

VI. SZILÁRDSÁGTAN

1. A szilárdságtan tárgya

1.1. Alapfogalmak

A „Szilárdságtan” a rugalmas testek statikájával foglalkozik. Azokkal az összefüggésekkel, elméletekkel, amelyek a gépek, alkatrészek, szerkezetek megfelelő működésének biztosításához szükségesek. E tananyagrészt a mechanika egyik legfontosabb ága.

A **szilárdságtani vizsgálatok** fajtái:

1. A gépek, alkatrészek, szerkezetek méreteit úgy kell meghatározni, hogy a terhelésből adódó igénybevételt károsodás (törés, szakadás) nélkül elbírák, illetve működés közben méreteik, alakjuk csak a megengedett határokon belül változzanak. Az olyan mechanikai számítások, amelyek ezeket a feltételeket kielégítik, a szilárdságtani *méretezések (tervezések)*.

Ahhoz, hogy méretezni tudjunk, el kell tudnunk dönteni milyen igénybevételnek lesz kitéve a szerkezet, és szükségünk van a szilárdságtani törvények ismeretére.

Az *egyszerű igénybevételek* lehetnek:

- a) húzó, nyomó,
- b) hajlító,
- c) nyíró,
- d) csavaró igénybevételek.

Ha a szerkezetre egyidejűleg többféle igénybevétel hat, akkor *összetett igénybevételről* beszélünk.

2. A már működő gépek, alkatrészek, szerkezetek méreteit (pl. keresztmetszeteit) felmérjük; szilárdságtani és egyéb ismereteink (anyagjellemzők) alapján eldöntjük, hogy azok megfelelnek-e az igénybevételnek (bírák-e az igénybevételt károsodás nélkül.) Ez a szilárdságtani vizsgálat az *ellenőrzés*.

Tervezéskor és ellenőrzéskor az a fő szempont, hogy a gépalkatrészek az igénybevételek hatására csak akkora alakváltozásokat szenvedjenek, amelyek a terhelés megszűnte után eltűnnek. (Nem lehet maradó alakváltozás!).

A méretezéskor és ellenőrzéskor a következőkre is gondolnunk kell:

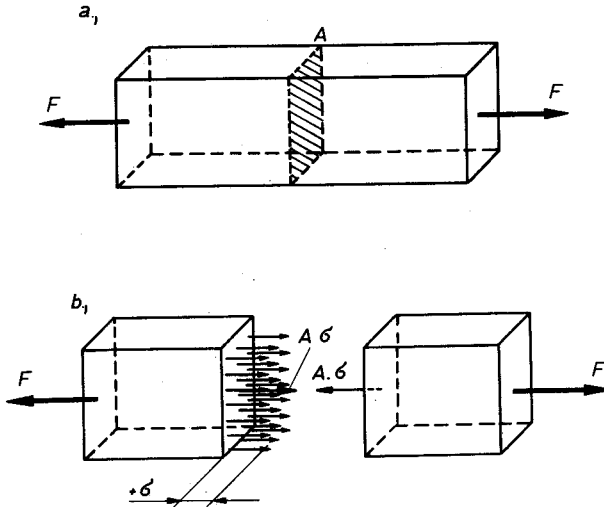
- a) biztonság,
- b) anyagtakarékosság,
- c) megfelelő élettartam,
- d) korszerűség.

E négy szempont szoros kölcsönhatásban van egymással.

Mielőtt a tananyag részletes tárgyalását elkezdenénk szükséges leszögeznünk: az egyensúlyban levő testekre, szerkezetekre vonatkozó, a statikában megismert törvények a szilárdságtanban is érvényesek. Ezért célszerű ezeket átismételni. Továbbá a számításoknál, szilárdságtani vizsgálatoknál a szabványok és az SI mértérendszer figyelembevételével dolgozunk.

1.2. A szakítóvizsgálat

Mielőtt a szakítóvizsgálattal megismerkednénk, tételezzük fel, hogy egy végig állandó keresztmetszetű rúd, a 69. a) ábrán látható módon F húzóerő terhel. A rúd keresztmetszetének területét A -val jelöljük (mértékegysége: m^2 vagy cm^2). A rúd a ráható erők következtében egyensúlyban van.



69. ábra

Rugalmas, végig egynemű (homogén) anyagból készült rúdnál az egyensúly magyarázata a következő: a rúd támadó F külső erővel a jelölt A keresztmetszet részein megoszló belső erők tartanak egyensúlyt. Ha az F erőt megnöveljük, a rúd megnyúlik és a belső erők is megnövekednek (alakváltozás jön létre).

Az egyensúly akkor szűnik meg, ha olyan nagyra növeljük az F erőt, hogy a rúd elszakad: a belső erők már nem tudnak egyensúlyt tartani a külső erővel.

Ha ezt a kísérletet többféle anyagból készült, de azonos méretű rúddal megismételjük, akkor azt tapasztaljuk, hogy nem egyforma alakváltozásnál (megnyúlásnál) szakadnak el. A keletkező belső erők attól is függenek, hogy milyen minőségű anyagból van a rúd.

A statikában tanultuk, hogy ha egy szerkezet, test egyensúlyban van, akkor minden része külön-külön is egyensúlyban van. Ezt láthatjuk a 69. b) ábrán, ahol az F külső erő hatására a keresztmetszet egész területén megoszló belső erők lépnek fel.

A felületegységre eső belső erő a feszültség. A feszültség mértékegységének neve az SI mértékrendszerben pascal (paszkál), jele: Pa. Származtatása:

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Ez nagyon kis érték. A gyakorlatban ennek ezerszeresét (kPa) vagy milliószorosát (MPa) használjuk.

(Blaise Pascal (1623–1662) francia matematikus és filozófus volt.)

Ha a belső erő merőleges a felületre, akkor *normális feszültségről* beszélünk.

Jele: σ (szigma), mértékegysége szintén: $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Azaz

$$F = A\sigma$$

$$\text{vagy } \sigma = \frac{F}{A} \quad \text{vagy} \quad A = \frac{F}{\sigma}.$$

Megjegyezzük, hogy régebben $\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ -ben, ill. $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ -ben adták meg a feszültséget. A mértékegységek

közötti kapcsolat a következő:

$$1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 1 \text{ MPa},$$

$$1 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 98\,066,5 \text{ Pa} \approx 0,1 \text{ MPa},$$

$$1 \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2} \sim 10 \text{ MPa},$$

$$1 \text{ Pa} \sim 1,0197 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}.$$

Az előzőekben említettük, hogy a szakadás pillanatában keletkező belső erő, feszültség anyagonként változó. Változó a megnyúlás, azaz az alakváltozás mértéke is. Ezek szerint, ha egyforma méretű, de eltérő anyagú rudaknál vizsgáljuk a terhelő erők hatására fellépő alakváltozások nagyságát, akkor értékes mechanikai anyagjellemzők birtokába juthatunk. Ezt felismerve az anyag- és gyártásismeret (technológia) tudományának egy része, az anyagvizsgálat kifejlesztette a maga módszereit az anyagok mechanikai igénybevehetőségének meghatározására. Ebből az egyik módszer a szakítóvizsgálat (MSZ 105/1–72).

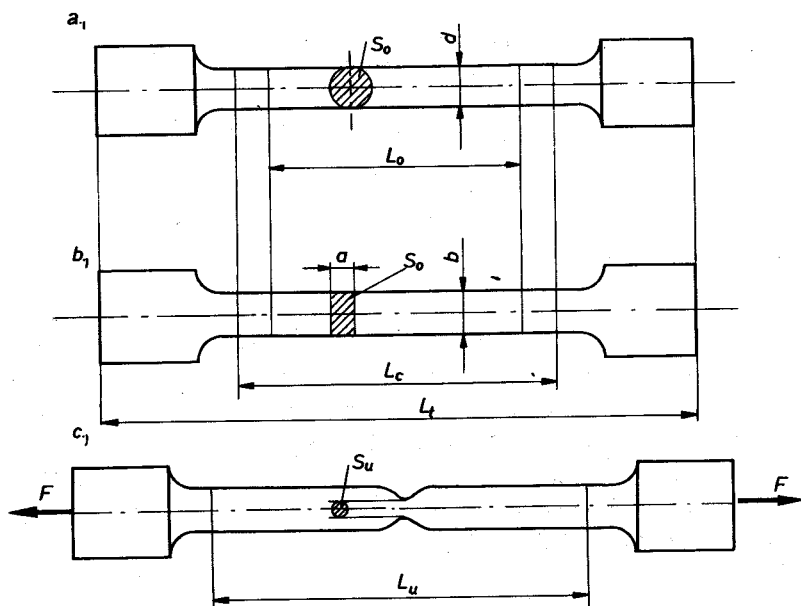
A 70. a), b) ábrán két szabványos próbatestet láthatunk. Ezeket a próbatesteket $20 \pm 10 \text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékleten, az előírásoknak megfelelően szakítógépből növekvő erővel terhelik (húzás). A 70. c) ábrán a szakadás előtti állapotot rajzoltuk fel.

