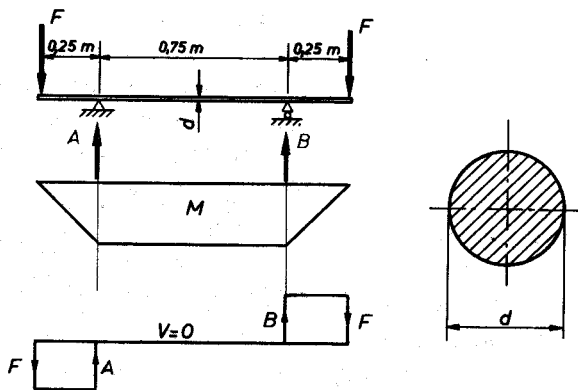


3.4. Méretezés hajlításra

A kéttámaszú tartóknál már hivatkoztunk arra, hogy a tartók fő igénybevétele a hajlítás. Eddig az úgynevezett tiszta hajlításról beszéltünk, amikor a rudat nem terhelő nyíróerő ($V = 0$). A gyakorlatban ilyen ritkán fordul elő. A hajlítással egyidejűleg általában nyírás is fellép, de ezzel most nem foglalkozunk.



91. ábra

41. PÉLDA

A 91. ábrán vázolt konzolos kéttámaszú tartót két azonos nagyságú koncentrált erő terheli ($F = 50$ kN). A tartó A és B támaszköze között nyírás nincs, csak hajlítás. A szimmetrikus felépítés miatt $A = B = F$. A tartó A 50-es anyagból készül kör keresztmetszettel, $\sigma_{meg} = 180 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}$

$= 180$ MPa ($1800 \frac{kp}{cm^2}$). Határozzuk meg a tartó átmérőjét!

1. Számítsuk ki először a hajlítónyomatékokat:

$$M = 50\,000 \cdot 0,25 = 12\,500 \text{ N}\cdot\text{m}, \quad (\approx 125\,000 \text{ cmkp}),$$

$$M = 12,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

2. Tudjuk, hogy a legnagyobb (megengedett) feszültség a szélső szálakban ébred, ezért

$$\sigma_{meg} = \frac{M}{I} \cdot e = \frac{M}{K}$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$180 \cdot 10^6 = \frac{12,5 \cdot 10^3}{K}; \quad \text{ebből: } K = \frac{12,5 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = \frac{69,44}{10^6} \text{ m}^3,$$

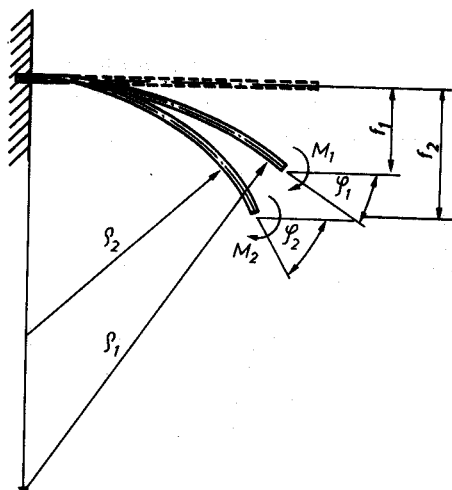
$$K = 69,44 \text{ cm}^3.$$

Mivel: $K = 0,1 d^3$, így $69,44 = 0,1 d^3$,

tehát:

$$d = \sqrt[3]{694,4} = 8,85 \text{ cm}.$$

3.5. Alakváltozás hajlításkor



92. ábra.

A kéttámaszú tartók tárgyalásakor (pl. a 64. ábrán) láttuk, hogy a hajlító igénybevétel hatására a tartó meggörbült. Vizsgáljuk meg (levezetés nélkül), hogy milyen összefüggés van az alakváltozás, a tartó anyaga, mérete és a hajlítónyomaték között. A 92. ábrán egyik végén befogott tartót láthatunk, melyet a másik végén hajlítónyomaték terhel.

– Ha M_{h1} nyomatékkal terheljük a tartót, akkor q_1 sugárral jellemezhető a meggörbülés.

– Ha $M_{h2} > M_{h1}$ nyomatékkal terheljük, akkor $q_2 < q_1$ sugárral jellemezhető.

