,32·2 +10·3→

A_y= –0,160 kN(↓)

D-F szakasz:

ΣM$^{(E)}$=0= –20·0,5+10·0,5+5·4·2,5–F_y·4,5→

F_y=10,0 kN(↑)

ΣM$^{(F)}$=0= –20·5+E_y·4,5–10·4–5·4·2→

E_y=40,0 kN(↑)

C-D szakasz:

ΣM$^{(c)}$=0= .....·....... – D_y· ...... →D_y=..................... kN(.....)

ΣM$^{(D)}$=0=C · ....– ....·........ →C=................. kN(.....)

A-C szakasz:

F_{1x}= …............. kN (…...) F_{1y} = …............. kN (…...)

ΣF_x=0=A_x+F_{1x} → A_x= – F_{1x}=…............. kN (…...)

ΣM$^{(A)}$=0= …...·.......·........ – B_y· ....+.......·......+......·.......→

B_y=..................... kN(.....)

ΣM$^{(B)}$=0=A_y· ...... – ....·.......·....... + ...·....... +.......·.......→

A_y= …......... kN(.....)

D-F szakasz:

ΣM$^{(E)}$=0= ....·......+.......·.......+.......·.......·.......–F_y·........→

F_y=........ kN(....)

ΣM$^{(F)}$=0=.......·.......+E_y·.......–.......·.......–.......·.......·.......→

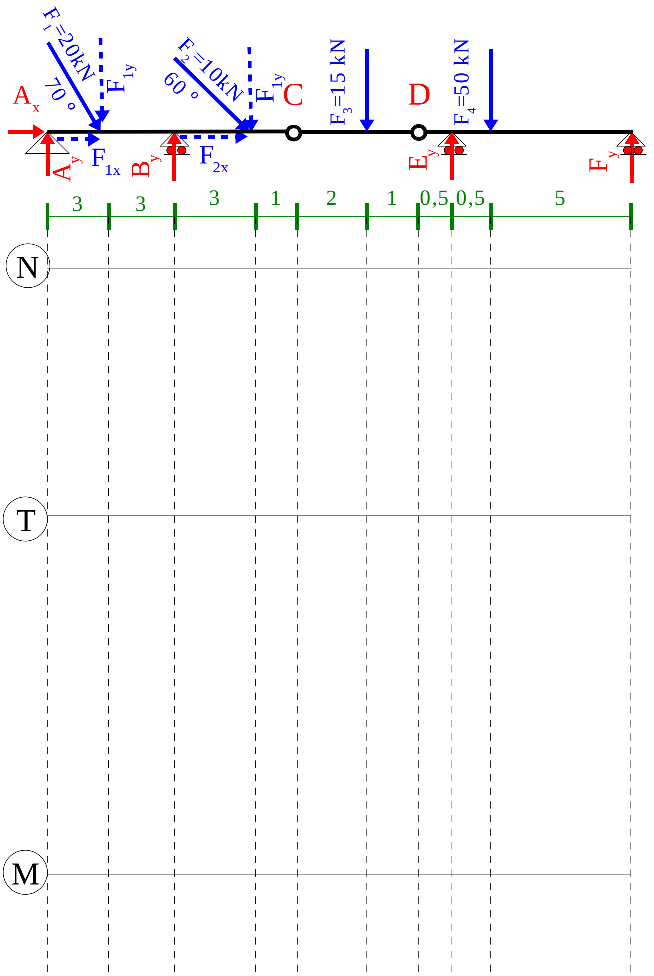
E_y=............kN(.....)

Ha a terhelések között nincs megoszló erő, akkor a nyíróerő ábra csak vízszintes szakaszokból áll, a nyomatéki ábra pedig egyenesekből. Megoszló erő alatt azonban a nyíróerő ábra minden esetbe ferde, a nyomatéki ábra pedig parabola alakú.

1.Feladat: Gerber-tartó igénybevételi ábrái -gyakorlás

Oldja meg az a., és a b., feladatrészt!

a.,



C-D szakasz:

$\Sigma M^{(c)}=0=$ .....·....... – D_y· ...... → D_y=..................... kN(.....)

$\Sigma M^{(D)}=0=C$ · .... – ....·........ → C=................. kN(.....)

A-C szakasz:

F_{1x}= …............. kN (…...) F_{1y} = …............ kN (…...)

F_{12x}= …............. kN (…...) F_{2y} = …............ kN (…...)

$\Sigma F_x=0=A_x$+...........+.......... → A_x= …......... kN (..)

$\Sigma M^{(A)}=0=$ ....·........ – B_y· ....+.......·......+......·.......→

B_y=.................... kN(.....)