Az ábrákon megadott szabványos jelölések a következőket jelentik:

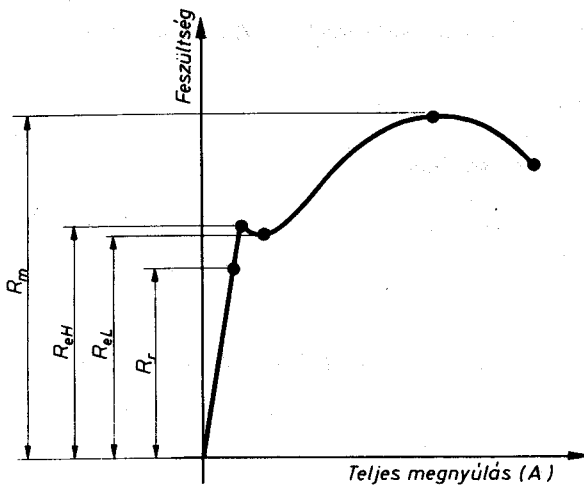
- S_0 : a vizsgált szakasz eredeti keresztmetszete (mm^2),
- d : a hengeres próbatest vizsgálati hosszának átmérője (mm),
- a : a hasáb alakú próbatest vastagság (mm),
- b : a hasáb alakú próbatest vizsgálati hosszának szélessége (mm),
- L_0 : eredeti jeltávolság (mm),
- L_c : a vizsgálati hossz (mm),
- L_t : a teljes hossz (mm),
- L_u : a jeltávolság szakadás után (mm),
- S_u : a próbatest legkisebb keresztmetszete szakadás után (mm^2).

A szakítógéphez diagramíró berendezés is tartozik, ami a terhelés függvényében ábrázolja a szakítás folyamatát (a próbatest nyúlását). Az így kapott görbe a szakítódiagram.

Elemezzük egy lágyacél szakítódiagramját, a 71. ábra alapján! A függőleges tengelyre a feszültséget, a vízszintes tengelyre a teljes megnyúlást mérjük. (Anyagvizsgálatban az MSZ 105 szerint a feszültség jele: R .)



70. ábra



71. ábra

A diagram kiemelt pontjai a következők:

R_r : a 0,002% maradó nyúláshoz tartozó feszültség (rugalmassági határ): $\frac{N}{mm^2}$;

R_{eH} : felső folyáshatár (abból a terhelő erőből számítjuk, amelynél a képlékeny alakváltozás megindul): $\frac{N}{mm^2}$;

R_{eL} : alsó folyáshatár (folyás közben, a legkisebb terhelő erőből számított feszültség): $\frac{N}{mm^2}$;

R_m : szakítószilárdság (a vizsgálat közben mért legnagyobb terhelés és az eredeti keresztmetszet hányadosa): $\frac{N}{mm^2}$.

A szakadási nyúlás (teljes megnyúlás):

$$\frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100 (\%),$$

A diagram tehát jól mutatja a rugalmas és maradó alakváltozás folyamatát és jellemző határértégeit.

A szilárdságtan a rugalmas testek statikájával foglalkozik, ezért általában csak akkora terhelést enged meg, amí még nem okoz maradó alakváltozást. Így szilárdságtani tanulmányainknál bennünket a szakítódigrammból csak az a rész érdekel, ahol kicsik a megnyúlások.

Arra is felhívjuk a figyelmet, hogy a mechanikában továbbra is σ -val jelöljük a feszültséget, és mértékegységéül a $\frac{N}{m^2}$ -t választjuk.

A mechanikában használatos jelölésekkel a 72. ábrán látható a szakítódiagram:

σ_P = arányossági határ,

σ_E = rugalmassági határ,

σ_F = folyáshatár,

$\sigma_B = R_m =$ szakítószilárdság.

Rugalmasnak tekintjük azt az alakváltozást, amelynél a terhelés megszüntetése után a próbatest visszanyeri eredeti alakját:

$$\sigma < \sigma_E.$$

A megnyúlás: $\Delta l = l_1 - l_0$ (vagy: $L_1 - L_0$), mértékegysége: m (cm).

l_0 (L_0) = eredeti hossz, l_1 (L_1) = megnyúlt hossz.

A fajlagos megnyúlás: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$.

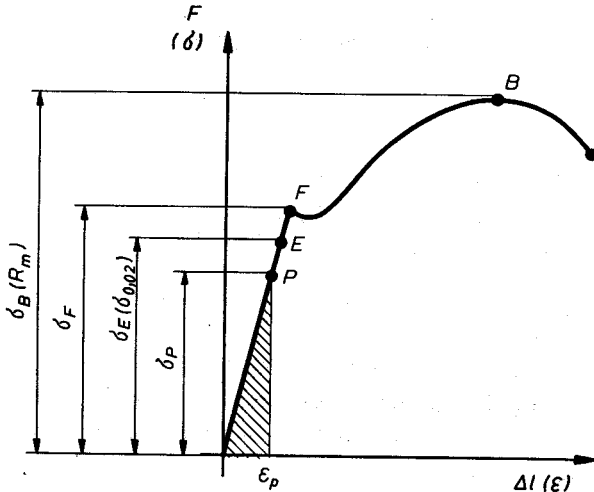
A fajlagos keresztirányú méretváltozás:

$$\varepsilon_k = \frac{d_1 - d_0}{d_0} \quad (d \text{ az átmérők jele}).$$

A fajlagos értékek hányadosa:

$$\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} = \nu \quad (\text{görög nú betű}) \text{ a Poisson-féle szám.}$$

Szilárdságtani számításainknál (méretezés, tervezés, ellenőrzés) csak akkor feszültség és alakváltozás értékeket engedünk meg, amelyek σ_P -nél és ε_P -nél kisebbek.



72. ábra

1.3. A normális és csúsztató feszültségek

A 69. ábrán már bemutattuk a feszültség és a normálfeszültség fogalmát. Láthatuk, hogy a feszültség iránya megegyezik a terhelőerő irányával, értelme vele ellentétes, nagyságát a 69. b) ábrán bejelöltük. A leírt tulajdonságok alapján a feszültség vektormennyiség.

A 69. b) ábra szerint rajzolt feszültség húzófeszültség: $(+\sigma)$. A 73. ábrán a nyomófeszültséget $(-\sigma)$ szemléltetjük.

A következőkben vizsgáljuk meg egy húzott rúd ferde metszetében ébredő feszültségeket (74. ábra).

A rúd A_1 keresztmetszetén az F erővel a $q \cdot A_1$ tart egyensúlyt. A q feszültségek iránya megegyezik az F terhelőerő irányával, de az A_1 keresztmetszethez képest általános helyzetűek.

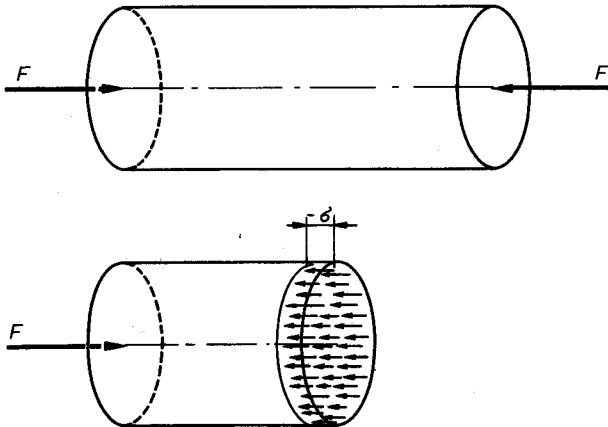
Írjuk fel az egyensúly feltételét!

$$F - q \cdot A_1 = 0,$$

$$F = q \cdot A_1,$$

$$q = \frac{F}{A_1}.$$

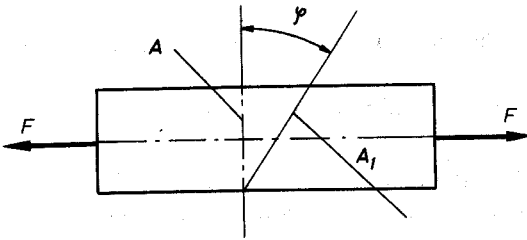
Látható, hogy a feszültség így is a terhelőerő és a felület hányadosa. Tudjuk viszont azt, hogy a feszültség vektormennyiség, és ha ez így van, akkor a q feszültség felbontható két merőleges összetevőre.



73. ábra

Jelöljük ki egy $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ méretű felületelemet és végezzük el a felbontást! Két feszültséget kapunk:

1. a felületre merőleges σ normális feszültséget;
2. a keresztmetszet síkjába eső τ csúsztató feszültséget. (Ez a σ feszültségre merőleges).



A két összetevő nagyságát az ábra alapján kiszámíthatjuk:

$$\sigma = \rho \cdot \cos \varphi,$$

$$\tau = \rho \cdot \sin \varphi.$$

A 75. ábrán felrajzoltunk egy 1 cm élhosszúságú kockát, amelyet egyensúlyban levő erőkkel terhelt testből metszettünk ki. Az y tengelyre számított nyomatékok egyensúlya alapján egyszerűen bebizonyíthatók a következő állítások:

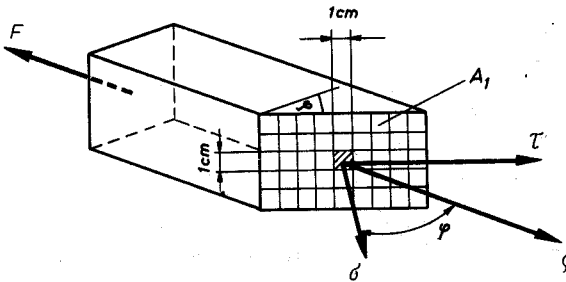
1. Ha egy síkban τ feszültség ébred (pl. a kocka felső lapján), akkor a rá merőleges síkban ugyanakkora τ feszültség lép fel.