Vagyis:

1. Minél nagyobb hajlítónyomatékkal terheljük a tartót, annál kisebb a görbületi sugár (a tartó annál jobban meggörbül), vagy *akkor kicsi az alakváltozás, ha a q nagy.*

2. Azt is tudjuk – előző ismereteink alapján –, hogy egyforma nagy hajlítónyomaték hatására sokkal kevésbé görbül meg az olyan rúd, amelyiknél a hajlítás tengelye a keresztmetszet rövidebb oldalával párhuzamos (így nagyobb a keresztmetszet másodrendű nyomatéka). *Ugyanakkora nyomaték esetén az alakváltozás annál kisebb, minél nagyobb a keresztmetszet másodrendű nyomatéka.*

3. Végül az is teljesen egyértelmű, hogy pl. farúd esetében azonos nyomaték hatására sokkal nagyobb az alakváltozás, mint acélrúd esetében.

Összefoglalva

A görbület nagysága, $\frac{1}{q}$ az anyag rugalmassági tényezőjével és a másodrendű nyomatékkal fordítottan, a hajlítónyomatékkal pedig egyenesen arányos.

Képletben:

$$\frac{1}{q} = \frac{M_h}{I \cdot E}$$

A rúd végének szögelfordulása (levezetés nélkül):

$$\varphi = \frac{M_h \cdot l}{I \cdot E} \text{ (radián).}$$

A rúd lehajlása (levezetés nélkül):

$$f = c \cdot \frac{M_h \cdot l^2}{I \cdot E}$$

A c értéke a terhelés módjától függ (járulék).

Ezeket a képleteket az egyik végén befogott és a kéttámaszú tartóknál *lehajlás képleteknek nevezzük* (járulék képletek). Bár tudjuk, hogy a tartóknál nyíró igénybevétel is van, kis mértékük miatt úgy számoljuk az alakváltozást, mintha csak a hajlító igénybevétel terhelné a tartókat.

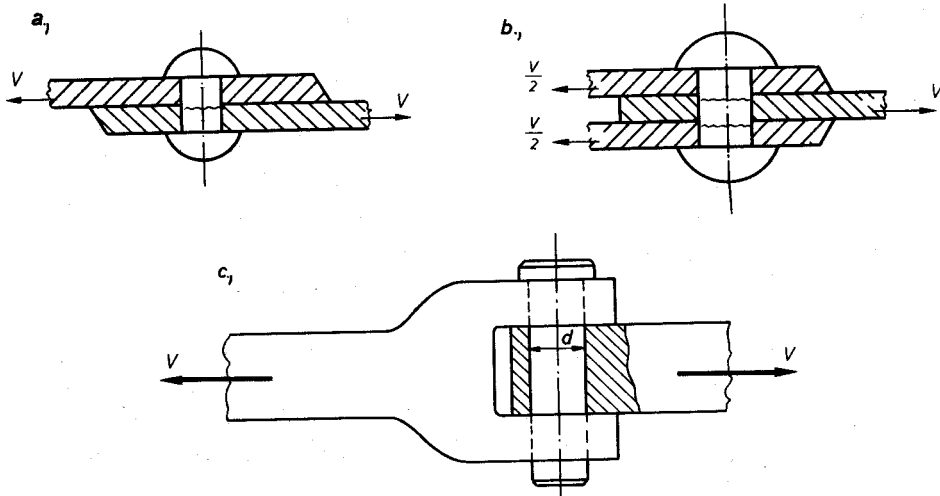
4. A nyíró igénybevétel

A szilárdságtan tárgyalásának első részében már említettük a csúsztató feszültséget. Azt is tudjuk már, hogy a húzó- vagy nyomóterhelés esetén σ feszültség ébred.

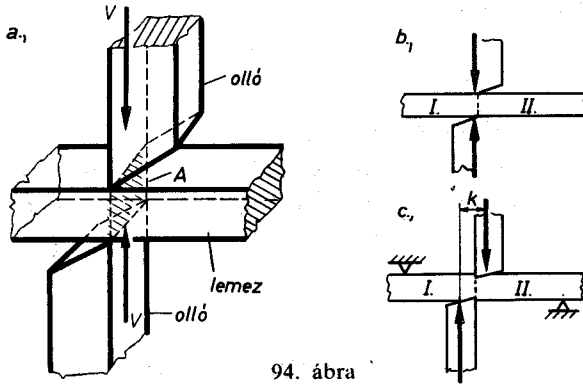
Mi a helyzet akkor, ha a 93. ábrán látható szegecskötés és vonószerkezet csapjának igénybevételét vizsgáljuk? Azt tapasztaljuk (93. a) ábra), hogy a szegecskötés lemezei a terhelés hatására a szegecs keresztmetszetét a tengelyére merőleges irányban terhelik (el akarják csúsztatni). A 93. b) és c) ábrákon a keresztmetszetek elcsúsztatása két helyen történik.