$\Sigma M^{(B)}=0=A_y$· ...... –.......·....... + ...·....... +.......·.......→

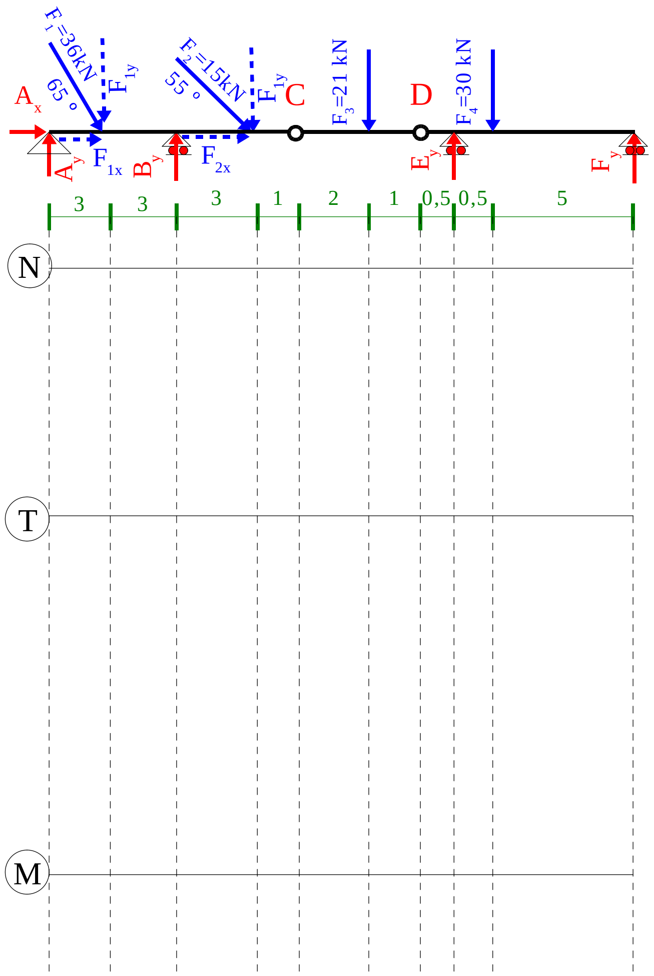
A_y= …......... kN(.....)

D-F szakasz:

$\Sigma M^{(E)}=0=$ ....·......+.......·.......–F_y·........→F_y=........ kN(....)

$\Sigma M^{(F)}=0=$.......·.......+E_y·.......–.......·......→E_y=...........kN(....)

b.,



C-D szakasz:

$\Sigma M^{(c)}=0=$ .....·....... – D_y· ...... → D_y=..................... kN(.....)

$\Sigma M^{(D)}=0=C$ · .... – ....·........ → C=................. kN(.....)

A-C szakasz:

F_{1x}= …............. kN (…...) F_{1y} = …............ kN (…...)

F_{12x}= …............. kN (…...) F_{2y} = …............ kN (…...)

$\Sigma F_x=0=A_x$+...........+.......... → A_x= …......... kN (..)

$\Sigma M^{(A)}=0=$ ....·........ – B_y· ....+.......·......+......·.......→

B_y=.................... kN(.....)

$\Sigma M^{(B)}=0=A_y$· ...... –.......·....... + ...·....... +.......·.......→

A_y= …......... kN(.....)

D-F szakasz:

$\Sigma M^{(E)}=0=$ ....·......+.......·.......–F_y·........→F_y=........ kN(....)

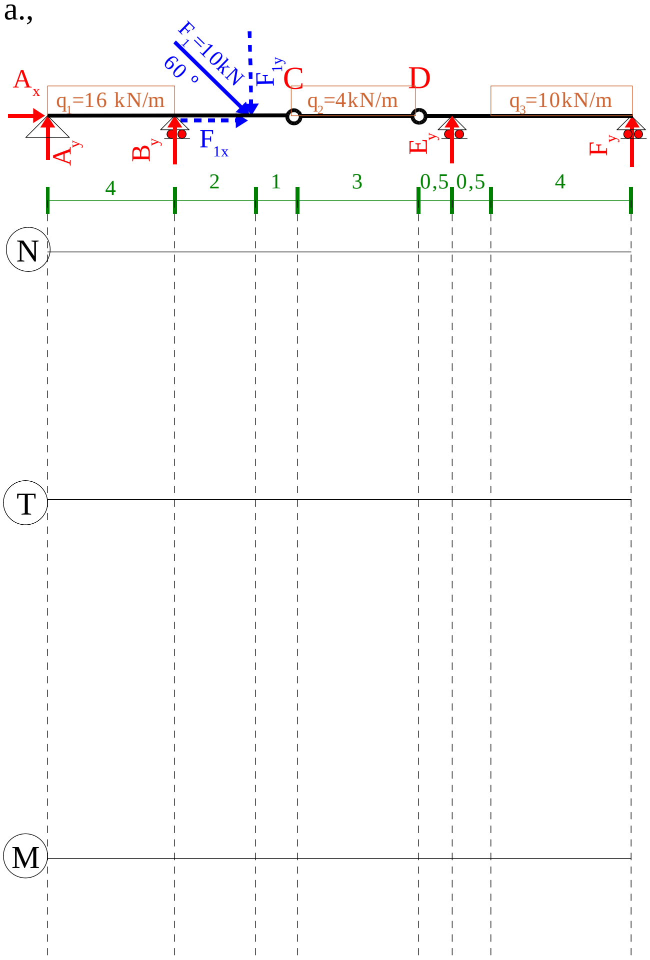
$\Sigma M^{(F)}=0=$.......·.......+E_y·.......–.......·......→E_y=...........kN(....)