2. Az egymásra merőleges síkokban a feszültségek vektorai vagy a síkok metszésvonala felé, vagy attól elmutató értelműek.

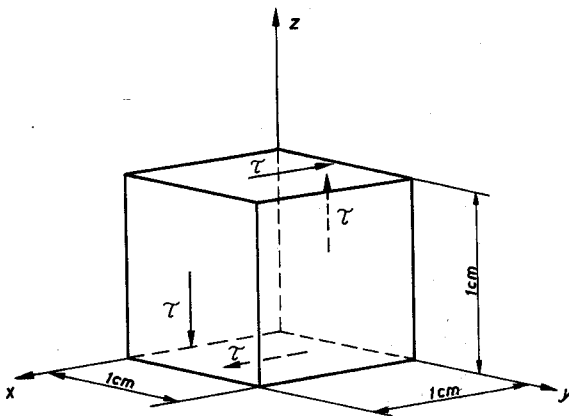
3. A bemutatott esetben az $x-z$ síkkal párhuzamos síkokban nem ébred τ feszültség.

A szilárdságtanban az 1. tételt a csúsztatófeszültségek dualitásának nevezzük.

A tételeket a későbbiekben alkalmazni fogjuk.



74. ábra



75. ábra

1.4. A Hooke-törvény

A különböző anyagok (fémek) szakítóvizsgálatakor azt tapasztaltuk, hogy a szakítódiagramok O–P-ig terjedő szakasza egyenes, a fajlagos méretváltozás és a feszültség arányos.

Ha a 76. ábrán megnézzük az O 1 ε_1 , O 2 ε_2 és OP ε_p háromszögeket, e háromszögek hasonlóak, vagyis megfelelő oldalaik aránya megegyezik. Felírható tehát, hogy

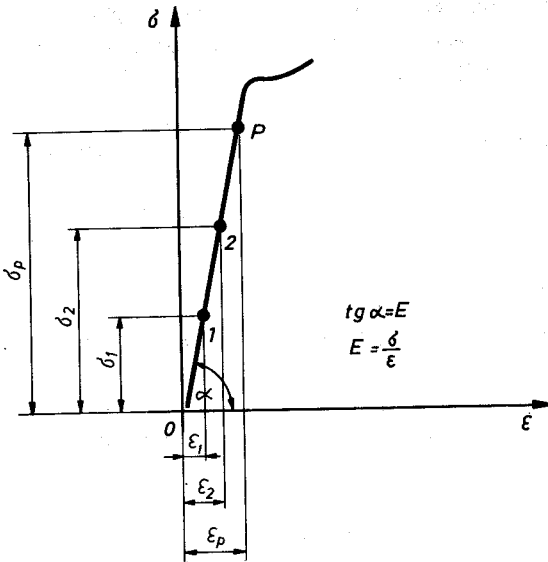
$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \dots = \frac{\sigma_P}{\varepsilon_P}$$

Az arányossági határon belül tehát a két mennyiség hányadosa állandó:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$$

Ez az állandó anyagonként más és más értékű, de jellemző az anyag rugalmasságára, rugalmassági tényezőnek (modulusnak) nevezzük, és E betűvel jelöljük. Mértékegysége:

$$\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{ (feszültség dimenziójú).}$$



76. ábra

A feszültség és a hosszváltozás között fennálló arányosság a Hooke-törvény. E tapasztalati törvény nagyon jól jellemzi a különböző anyagok viselkedését húzó, nyomó igénybevételnél. A szilárdságtan alaptételének is nevezik.

Robert Hooke (1635–1703) holland származású tudós-tanár volt, a Gresham College-ben tanított, az anyagok rugalmas tulajdonságát vizsgálta.

Az E rugalmassági tényezőt úgy is megkaphatjuk, ha meghatározzuk a szakítódiagram OP szakaszának meredekségét. A 76. ábra derékszögű háromszögeből fejezzük ki $\text{tg } \alpha$ -t:

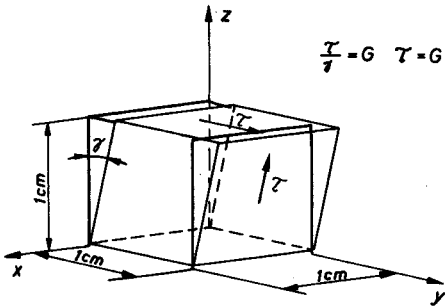
$$\text{tg } \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \text{ azaz } E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Kísérletek alapján E értéke:

Acélra: $E = 200 \text{ GPa} - 215 \text{ GPa} \quad (2 \cdot 10^6 - 2,15 \cdot 10^6 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2})$.

Öntöttvasra: $E = 75 \text{ GPa} - 105 \text{ GPa} \quad (7,5 \cdot 10^5 - 1,05 \cdot 10^6 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2})$.

Alumíniumra: $E = 65 \text{ GPa} - 75 \text{ GPa} \quad (6,5 \cdot 10^5 - 7,5 \cdot 10^5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2})$.



77. ábra

Vizsgáljuk meg ezek után, hogy a τ feszültségek milyen alakváltozást hoznak létre!

A 77. ábrán egy 1 cm élhosszúságú kockát ábrázoltunk, amelyet az xy síkon rögzítettünk. A kis kockát egyensúlyban levő erőkkel terhelt testből metszettük ki. A kocka zy síkra merőleges alapjait τ feszültség terheli. A kocka a feszültségek hatására a vázolt módon torzul, lapszögei megváltoznak. Ezt a változást γ -val jelöltük.

A csúszatófeszültség és a szögváltozás hányadosa a csúszató rugalmassági tényező.

Jele: G , mértékegysége: $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

$$\frac{\tau}{\gamma} = G.$$

Ez a csúszatófeszültségre vonatkozó Hooke-törvény (hasonlít a normálfeszültségre vonatkozó törvényhez).

Kísérletekkel igazolták, hogy a különféle anyagokra is igaz az összefüggés, de a G értéke anyagonként eltérő.

Acélra: $G = 80 \text{ GPa} - 85 \text{ GPa} \quad (8 \cdot 10^5 - 8,5 \cdot 10^5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2})$.

Öntöttvasra: $G = 30 \text{ GPa} - 40 \text{ GPa} \quad (3 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2})$.

Alumíniumra: $G = 25 \text{ GPa} - 30 \text{ GPa} \quad (2,5 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2})$.

A két anyagjellemző értéke nem független egymástól: $G \approx 0,4 E$.

Összefoglalva:

- ha egy rúdnál hosszváltozás jön létre, azt a σ feszültségek,
- ha szögváltozás jön létre azt a τ feszültségek okozzák.

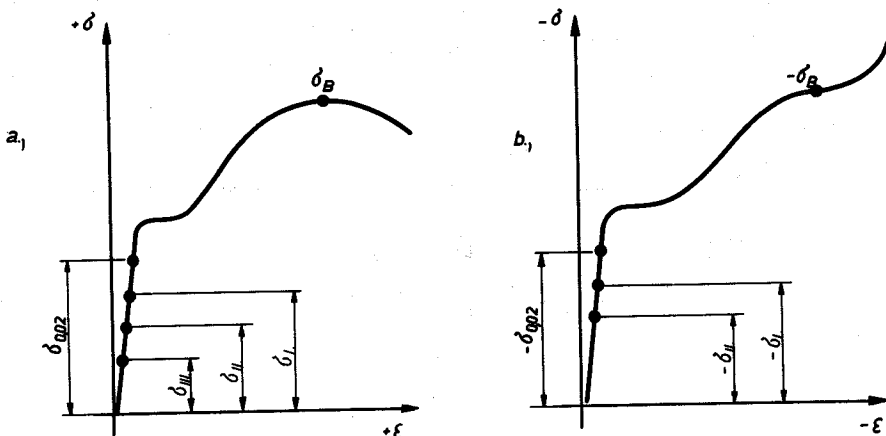
2. A húzó és nyomó igénybevétel

A húzó- és nyomófeszültségekkel már megismerkedtünk. A következőkben a húzás és nyomás – mint alap-igénybevételek – okozta alakváltozásokkal, illetve hatásukra fellépő feszültségekkel foglalkozunk.

2.1. Terhelési módok

Bevezetésül vizsgáljuk meg a 78. ábrát. Itt egy húzó- és egy nyomódiagramot ábrázoltunk. A 78. a) ábrán a $+\sigma_B$ a szakítószilárdságot, a 78. b) ábrán a $-\sigma_B$ a törőszilárdságot jelenti. A két diagram kezdő, egyenes szakasza egyezik (abszolút feszültség és abszolút fajlagos megnyúlás értékekben). A gépalkatrészek méretezésénél az a törekvésünk, hogy az alkatrészekben keletkező feszültség ne érje el a rugalmassági határt ($\sigma < 0,02$), mert 0,02%-nyi maradó alakváltozás káros.

A gépalkatrész szempontjából nem mindegy az, hogy azt csak állandó értékű húzóerő, vagy csak állandó értékű nyomóerő terheli, vagy változó igénybevételnek van kitéve. Nyilvánvaló, hogy az utóbbi fárasztja leginkább a gépalkatrészt.