A 93. ábrán látható terhelés a **nyírás**, azaz **nyíró igénybevétel**.

A szilárdságtanban a nyírás fogalma teljesen megfelel annak, amit a köznapi életben nyírásnak nevezünk. A 94. a) ábrán szemléltettük a nyírás elvét. Látjuk, hogy egy megfelelően kemény és szívós (kopásálló) anyagból kiképzett vágószerszemet (olló) a V erő hatására elnyírja az anyagot.



93. ábra



94. ábra

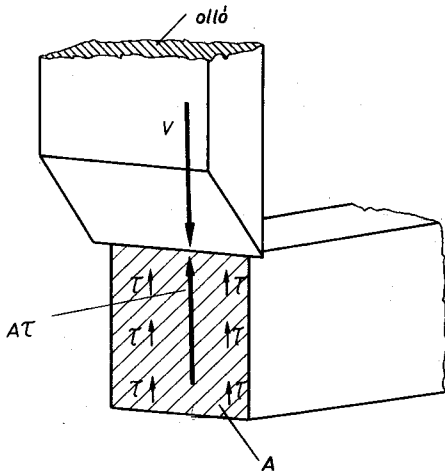
A 94. b) ábrán az úgynevezett tiszta nyírást láthatjuk. Tiszta nyírásról akkor beszélünk, ha a keresztmetszettel kettéosztott rúd részeit egyenként tekintve, mindegyik rúdrészre ható külső erők (V) eredője a keresztmetszet síkjába esik.

Ha már az ollók élei behatoltak az anyagba (lemezbe) hajlítás is van. ($V \cdot k$ erőpár lép fel, amelynek nagysága a nyírás folyamán változik.) Ilyenkor a 94. c) ábrán látható módon a lemezt meg kell támasztani.

4.1. A tiszta nyírás

A V nyíróerő hatására az igénybe vett test (lemez) két szomszédos keresztmetszete igyekszik elcsúszni egymáson. A keresztmetszeten τ feszültségek ébrednek (95. ábra). E feszültségek nagysága az A keresztmetszet mentén megközelítőleg állandó és $A \cdot \tau$ eredőjük a V nyíróerővel tart egyensúlyt. Így felírható:

$$V - A \cdot \tau = 0, \quad \tau = \frac{V}{A} \left(\frac{N}{m^2} \right).$$



95. ábra

Ez az összefüggés a nyírás alapegyenlete.

A tiszta nyírás jellemzői:

1. Nyíró igénybevételkor τ feszültségek keletkeznek.
2. A nyíró igénybevételt erő (V) hozza létre.
3. A feszültség értéke csak a keresztmetszet nagyságától függ, alakjától nem.
4. A τ feszültségek a keresztmetszet mentén egyenletesen oszlanak meg.

Nyírásra igénybevett szegecsket, csapokat, csavarokat az előbbiekben ismertetett képlet alkalmazásával méretezzük. Ilyenkor feltételezzük a tiszta nyírást és a τ feszültségnek a keresztmetszet menti egyenletes eloszlást. Például a szegecs, csapok lehetnek egynyírásúak (93. a) ábra vagy kétnyírásúak (93. b), 93. c) ábra).
Egynyírású szegecsnél:

$$\tau_1 = \frac{V}{A} = \frac{V}{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}} = \frac{4V}{d^2 \pi}$$

Kétnyírású szegecsnél:

$$\tau_2 = \frac{V}{2A} = \frac{V}{2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4}} = \frac{2V}{d^2 \pi} = \frac{1}{2} \tau_1$$

A szegecskötés akkor megfelelő nyírásra, ha:

$$\tau_1 \leq \tau_{meg}, \quad \text{illetve} \quad \tau_2 \leq \tau_{meg}$$

(A τ_{meg} értékeit lásd a példatárban levő táblázatban!)