A ferde nyíróerő ábra alatt, ahol az ábra átmegy a tengelyen (előjelet vált), ott a nyomatéki ábrának szélsőértéke van. Az előjelváltás helye: $x_0=T/q$ (T a „háromszög” magassága, q pedig a megoszló erő értéke a háromszög felett).

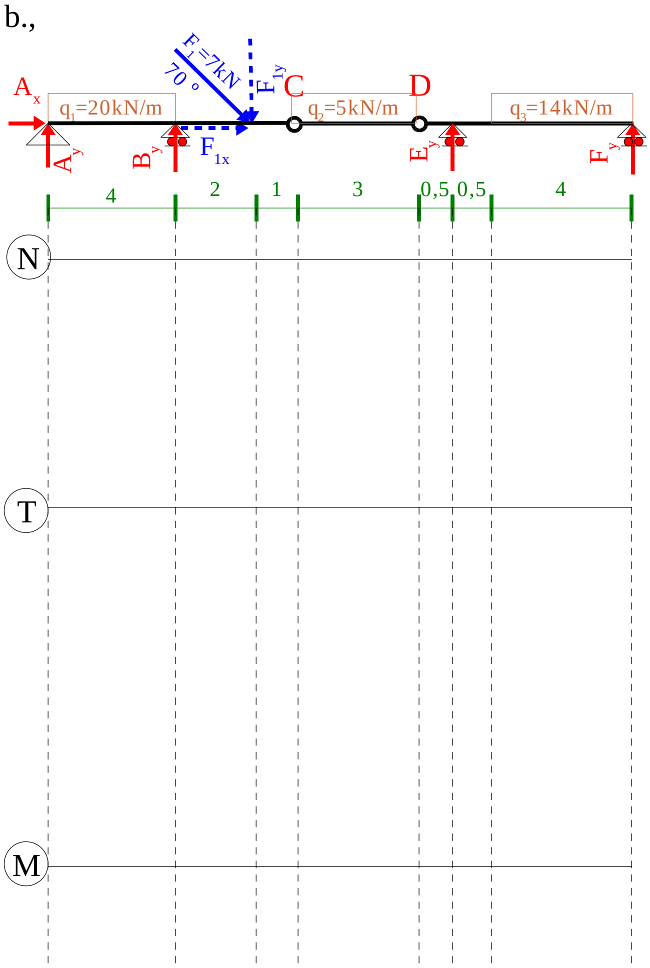
1.Feladat: Gerber-tartó igénybevételi ábrái -gyakorlás

Oldja meg az a., és a b., feladatrészt!

a.,



b.,



C-D szakasz: szimmetrikus, ezért

$D_y=C=$......·......./2=..................... kN(.....)

A-C szakasz:

F_{1x}= …............. kN (…...) F_{1y} = …............ kN (…...)

$\Sigma F_x=0$ $=A_x+F_{1x}\rightarrow A_x=-F_{1x}=$…............... kN (…...)

$\Sigma M^{(A)}=0$= …...·.......·........ – B_y· ....+.......·......+......·.......→

B_y=..................... kN(.....)

$\Sigma M^{(B)}=0$ $=A_y$· ...... – ....·.......·....... + ...·....... +.......·.......→

A_y= …......... kN(.....)

D-F szakasz:

$\Sigma M^{(E)}=0$= ....·......+.......·.......·.......–F_y·........→

F_y=........ kN(....)

$\Sigma M^{(F)}=0$=.......·.......+E_y·.......–.......·.......·.......→

E_y=............kN(.....)

C-D szakasz: szimmetrikus, ezért

$D_y=C=$......·......./2=..................... kN(.....)

A-C szakasz:

F_{1x}= …............. kN (…...) F_{1y} = …............ kN (…...)

$\Sigma F_x=0$ $=A_x+F_{1x}\rightarrow A_x=-F_{1x}=$…............... kN (…...)

$\Sigma M^{(A)}=0$= …...·.......·........ – B_y· ....+.......·......+......·.......→

B_y=..................... kN(.....)

$\Sigma M^{(B)}=0$ $=A_y$· ...... – ....·.......·....... + ...·....... +.......·.......→

A_y= …......... kN(.....)

D-F szakasz:

$\Sigma M^{(E)}=0$= ....·......+.......·.......·.......–F_y·........→

F_y=........ kN(....)

$\Sigma M^{(F)}=0$=.......·.......+E_y·.......–.......·.......·.......→

E_y=............kN(.....)