78. ábra

A terhelés módja szerint a következő megkülönböztetéseket használjuk:

I. *Nyugvó vagy statikus* terhelés, amikor a szerkezetet, gépalkatrészt állandó vagy közel állandó erő terheli (pl. üzemszarnokok, tetők tartóoszlopai).

II. *Lüktető vagy változó* terhelés, amikor a szerkezetre ható erő zérus értéktől egy maximális értékig változhat (pl. darukötél, felvonókötél).

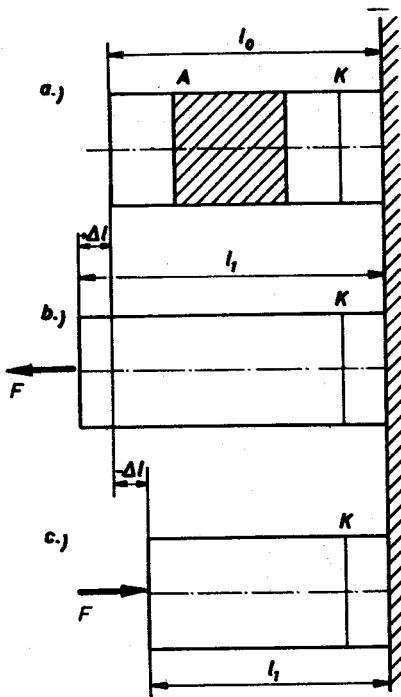
III. *Lengő vagy váltakozó* terhelés, amikor a gépalkatrészre váltakozva húzó és nyomó igénybevétel hat (pl. hajtórudak).

A három terhelési módot *Wöhler-féle terhelési eseteknek* nevezzük. [Friedrich Wöhler (1800–1882) német tudós volt.]

E háromfajta terhelési módra határozta meg különböző anyagoknál Wöhler és Bach a *megengedhető feszültségértéket* (σ_{meg}), amely minden esetben kisebb, mint az anyagok rugalmassági határa. A feszültségértékeket táblázatokból kereshetjük ki. (Lásd a példatárban!)

Jegyezzük meg, hogy a 78. ábrán látható diagramok szívós anyagokra vonatkoznak és ezért az eltérő (húzó, nyomó) terhelési módokhoz tartozó megengedett feszültségek megegyeznek. Rideg anyagoknál nyomó igénybevétel esetén nagyobb a megengedett feszültség, mint húzás esetén.

2.2. A feszültség és az alakváltozás számítása



A 79. a) ábrán egy négyzet keresztmetszetű rudat láthatunk, amelyet – a 79. b) ábrán látható módon – a rúd tengelyébe eső F erővel húzásra terhelünk. A 79. c) ábrán az igénybevétel nyomás.

Az eddigiek alapján a húzó- és nyomófeszültségek nagyságát azonosan, a

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

összefüggéssel számoljuk.

79. ábra

34. PÉLDA

Számítsuk ki a 79. ábrán látható négyszög keresztmetszetű rúdban ébredő húzó-, illetve nyomófeszültségeket, valamint a rúd hosszváltozását!

Adatok:

$$A = 9 \text{ cm}^2 = 9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2,$$

$$l_0 = 105 \text{ cm} = 1,05 \text{ m}.$$

Terhelési mód: Wöhler I.

Anyag: A 60.

$$\sigma_{meg} = 180 \text{ MPa} = 180 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \left[= 1800 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right].$$

$$\text{A terhelőerő: } F = 144 \text{ kN} = 144 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \left[= 2 \cdot 10^6 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right].$$

1. A húzó-, ill. nyomófeszültség:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{144 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{-4}} = 16 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 160 \text{ MPa} = \left[1600 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right].$$

Esetünkben:

$$160 \text{ MPa} < 180 \text{ MPa}, \text{ tehát } \sigma < \sigma_{meg}.$$

2. A rúd hosszváltozása:

$$\text{A fajlagos nyúlás: } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \text{ ebből}$$

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l_0.$$

$$\text{A Hooke-törvény szerint: } \varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \text{ így}$$

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} \cdot l_0.$$

$$\text{Igaz viszont, hogy } \sigma = \frac{F}{A}, \text{ ezért}$$

$$\Delta l = \frac{F}{A} \cdot \frac{l_0}{E}$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$\Delta l = \frac{144 \cdot 10^3 \cdot 1,05}{9 \cdot 10^{-4} \cdot 200 \cdot 10^9} = \frac{144 \cdot 1,05}{9 \cdot 200} \cdot 10^{-2} = \frac{0,084}{100} \text{ m},$$

$$\Delta l = 0,84 \text{ mm}.$$

35. PÉLDA

Határozzuk meg annak a csavarnak a magkeresztmetszetét, amelynek anyaga C 45 nemesítve és terhelése lüktető húzás.

$$\sigma_{meg} = 155 \text{ MPa} = 155 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \left(= 1550 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right), F = 130 \text{ kN} = 130 \cdot 10^3 \text{ N.}$$

Terhelési mód: Wöhler II.

1. Írjuk fel az alapegyenletet:

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad \text{ebből: } A = \frac{F}{\sigma},$$

$$A = \frac{130 \cdot 10^3}{155 \cdot 10^6} = 0,00084 \text{ m}^2,$$

$$A = 8,4 \text{ cm}^2.$$

2. A magkeresztmetszet $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$; ebből $d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}}$,

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 8,4}{\pi}},$$

$$d = 3,27 \text{ cm (magátmérő)}.$$

36. PÉLDA

Egy C 60-as anyagból készült hajtórudat váltakozó igénybevétel (húzás, nyomás) terhel.

$$\sigma_{meg} = 120 \text{ MPa} = 120 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \left(= 1200 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right), A = 4,5 \text{ cm}^2 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

Maximálisan mekkora erővel terhelhető a hajtórúd?

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad \text{ebből: } F = A \cdot \sigma,$$

$$F = 4,5 \cdot 10^{-4} \cdot 120 \cdot 10^6 = 54\,000 \text{ N,}$$

$$F = 54 \text{ kN } (\sim 5400 \text{ kp}).$$

2.3. A felületi nyomás, palástnyomás

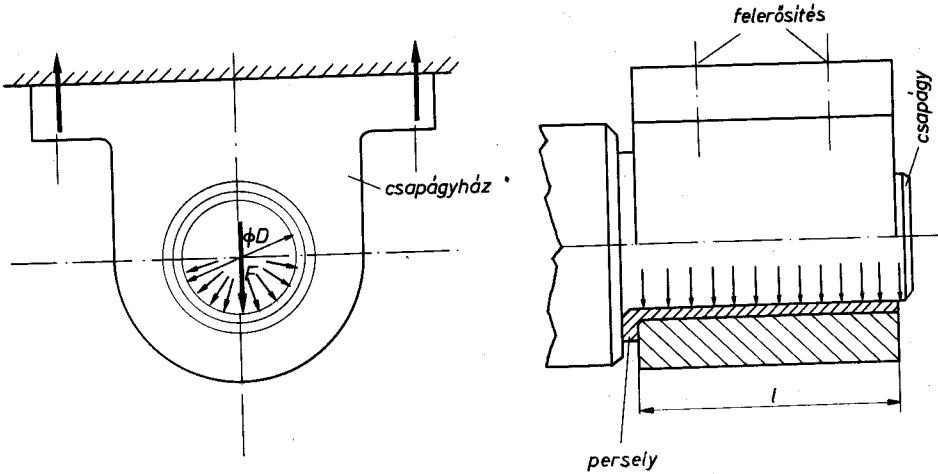
Üzemcsarnokok tetőzetét támasztó oszlopok és kovácsoló-, sajtológépek alapozásánál találkozunk a *felületi nyomás* problémáival. Ugyancsak fontos a működése szempontjából, hogy mekkora nyomóerő terheli az egységnyi csapágyfelületet – a siklócsapágyak egy speciális fajtájánál – a talpcsapágyaknál.

A megengedhető felületi nyomásértékeket szabványleírásokban találhatjuk meg. Az előzőekben említett szerkezetek támaszkodó felületének nagyságát úgy kell meg-

határozni, hogy a $p = \frac{F}{A}$ -ból adódó felületi nyomás értéke kisebb legyen az adott anyagra megengedett értékénél.

Ha a nyomóerő nem sík felületet terhel, hanem hengeres felületen oszlik meg, akkor palástnyomásról beszélünk.

Hogyan jön létre a palástnyomás?



80. ábra

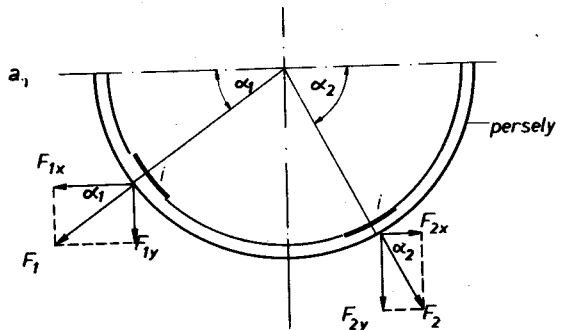
A 80. ábrán egy siklócsapágyat láthatunk. Függőcsapágy, amelyben a csap a persely közvetítésével támaszkodik a csapágyházra. (Lásd gépelemek tantárgy!) A persely a csapágyházba szorosan, míg a csap a perselyhez lazán illesztett. Az ábrán látható, hogy a csap a perselyt F erővel terheli, amely felületen megoszló erőkre (összetevőkre) bontható: a csapágy a perselyt palástja mentén terheli (nyomja). A palástnyomás tehát a palást mentén megoszló, sugár irányú terhelésekből adódik.