A méretezést tehát a tiszta nyírás alapegyenletének felhasználásával végezzük, és a megengedett τ feszültséggel számolunk.

42. PÉLDA

A 93. c) ábrán látható vonószerkezetet $V = 100 \text{ kN}$ nyíróerő terheli. Számítsuk ki a vonószerkezet csapjának átmérőjét, ha anyagára $\tau_{meg} = 87 \text{ MPa}$ ($87 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$) ($\approx 870 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$)!

Tiszta nyírást feltételezve a szükséges keresztmetszet:

$$A_{szüks} = \frac{V}{\tau_{meg}} = \frac{100 \cdot 10^3}{87 \cdot 10^6} = 0,001149 \text{ m}^2,$$

$$A_{szüks} = 11,49 \text{ cm}^2.$$

A csap kétnyírású, így a nyírt keresztmetszetek száma: 2. A csap keresztmetszete:

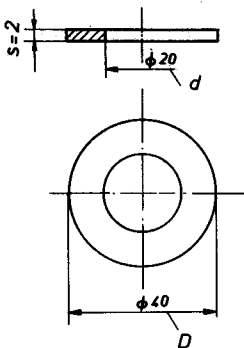
$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{A_{szüks}}{2},$$

$$A = \frac{11,49}{2} = 5,74 \text{ cm}^2.$$

Ebből a csap átmérője:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5,74}{3,14}} = 2,70 \text{ cm}.$$

43. PÉLDA



A 96. ábrán egy alátétet (gyűrűt) látunk, amelyet lyukasztással – kivágással készítünk acéllemezből. A lemez anyagának szakítószilárdsága 420 MPa ($420 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$). Számítsuk ki a lyukasztáshoz, kivágáshoz szükséges nyírőerőt, ha a két művelet egyidejűleg végzik!

Mielőtt a példa megoldásához hozzáfekszünk, röviden ismertetjük a lyukasztást és a kivágást. E két hidegalakító, forgácsolás nélküli művelet a tömegcikk gyártásában használatos, és a nyírás alapul. Egy megfelelő keménységű, szívósságú, kopásálló, valamint kellő módon megköszörült szerszámot (bélyeget) nyomunk fémlémezre, V erőhatással. Lyukasztásnál a kieső korongocskát már nem használjuk (hulladék), kivágásnál a kieső rész a munkadarab.

96. ábra

1. Írjuk fel először az alapegyenletet:

$$\tau = \frac{V}{A}$$

Az anyagvizsgálat szerint a nyírőszilárdságot (τ_{ny}) egyenlőnek vehetjük a szakítószilárdsággal:

$$\tau = \tau_{ny} = \tau_B, \text{ így } \tau_{ny} = 420 \text{ MPa} = 420 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} (= 4200 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}).$$

(A nyírőszilárdság tapasztalati értéke: $\tau_{ny} = 0,8 \dots 1,15 \cdot \tau_B$.)