Nézzük meg figyelmesen a 81. a) ábrát, amelyen a perselynek egy részét ábrázoltuk.

Bontsuk fel a kerületet nagyon kicsiny, egymással egyenlő ívekre: i ! Ha egy-egy ívrészt megszorozzuk a persely l hosszával, akkor egy-egy elemi felületet kapunk.

Feltételezzük, hogy a sugárirányú erők egyforma nagyságúak, azaz:

$$F_1 = F_2 = F_3 = \dots = F_i.$$



81.a) ábra

Bontsuk fel ezeket x és y irányú összetevőkre. A F_1, F_2, \dots, F_i erők felbontásából látható, hogy az F_i erők x irányú összetevőinek algebrai összege zérus, így: $F = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{iy}$. Tehát a palástnyomás szempontjából csak a függőleges erőösszetevőket kell figyelembe venni. Számítsuk ki ezeket az összetevőket!

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2.$$

.....

$$F_{iy} = F_i \sin \alpha_i$$

$$\text{Így: } F = F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 + \dots + F_i \cdot \sin \alpha_i.$$

Ezek az F_1, F_2, \dots, F_i erők az $l \cdot i$ felületelemeken hozzák létre a palástnyomást:

$$\frac{F_1}{l \cdot i} = \frac{F_2}{l \cdot i} = \dots = \frac{F_i}{l \cdot i} = p.$$

Ebből:

$$F_1 = p \cdot l \cdot i,$$

$$F_2 = p \cdot l \cdot i,$$

.....

$$F_i = p \cdot l \cdot i,$$

amit behelyettesítve az erő összefüggésébe:

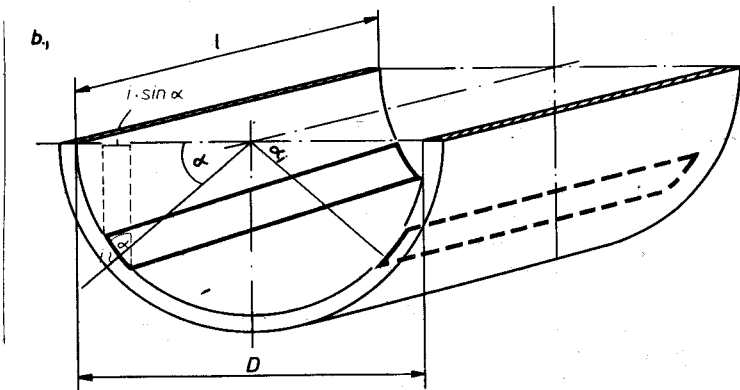
$$F = p \cdot l \cdot i \cdot \sin \alpha_1 + p \cdot l \cdot i \cdot \sin \alpha_2 + \dots + p \cdot l \cdot i \cdot \sin \alpha_i.$$

Emeljük ki a $p \cdot l$ szorzatot:

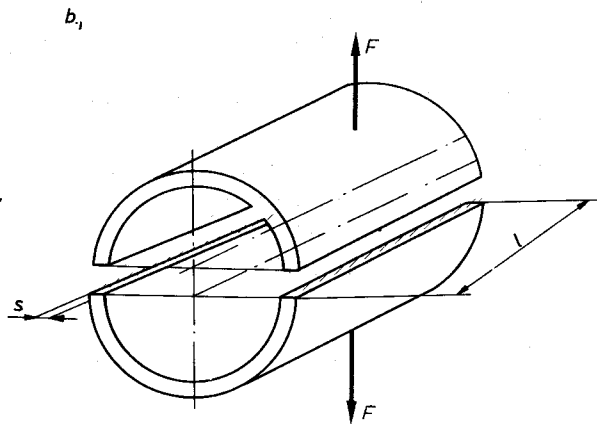
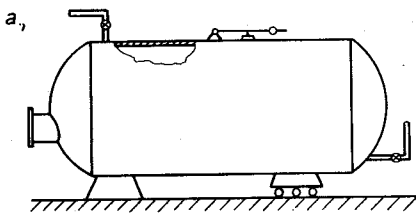
$$F = p \cdot l (i \cdot \sin \alpha_1 + i \cdot \sin \alpha_2 + \dots + i \cdot \sin \alpha_i).$$

Ha összegezzük a zárójelen belüli mennyiségeket, akkor látjuk, hogy ezek éppen a persely D átmérőjét adják (81. b) ábra).

$$F = p \cdot l \cdot D,$$



81.b) ábra



82. ábra

$$p = \frac{F}{l \cdot D}$$

Vagyis: a palástnyomás az F terhelőerő és a hengerpalást erőre merőleges vetületének hányadosa. A palástnyomás mértékegysége: $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ (pascal).

Az épületgépészetben (vegyigépészetben) sokszor előfordul (pl. kazánoknál, hőcserélőknél), hogy egy cső alakú mindkét végén zárt edényben nagynyomású gáz vagy folyadék van. A közeg túlnyomása által okozott igénybevétel a palástnyomásra vezethető vissza.

A 82. a) ábrán egy nyomás alatti tartályt (pl. hőcserélőt) láthatunk. A 82. b) ábrán elmetszett állapotban ábrázoltuk a palástot. A belső nyomásból adódó F erő a palást-részeket az ábrán látható módon szét akarja szakítani a $2s \cdot l$ keresztmetszetben.

Az előzőekben tanultak alapján az F erő:

$$F = D \cdot l \cdot p,$$

$$\text{így: } \sigma_{\text{meg}} = \frac{F}{A} = \frac{D \cdot l \cdot p}{2 \cdot s \cdot l} = \frac{D \cdot p}{2s}.$$

Ebből a tartály úgynevezett elméleti falvastagsága:

$$s = \frac{D \cdot p}{2\sigma_{\text{meg}}}$$

37. PÉLDA

A 80. ábrán látható siklócsapágyat $F = 3 \text{ kN}$ erő terheli. Számítsuk ki a palástnyomást!

A csap átmérője: $D = 1,7 \text{ cm} = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. A csap hossza: $l = 7 \text{ cm} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

$$p = \frac{F}{D \cdot l} = \frac{3 \cdot 10^3}{1,7 \cdot 7 \cdot 10^{-4}} = 2,52 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \left(\approx 25,21 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right),$$

$$p = 2,52 \text{ MPa (megapascal)}.$$

2.4. Hőmérséklet-változás okozta feszültségek

Régebben a sínzálakat hézaggal szerelték a vasúti pályatestekre (a fizikából jól ismert hőtágulás miatt). Ha a sínzálakat összehegesztjük, akkor megakadályozzuk a hőtágulást, és a sínben feszültség keletkezik.

A hőmérséklet-változást $\Delta t = t_2 - t_1$ -gyel jelöljük, ahol $t_2 > t_1$ -nél. A sínzál anyagának lineáris hőtágulási együtthatója: α (lásd: fizika tanulmányok).

A vonal menti hőtágulás, a megnyúlás:

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta t,$$

ahol az l_0 a sínzál eredeti (t_1) hőmérsékleten mért hossza. A fajlagos hosszváltozás:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\alpha \cdot l_0 \cdot \Delta t}{l_0} = \alpha \cdot \Delta t.$$

Helyettesítsük ezt be Hooke törvényébe:

$$\sigma = -E \cdot \varepsilon = -E \alpha \Delta t = -E \alpha (t_2 - t_1).$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a sínzálban felmelegedéskor nyomófeszültség keletkezik.

A hőmérséklet-változás okozta feszültség nagysága az anyag rugalmassági modulusától, a lineáris hőtágulási együtthatótól és a hőmérsékletek különbségétől függ, független a hosszától.

38. PÉLDA

Egy vasúti sín hőmérséklete nyáron, nappal: 323 K ($t_2 = 50^\circ\text{C}$), éjjel: 293 K ($t_1 = 20^\circ\text{C}$). Az utóbbi esetben a sínzál feszültségmentes. A sínzál anyagának rugalmassági modulusa: $E = 215$ GPa. A hőtágulási együttható: $\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6}$ 1/K. Mekkora feszültség ébred a sínzálban, ha nem lehetséges a hosszirányú hőtágulás?

$$\sigma = -\alpha E (t_2 - t_1).$$

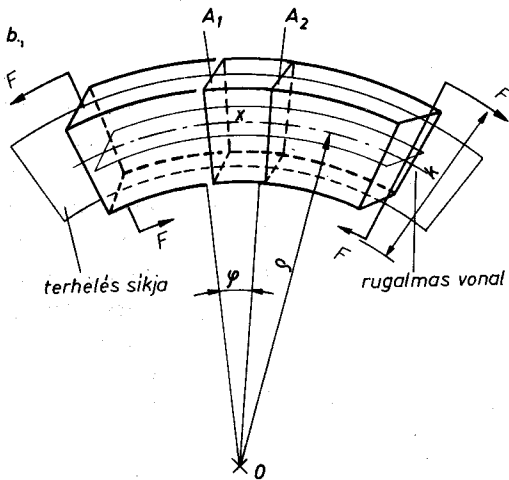
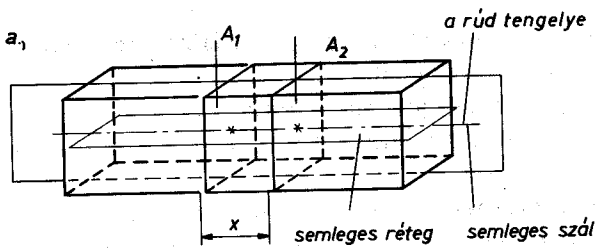
Behelyettesítve az adatokat

$$\sigma = 215 \cdot 10^9 \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot 30 = -74,17 \cdot 5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = -74,175 \text{ MPa} \left(\approx -741,75 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right).$$

3. A hajlító igénybevétel

A kéttámaszú tartóknál már hivatkoztunk arra, hogy a tartók fő igénybevétele a hajlítás. A hajlítást a hajlítónyomaték okozza.

A 83. a) ábrán egy négyszög keresztmetszetű rudat látunk. Ennek végeit közös síkban fekvő, egyenlő nagyságú, de ellentétes értelmű erőpárok terhelik: $M_h = F \cdot k$ (83. b) ábra). A rúd igénybevétele: *tiszta hajlítás*. (Emlékezzünk vissza: a kéttámaszú tartóknál nyíró igénybevétel is fellépett!)



83. ábra

Az a sík, amelyben az erőpárok (nyomatékok) fekszenek: **a terhelés síkja.**

A rúd a hajlító igénybevétel hatására meggörbül. A 83. b) ábrán láthatóan a rúd felső lapjai megnyúlnak, az alsó lapjai megrövidülnek.

A 83. a) ábrán kijelöltük a terheletlen rúdon egymástól x távolságban A_1 és A_2 keresztmetszeteket. E keresztmetszetek merőlegesen a rúd tengelyére. (Az x méretet a terheletlen rúd tengelyére bejelöltük.) Ha most $M = F \cdot k$ hajlítónyomatékkal terheljük a rudat, azt tapasztaljuk, hogy a rúd meggörbül. Meggörbül a keresztmetszetek súlypontjait összekötő vonal, a rúd tengelye is. E meggörbült tengely a **rugalmas vonal**. Görbületi sugarát ρ -val jelöljük.

A hajlítás vizsgálata során a következőket tapasztaltuk:

1. Ha a terhelésből adódó feszültségek nem lépik túl a rúd anyagára megadott arányossági határt, akkor a terhelés megszüntetése után a rugalmas szál, vonal visszanyeri eredeti, egyenes alakját.

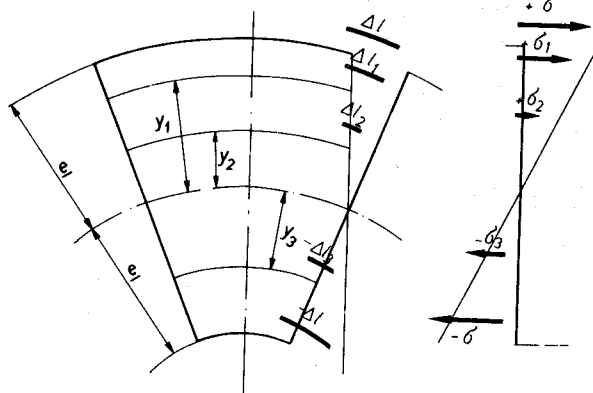
2. A rúd tengelye azért görbült meg, mert az eredetileg párhuzamos keresztmetszetek (A_1 , A_2) az igénybevétel hatására φ szöggel elfordultak egymáshoz képest. (83. b) ábra.)

3. A rúd eredeti keresztmetszetei (A_1, A_2) az alakváltozás után is síkok, és a rugalmas vonalra merőlegesek maradtak.

4. A keresztmetszetek súlypontjait összekötő *egyenes vonal* (szál) hossza a megörbülés ellenére sem változott meg. Ez a vonal a *semleges szál* vagy *semleges tengely*.

5. Azoknak a vonalaknak a hossza sem változott meg, melyek a semleges tengelyt magába foglaló, a *terhelés síkjára merőleges síkban* fekszenek. Ez utóbbi vonalak összessége a *semleges réteg*.

6. A semleges réteg fölött levő szálak megnyúltak, az alatta levők megrövidültek. (83. b) ábra.)



84. ábra

7. Az ábráról az is látható, hogy *minél távolabb fekszik egy-egy szál a semleges rétegtől, a megnyúlás vagy megrövidülés annál nagyobb.* (84. ábra.)

8. Az eredetileg párhuzamos keresztmetszetek a semleges réteg és a keresztmetszetek metszésvonala által meghatározott z tengely körül fordulnak el. *Az a tengely, amely körül a keresztmetszetek elfordulnak, a hajlítástengelye*

A feszültségekről a következőket állapíthatjuk meg:

1. A hajlító igénybevétel hatására a szálak hosszváltozása következtében a *keresztmetszetek síkjára merőleges σ feszültségek* ébrednek. (84. ábra.)

2. Sem a keresztmetszet, sem a szálak mentén τ feszültség *nem* ébred.

Vizsgáljuk meg most a szálak hosszváltozását és a σ feszültségek összefüggését! Nézzük meg figyelmesen a 84. ábrát! A keletkező megnyúlásokat és a feszültségeket láthatjuk az „ e ” semleges szál, illetve a semleges száltól mért y_1, y_2, y_3 függvényében. A háromszögek hasonlósága alapján felírhatjuk a következőket:

$$\Delta l_1 : y_1 = \Delta l : e,$$

$$\Delta l_2 : y_2 = \Delta l : e,$$

$$\Delta l_3 : y_3 = \Delta l : e.$$

Vagy:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l} = \frac{y_1}{e}; \quad \frac{\Delta l_2}{\Delta l} = \frac{y_2}{e}; \quad \frac{\Delta l_3}{\Delta l} = \frac{y_3}{e}.$$

Hooke törvénye szerint a feszültségek egyenesen arányosak az alakváltozásokkal:

$$\frac{\Delta l_1}{\sigma_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma}; \quad \frac{\Delta l_2}{\sigma_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma}; \quad \frac{\Delta l_3}{\sigma_3} = \frac{\sigma_3}{\sigma},$$

ezért:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{y_1}{e}; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma} = \frac{y_2}{e}; \quad \frac{\sigma_3}{\sigma} = \frac{y_3}{e}.$$

Fejezzük ki ezekből az egyenletekből a részfeszültségeket:

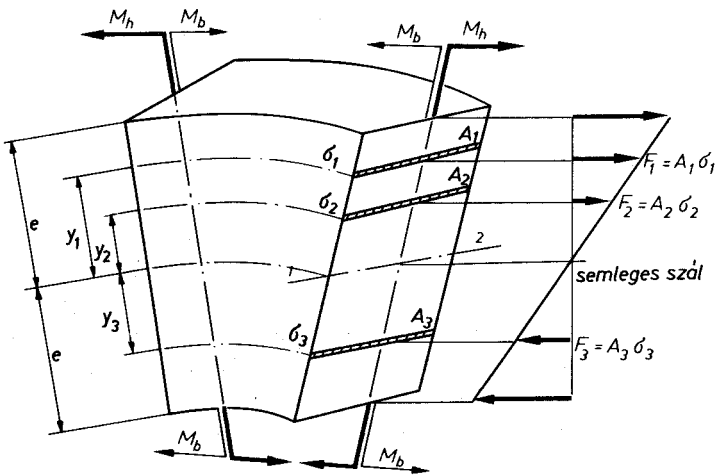
$$\sigma_1 = \sigma \frac{y_1}{e}; \quad \sigma_2 = \sigma \frac{y_2}{e}; \quad \sigma_3 = \sigma \frac{y_3}{e}.$$

Ezekből az összefüggésekből látható, hogy a keresztmetszetben keletkező feszültségek nagysága egyenesen arányos a szélső szál feszültségével és a semleges száltól mért távolsággal. Az is látható, hogy a szélső szálban ébred a legnagyobb feszültség, mivel itt a legnagyobb az alakváltozás. A semleges szál felett fekvő szálakban húzó-, a semleges szál alatti szálakban nyomófeszültségek keletkeznek.

Végül az ábra és az összefüggések alapján az is egyértelmű, hogy a semleges rétegben nem keletkezik feszültség.

3.1. A hajlítás alapegyenlete

Egy tisztán hajlításra igénybevett rúdból vágjunk ki egy részt. (85. ábra.) Rajzoljuk meg a rúdelem bal és jobb oldalára az igénybevételt létrehozó M_h hajlítónyomaté-
kot.



85. ábra

Az a rúd, amiből a rúdelemet kivágtuk egyensúlyban volt. A statikában tanultak szerint a rúdelem is egyensúlyban van. Ez csak úgy lehetséges, hogy az M_h külső nyomatékon kívül a terhelés síkjában fellép egy M_b belső nyomaték is, ami azonos nagyságú, de ellentétes értelmű.

Tehát egyensúly esetén:

$$M_h - M_b = 0.$$

Számítsuk ki M_b -t!