2. Számítsuk ki a nyírt keresztmetszetek nagyságát:

$$A_1 = d_1 \cdot \pi \cdot s = 20 \cdot 3,14 \cdot 2 = 125,6 \text{ mm}^2,$$

$$A_2 = D \cdot \pi \cdot s = 40 \cdot 3,14 \cdot 2 = 251,2 \text{ mm}^2.$$

$$A_{\text{össz}} = A_1 + A_2 = 125,6 + 251,2 = 376,8 \text{ mm}^2,$$

$$A_{\text{össz}} = 3,768 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

3. Az alátét lyukasztásához és kivágásához szükséges erő:

$$V = A_{\text{össz}} \cdot \tau,$$

$$V = 3,768 \cdot 10^{-4} \cdot 420 \cdot 10^6,$$

$$V = 158\,256 \text{ N} (\approx 15\,825 \text{ kp}).$$

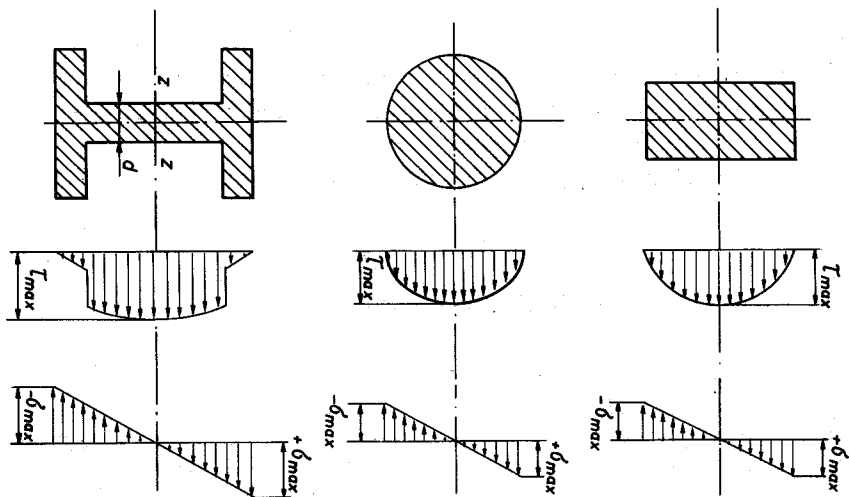
$$V = 158,256 \text{ kN}.$$

(Ilyen nagy erők kifejtésére körhagyó rendszerű sajtológépeket használnak. Erre a műveletre – a biztonságot figyelembe véve – 200 kN nyomóerejű sajtológépet alkalmaznak.)

4.2. A hajlítás és a nyírás együttes hatása

Ha a nyírással együtt (egyidejűleg) hajlítás is fellép (94. c) ábra), akkor a τ feszültségek számítására az eddigiekben bemutatott összefüggések nem alkalmazhatók. Ilyenkor a τ feszültségek nagysága a keresztmetszet mentén változik, mértéke a tiszta nyírásnál fellépőt meghaladja.

Hajlítás és nyírás együttes hatásának vizsgálatára (méretezésre és ellenőrzésre) három esetet különböztetünk meg.



97. ábra

1. Ha a nyírás következtében fellépő τ feszültség jóval nagyobb, mint a hajlítás hatására ébredő σ feszültség, akkor a fő igénybevétel a nyírás. Erre láthatunk példákat a 97. ábrán. Ahhoz, hogy a pontos feszültségelosztást leírassuk, felsőfokú matematikai ismeretek szükségesek. Ennek hiányában közelítő képletet használunk a maximális feszültség meghatározására:

$$\tau_{max} = c \frac{V}{A}.$$

Ahol a c az úgynevezett alak- vagy formatényező.

a) Négyzög keresztmetszet esetén (téglalap):

$$\tau_{max} = \frac{3V}{2A}.$$

Látható, hogy 50%-kal nagyobb nyírófeszültség lép fel, mint tiszta nyírásnál. A τ_{max} a hajlítás tengelyében ébred, és a feszültségelosztás parabola függvény szerint változik.

b) Kör keresztmetszet esetén:

$$\tau_{max} = \frac{4V}{3A}$$

A feszültségnövekedés 33%-os. A feszültség változását a keresztmetszet mentén ellipszis függvény jellemzi.

c) Az összetett keresztmetszetről (pl. I gerendánál) egyszerű összefüggéssel nem írható le a maximális nyírófeszültség. Levezetés nélkül közöljük (csak tájékoztatásul):

$$\tau_{max} = \frac{V \cdot M_s}{I \cdot d}$$

Ahol V = nyíróerő,

M_s = a fél keresztmetszet statikai nyomatéka a hajlítás ($z-z$) tengelyére,

I = a keresztmetszet másodrendű nyomatéka a hajlítás tengelyére,

d = az I tartó gerincvastagsága.

d) Ábrázolás nélkül közöljük a körgyűrű keresztmetszetről:

$$\tau_{max} = 2 \frac{V}{A}$$

Látható, hogy itt 100%-os a feszültségnövekedés.

44. PÉLDA

A 98. ábrán egy csapszeget látunk, amelyet $F = 60$ kN húzóerő terhel. A húzóterheléssel szemben a csapszeg fejénél támasztottuk meg. A csapszeg és a megtámasztás közötti hézag miatt hajlítás is fellép. A vázlat szerinti fő igénybevétel nyírás. A nyírt felület hengerpalást.

A csapszeg szárának átmérője 20 mm. A csapszeg anyag C 60. ($\tau_{meg} = 145$ MPa =

$$= 145 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \left(= 1450 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right).$$

Határozzuk meg a csapszeg fejének magasságát (h)!

Az alaktényező: $c = \frac{3}{2}$, így:

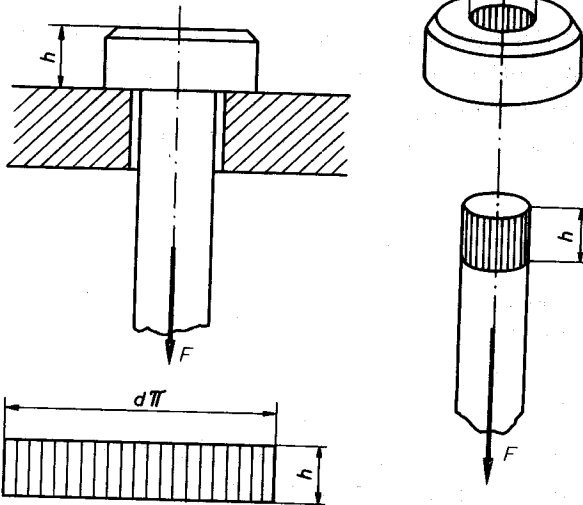
$$\tau_{meg} = \frac{3F}{2A} = \frac{3}{2} \frac{F}{d \cdot \pi \cdot h}$$

$$\text{ebből: } h = \frac{3}{2} \frac{F}{d \cdot \pi \cdot \tau_{meg}}$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$h = \frac{3}{2} \frac{60 \cdot 10^3}{0,02 \cdot \pi \cdot 145 \cdot 10^6} = 0,00988 \text{ m,}$$

$$h = 9,881 \text{ mm.}$$



98. ábra

2. Ha a fő igénybevétel hajlítás, de emellett kismértékű nyírás is van (pl. kéttámaszú tartók), akkor csak úgy méretezzük vagy ellenőrizzük a tartót, mintha csak hajlítással lenne dolgunk. (Természetesen ellenőrizzük a τ feszültséget is, de ez rendszerint jóval kisebb az anyagra megengedettnél!) A használt összefüggés:

a) méretezéskor:

$$K_{szüks} = \frac{M_{max}}{\sigma_{meg}}$$

b) ellenőrzéskor:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{K}$$

45. PÉLDA

Ha az így kapott $\sigma_{max} \cong \sigma_{meg}$ -nél akkor a keresztmetszet mérete megfelelő. Tehát tulajdonképpen visszatérünk a hajlítással való méretezésre.

Emlékezzünk vissza, hogy a kéttámaszú tartóknál már beszéltünk arról, hogy a tartók fő igénybevétele a hajlítás, függetlenül attól, hogy nyíró igénybevétel is jelentkezik. Ott még nem tudtuk, hogy a nyírás milyen feszültségeket ébreszt a tartó keresztmetszeteiben, csak a nyíróerő ábrával szemléltettük az igénybevételt.

A következő példával bizonyítjuk, hogy fő igénybevétel a hajlítás.

A 99. ábrán egy adott keresztmetszetű öntöttvas csövet végig egyenletesen megoszló erő terhel. Határozzuk meg a $\sigma_{hajlító}$ és $\tau_{nyíró}$ feszültségeket a tartó veszélyes keresztmetszeteiben!

1. A maximális hajlítónyomaték:

$$M_{max} = \frac{f \cdot l^2}{8} = \frac{10 \cdot 2^2}{8};$$

$$M_{max} = 5 \text{ kN} \cdot \text{m.}$$

($\approx 50\,000$ cmkp).

2. A nyíróerők:

$$V_{max} = A = B = \frac{f \cdot l}{2};$$

$$V_{max} = \frac{10 \cdot 2}{2};$$

$$V_{max} = 10 \text{ kN. } (\approx 1000 \text{ kp}).$$

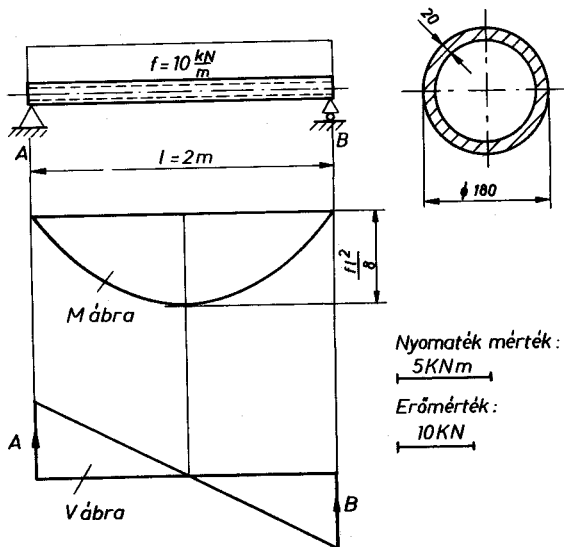
3. A csőkeresztmetszet másodrendű nyomatéka:

$$d_1 = 18 \text{ cm}; \quad d_2 = 14 \text{ cm.}$$

$$I = \frac{d_1^4 \cdot \pi}{64} - \frac{d_2^4 \cdot \pi}{64}$$

$$I = \frac{\pi}{64} (18^4 - 14^4);$$

$$I = 3265,6 \text{ cm}^4 \quad (\approx 3,2656 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4).$$



99. ábra

A szélső szál távolsága:

$$e = \frac{d_1}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm.}$$

4. A veszélyes keresztmetszetben keletkező hajlítófeszültség:

$$\sigma_{max} = \frac{M_h}{I} \cdot e;$$

$$\sigma_{max} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^{-2}}{3,2656 \cdot 10^{-5}} = 13\,780\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2};$$

$$\sigma_{max} = 13,78 \text{ MPa} \quad (\approx 137,8 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}).$$

Ha öv26 anyagot választunk, akkor $\sigma_{meg} = 75 \text{ MPa}$ (hajlításra Wöhler I. eset), tehát hajlításra a tartó megfelel.

5. A keletkező τ feszültség nagysága!

a) A körgyűrű keresztmetszete:

$$A = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4};$$

$$A = 100 \text{ cm}^2 \quad (= 10^{-2} \text{ m}^2).$$

b) Körgyűrű (cső) keresztmetszetnél az alaktényező: $c = 2$.

$$\tau_{max} = 2 \frac{F}{A};$$

$$\tau_{max} = 2 \frac{10^4}{10^{-2}} = \frac{20\,000}{10^{-2}} = 2\,000\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2};$$

$$\tau_{max} = 2 \text{ MPa} \quad \left(\approx 20 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right).$$

Látható, hogy a τ feszültség jóval kisebb, elhanyagolható a σ_{max} hajlítófeszültségnél.

46. PÉLDA

Válasszunk most az M_{max} és a $K_{szüks}$ ismeretében **különböféle keresztmetszeteket** amelyekkel helyettesíteni lehet az öntöttvas csövet.

Az anyagminőségre megengedett $\sigma_{hajl} = 150 \text{ MPa} = 150 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} (\approx 1500 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2})$.

1. Először az I tartót választjuk ki!

$$\sigma_{meg} = \frac{M}{K_{szüks}}, \text{ ebből a szükséges keresztmetszeti tényező:}$$

$$K_{szüks} = \frac{M}{\sigma_{meg}} = \frac{5 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} = 33,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3,$$

$$K_{szüks} = 33,33 \text{ cm}^3.$$

A táblázatban szereplő értékek alapján az I 100-as tartó felel meg legjobban ($K = 34,2 \text{ cm}^3 = 34,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$).

Ellenőrizzük, hogy a szükségesnél nagyobb keresztmetszet milyen mértékű hajlítófeszültséget eredményez:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{5 \cdot 10^3}{34,2 \cdot 10^{-6}} = 146,198 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2};$$

$$\sigma_{max} = 146,198 \text{ MPa}; \quad (\approx 1461,9 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}).$$

$$\sigma_{max} < 150 \text{ MPa} = \sigma_{hajl}.$$

Számítsuk most ki, hogy mekkora τ feszültség keletkezik!

$$\tau_{max} = \frac{F}{A_{gerinc}}.$$

A táblázat alapján számítva: $A_{gerinc} = 4,095 \text{ cm}^2 (= 4,095 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)$

$$\tau_{max} = \frac{10^4}{4,095 \cdot 10^{-4}} = 24,42 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \left(\approx 244 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right);$$

$$\tau_{max} = 24,42 \text{ MPa} < \tau_{meg} = 100 \text{ MPa} \quad \left(1000 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right).$$

Tehát a tartó nyírásra is megfelel.