1. Vegyünk fel a keresztmetszet síkjában a semleges réteggel párhuzamosan kicsiny A_1, A_2, A_3 felületelemeket.

2. Ezeken a felületelemeken $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ feszültség lép fel az igénybevétel hatására.

3. A belső erők (feszültségek) eredője

$$A \cdot \sigma = F.$$

(Gondoljunk vissza a 72. ábrára!)

$$F_1 = A_1 \cdot \sigma_1; \quad F_2 = A_2 \cdot \sigma_2; \quad F_3 = A_3 \cdot \sigma_3.$$

4. Írjuk fel a z tengelyre (a hajlítás tengelyére) a belső erők nyomatékának algebrai összegét!

$$M_b = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3.$$

5. Helyettesítsük be az előbbi összefüggéseket:

$$M_b = A_1 \sigma_1 y_1 + A_2 \sigma_2 y_2 + A_3 \sigma_3 y_3.$$

6. Tudjuk azt, hogy

$$\sigma_1 = \sigma \frac{y_1}{e} \text{ stb. (84. ábra),}$$

$$M_b = A_1 \sigma \frac{y_1}{e} \cdot y_1 + A_2 \sigma \frac{y_2}{e} \cdot y_2 + A_3 \sigma \frac{y_3}{e} \cdot y_3.$$

7. Emeljük ki a $\frac{\sigma}{e}$ tényezőt:

$$M_b = \frac{\sigma}{e} (A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + A_3 y_3^2)$$

A zárójelben levő kifejezés az egyes felületelemekből és a z - z tengelytől mért távolságok négyzetéből képezett szorzatok összege: az ekvatoriális vagy másodrendű nyomaték. [Ekvatoriális: mert a tengelyre (ekvatorra) számítjuk; másodrendű: mert a felületelemeket a tengelytől mért távolságok második hatványával (négyzetével) szorozzuk.] Szokásos az *inercianyomaték* elnevezés is, ezért I -vel is jelölik.

Mértékegysége: m^4 (méter a negyediken), cm^4 (centiméter a negyediken).

Mivel: $M_b = M_h$, így: $M_h = \sigma \frac{I}{e}$, vagy: $\sigma = \frac{M_h}{I} \cdot e$.

Ahol: M_h = külső terhelő nyomaték,

σ = a szélső (a hajlítás tengelyétől legtávolabbi) szálban ébredő feszültség,

I = a keresztmetszet másodrendű nyomatéka a hajlítás tengelyére.

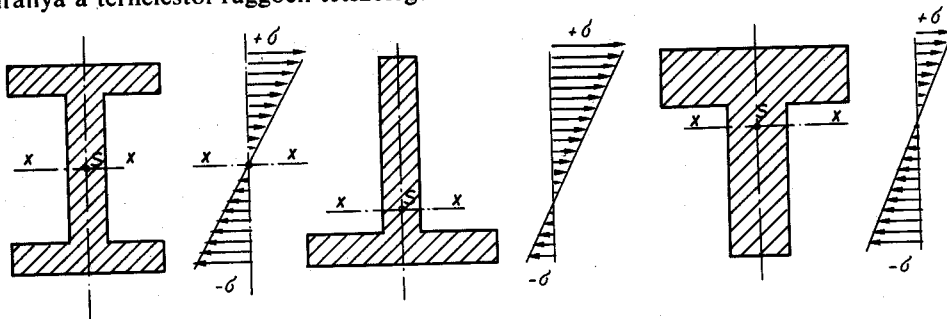
Ha most a semleges száltól tetszőleges y távolságra levő helyen keressük a feszültséget, akkor:

$$\sigma_y = \frac{M_h}{I} \cdot y.$$

Ez a Navier-féle összefüggés.

Navier (1795–1836) francia tudós, az École Polytechnique tanára, a szilárdságtan neves művelője volt.

Bizonyítás nélkül fogadjuk el, hogy a hajlítás tengelye minden esetben keresztülmegy a keresztmetszet súlypontján. (86. ábra.) Természetesen a hajlítás tengelyének iránya a terheléstől függően tetszőleges lehet.



86. ábra

A 86. ábrán látható keresztmetszetekben – megelőző tanulmányaink alapján – húzó és nyomó feszültségek ébrednek.

A szélső szálakban ébredő feszültség:

$$\sigma_{max} = \frac{M_h}{I} \cdot e = \frac{M_h}{\frac{I}{e}}$$

Az $\frac{I}{e}$ mennyiséget keresztmetszeti tényezőnek nevezzük és K -val jelöljük, tehát:

$$K = \frac{I}{e}$$

Mértékegysége: m^3 (méter a harmadikon, nem köbméter) vagy: cm^3 . Így a maximális feszültség:

$$\sigma_{max} = \frac{M_h}{K}$$

Ez a képlet a hajlítás alapegyenlete, amelyből a következőket láthatjuk:

1. Hajlításakor σ feszültség ébred.
2. A σ feszültséget M_h hajlítónyomaték okozza.
3. A σ feszültség nagysága a keresztmetszeti tényezőtől (a keresztmetszet nagyságától és az alakjától) is függ.

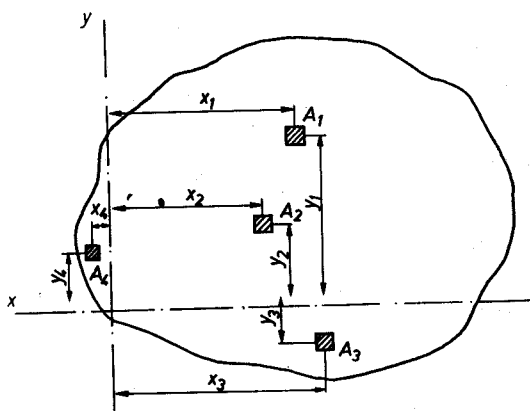
3.2. A másodrendű nyomatékok és a keresztmetszeti tényezők

A következőkben néhány – a műszaki gyakorlatban sokszor alkalmazott – keresztmetszet másodrendű nyomatékát és keresztmetszeti tényezőjét ismertetjük.

Jelenlegi matematikai ismereteinkkel nem tudjuk kiszámítani a pontos értékeket, ezért csak elvi ismertetésüket adjuk meg, a 87. ábrán látható tetszőleges keresztmetszet segítségével.

Írjuk fel az y tengelyre számított másodrendű nyomatékot:

$$I_y = A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 + \dots + A_ix_j^2, \text{ azaz } \sum_{i=1}^n A_ix_i^2.$$



87. ábra

Értéke annál pontosabb, minél nagyobb számú elemből képezzük az összeget. Az I_x kiszámítása végső soron n darab felületelem másodrendű nyomatékainak összegezésével, csak integrálszámítással lehetséges (IV. osztály matematika).

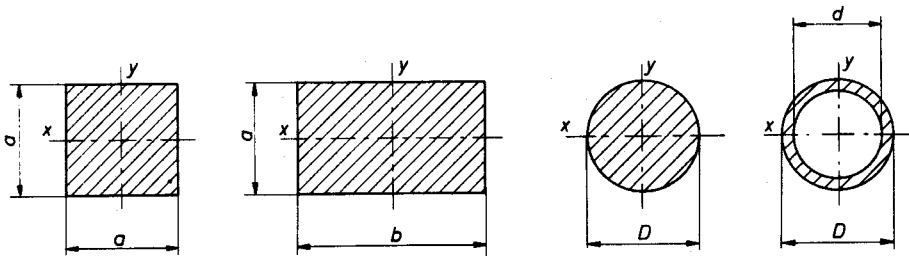
Az x tengelyre számított másodrendű nyomatéknál ugyanez a helyzet:

$$I_x = A_1y_1^2 + A_2y_2^2 + \dots + A_iy_i^2, \text{ azaz } \sum_{i=1}^n A_iy_i^2.$$

Tehát a felületben fekvő tengelyekre (x, y) a másodrendű nyomatékok kiszámítása:

1. A felületet felbontjuk végtelen sok felületelemre.
2. A felületelemek súlypontja és a vonatkoztatási tengely távolságának négyzetével megszorozzuk a felületelemet.
3. Az így kapott szorzatokat összegezzük.

A 88. ábrán megadott jellegzetes keresztmetszetekre az integrálással meghatározott másodrendű nyomaték és a keresztmetszeti tényező képlete:



88. ábra

1. Négyzet keresztmetszetre:

$$I_x = \frac{a^4}{12}; \quad I_y = \frac{a^4}{12}; \quad e = \frac{a}{2};$$

$$K_x = \frac{a^3}{6}; \quad K_y = \frac{a^3}{6}.$$

2. Téglalap keresztmetszetre:

$$I_x = \frac{b \cdot a^3}{12}; \quad I_y = \frac{a \cdot b^3}{12}; \quad e_x = \frac{a}{2};$$

$$K_x = \frac{ba^2}{6}; \quad K_y = \frac{ab^2}{6}; \quad e_y = \frac{b}{2}.$$

3. Kör keresztmetszetre:

$$I_x = I_y = \frac{D^4 \cdot \pi}{64}; \quad e = \frac{D}{2},$$

$$K_x = K_y = \frac{D^3 \cdot \pi}{32}; \quad \left(\frac{\pi}{32} \approx 0,1 \right).$$

$$K_x = K_y \approx 0,1D^3.$$

4. Körgyűrű keresztmetszetre:

$$I_x = I_y = \frac{D^4 \cdot \pi}{64} - \frac{d^4 \cdot \pi}{64}; \quad e = \frac{D}{2},$$

$$K_x = K_y = \frac{\pi}{32} \left(\frac{D^4 - d^4}{D} \right) \approx 0,1 \cdot \left(\frac{D^4 - d^4}{D} \right).$$

39. PÉLDA

Számítsuk ki a 88. ábrán látható négyzet és téglalap keresztmetszet másodrendű nyomatékát, valamint keresztmetszeti tényezőjét az x és y tengelyekre, ha $a = 3$ cm, $b = 5$ cm!

1. A négyzet keresztmetszetre:

$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12} = \frac{3^4}{12} = 6,75 \text{ cm}^4; \quad K_x = K_y = \frac{a^3}{6} = \frac{3^3}{6} = 4,5 \text{ cm}^3.$$

2. A téglalap keresztmetszetre:

$$I_x = \frac{b \cdot a^3}{12} = \frac{5 \cdot 3^3}{12} = 11,25 \text{ cm}^4;$$

$$K_x = \frac{b \cdot a^2}{6} = \frac{5 \cdot 3^2}{6} = 7,5 \text{ cm}^3;$$

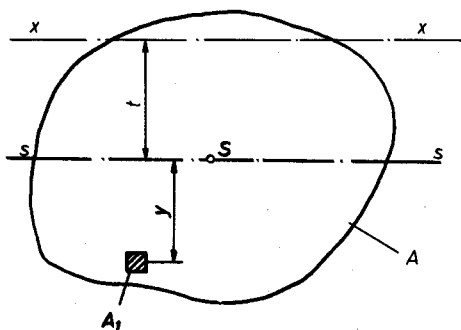
$$I_y = \frac{a \cdot b^3}{12} = \frac{3 \cdot 5^3}{12} = 31,25 \text{ cm}^4;$$

$$K_y = \frac{a \cdot b^2}{6} = \frac{3 \cdot 5^2}{6} = 12,5 \text{ cm}^3.$$

3.3. A párhuzamos tengelyek tétele

Az előzőekben olyan keresztmetszetek (síkidomok) másodrendű nyomatékait számoltuk, amelyeknél a vonatkoztatási tengely keresztülmegy a súlyponton.

Mi a helyzet akkor, ha a keresztmetszet másodrendű nyomatékát egy olyan tengelyre kívánjuk meghatározni, amely nem megy át a keresztmetszet súlypontján? A 89. ábra egy ilyen síkidomot ábrázol. Határozzuk meg a másodrendű nyomatékát az $x-x$ tengelyre!



89. ábra

Az ismert módon felírhatjuk egy felületelemre:

$$I_{x1} = A_1 (y+t)^2 = A_1 (y^2 + 2yt + t^2),$$

$$I_{x1} = A_1 y^2 + A_1 2yt + A_1 t^2.$$

Az $A_1 y^2$ a felületelem másodrendű nyomatéka a súlyponti tengelyre számítva. Az $A_1 2yt$ összefüggésből az $A_1 y$ a felületelem statikai nyomatéka, az $s-s$ súlyponti tengelyre.

A súlypontszámításnál tanultak szerint az egész keresztmetszetre:

$$\sum A_1 2yt = 0,$$

$$I_x = \sum A_1 y^2 + \sum A_1 \cdot t^2,$$

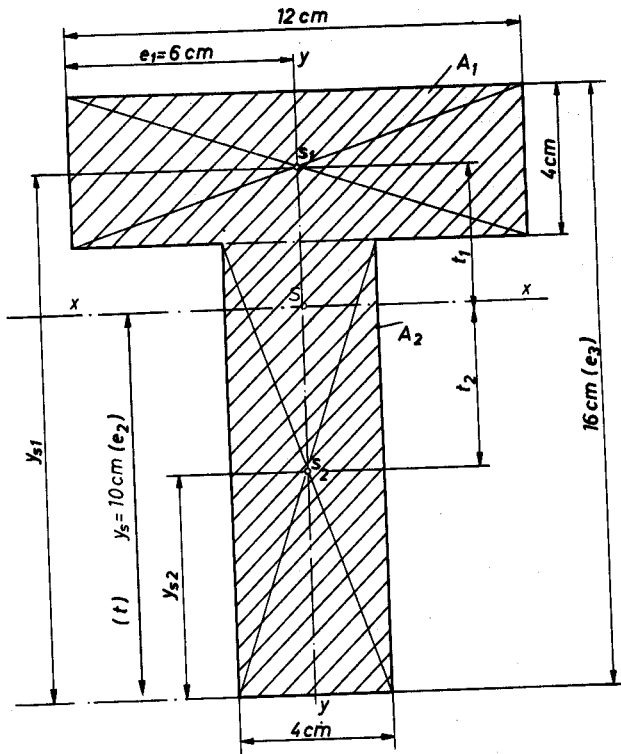
ebből

$$\sum A_1 y^2 = I_s,$$

$$I_x = I_s + A \cdot t^2.$$

Az összefüggés a **párhuzamos tengelyek tétele**: Egy síkidomnak (A) tetszőleges egyenesre ($x-x$) vett másodrendű nyomatékát (I_x) megkapjuk, ha a súlyponton (S) átmenő és a tetszőleges egyenessel párhuzamos tengelyre vett másodrendű nyomatékhoz (I_s) hozzáadjuk a síkidom területének (A) a tengelytávolság négyzetével (t^2) való szorzatát.

A meghatározásból látható, hogy a párhuzamos tengelyekre számított másodrendű nyomatékok közül a **legkisebb a súlyponti tengelyre vett másodrendű nyomaték**.



90. ábra

40. PÉLDA

Számítsuk ki a 90. ábrán látható síkidom másodrendű nyomatékát és keresztmetszeti tényezőjét:

a) az y tengelyre,

b) a súlyponton átmenő $x-x$ tengelyre!

a) A T idomot két téglalagra bontjuk (A_1 és A_2). Az S_1 és S_2 rajta van az $y-y$ tengelyen, így:

$$I_{1y} = \frac{4 \cdot 12^3}{12} = 576 \text{ cm}^4, \quad I_{2y} = \frac{12 \cdot 4^3}{12} = 64 \text{ cm}^4,$$

A teljes másodrendű nyomaték:

$$I_y = I_{1y} + I_{2y} = 576 + 64 = 640 \text{ cm}^4.$$

Az y tengelytől legtávolabb eső szál távolsága $e_1 = 6$ cm, így:

$$K_y = \frac{I_y}{e_1} = \frac{640}{6} = 106,66 \text{ cm}^3.$$

b) Először a jól ismert módon meghatározzuk a T idom súlypontjának helyét:

$$A_1 \cdot y_{s1} + A_2 \cdot y_{s2} = (A_1 + A_2) y_s.$$

A síkidomok statikai nyomatéka a $k-k$ tengelyre az egész síkidom statikai nyomatékával egyenlő. Behelyettesítve az adatokat:

$$12 \cdot 4 \cdot 14 + 4 \cdot 12 \cdot 6 = 96 y_s,$$

$$672 + 288 = 96 y_s,$$

$$y_s = 10 \text{ cm.}$$

Az A_1 síkidomrész súlypontjának távolsága az $x-x$ tengelytől:

$$t_1 = 4 \text{ cm.}$$

Az A_2 síkidomrész súlypontjának távolsága az $x-x$ tengelytől:

$$t_2 = 4 \text{ cm.}$$

A párhuzamos tengelyek segítségével a teljes másodrendű nyomaték:

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2}$$

$$I_{x_1} = I_{s1} + A_1 \cdot t_1^2 = 64 + 48 \cdot 4^2 = 832 \text{ cm}^4, \quad I_{x_2} = I_{s2} + A_2 \cdot t_2^2 = 576 + 48 \cdot 4^2 = 1344 \text{ cm}^4,$$

$$I_x = 2176 \text{ cm}^4.$$

A szélső szál távolsága az $x-x$ tengelytől:

$$e_2 = y_s = 10 \text{ cm;}$$

$$K_x = \frac{I_x}{e_2} = \frac{2176}{10} = 217,6 \text{ cm}^3.$$

A számpélda megoldása alapján fontos megállapítást tehetünk.

Összetett síkidom keresztmetszeti tényezője nem számítható a részidomok keresztmetszeti tényezőjének algebrai összegeként:

$$K_x \neq K_{1x} + K_{2x} \dots !!!$$

Csak az ugyanarra a tengelyre számított másodrendű nyomatékokat szabad összegezni:

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2}, \text{ majd ebből: } K_x = \frac{I_x}{e}.$$

(Az e a hajlítás tengelyétől legtávolabb levő pont távolsága.)

A műszaki gyakorlatban (pl. tartóknál) gyakran használjuk a hengerelt szelvényeket. A meleghegerléssel készült gerendák, rudak keresztmetszetének kialakításakor figyelembe veszik az elmélet megállapításait, hogy a semleges szál közelében a feszültség kicsi, a szélső szálnál pedig a legnagyobb. Tehát úgy alakítják ki a szelvényeket, hogy az anyag (keresztmetszet) zöme a semleges rétegtől távol kerüljön.

A hengerelt szelvények különböző adatait táblázatba foglalta a szabvány (MSZ 325, MSZ 326). A táblázatokat a példatárban közöljük.