2. Nézzük meg, hogy alakulnak a feszültségek, ha négyzet keresztmetszetű rudat készítenek az előző anyagból!

$$K_{szüks} = \frac{a^3}{6} \quad (\text{ahol } a \text{ a négyzet oldala}).$$

$$a = \sqrt[3]{6 K_{szüks}} \quad \text{és} \quad K_{szüks} = 33,3 \text{ cm}^3.$$

$$a = \sqrt[3]{199,8};$$

$$a = 5,84 \text{ cm}.$$

Ellenőrizzük nyírásra!

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{A}; \quad A = 34,1 \text{ cm}^2 (= 34,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2).$$

Behelyettesítve:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10^4}{34,1 \cdot 10^{-4}} = 4,398 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \left(43,98 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right).$$

$$\tau_{max} = 4,398 \text{ MPa} < \tau_{meg} = 100 \text{ MPa}.$$

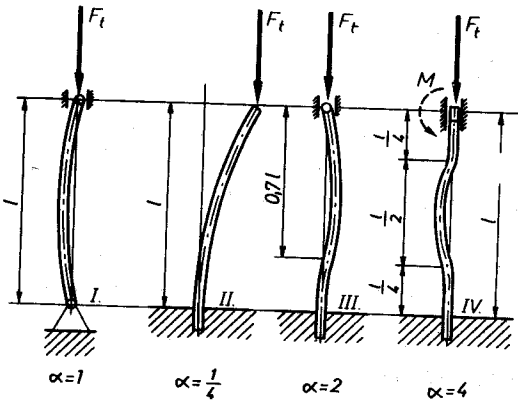
A négyzet keresztmetszetű tartó is megfelel nyírásra.

Az előzőekben látható volt, hogy a gyakorlatban a tiszta hajlítás vagy a tiszta nyírás eléggé ritkán fordul elő. A két igénybevétel együttes hatását vizsgálva azt tapasztaltuk, hogy a szerkezeteknél hol a hajlítás, hol a nyírás jelentkezik fő igénybevételként. Ezért úgy is jellemzik a két igénybevétel együttes hatását, hogy: hajlítással párosult nyírás vagy nyírással párosult hajlítás.

4.3. A kihajlás

Ha az átmérőjéhez (keresztmetszeti méreteihez) képest nagy hosszúságú, egyenes rudat a súlyponti hossz tengelyében nyomásra terhelünk, akkor a rúd oldalirányban kihajolhat.

Amíg a nyomóerő egy meghatározott értéknél kisebb, a rúd úgy viselkedik, mint azt a nyomó igénybevételnél tapasztaltuk: megrövidül. Ha a nyomóerőt növeljük, egy F_t értéknél a rúd oldalt kihajlik (100. ábra).



100. ábra

A kihajlás az erőhatás további növelése nélkül is fokozódhat és a rúd eltörhet.

A kísérleti vizsgálatok szerint a *vékony rudaknál* a kihajlás és a törés az anyagra megengedett rugalmassági határ (feszültség) elérése előtt is bekövetkezhet. *Zömök rudak esetében* viszont a törés csak a rugalmassági határ felett várható. Az előzőt **rugalmas vagy elasztikus kihajlásnak** nevezzük. A **rugalmas kihajlást okozó terhelőerő a törőerő (F_t)**.

[A rugalmas kihajlással Euler (1707–1783) Svájci matematikus foglalkozott. Az Orosz Tudományos Akadémia tagjaként sokban gazdagította a szilárdságtan tudományát.]

Euler rájött arra, és bebizonyította, hogy *a rúd kihajlása mindig a keresztmetszet azon tengelyére merőlegesen következik be, amelyre a másodrendű nyomaték legkisebb*. Kísérletileg azt is bebizonyította, hogy a törőerő értéke a befogás módjától is függ. Levezetései eredményeképpen megállapította, hogy

$$F_t = \alpha \cdot \pi^2 \cdot \frac{I_{\min} \cdot E}{l^2}$$

(Az α értékei a 100. ábrán láthatók, és a rúd megfogásának módjától függenek.) Az ábrán bejelölt l ; $0,7 l$; $0,5 l$ értékeket a *kihajló hosszak*.

A kihajlást természetesen mindig el kell kerülni, és a gyakorlatban megengedett erő kisebb, mint a törő: $F_{meg} < F_t$. Az $\frac{F_t}{F_{meg}}$ arányt biztonsági tényezőnek hívjuk és b -vel jelöljük.

$$b = \frac{F_t}{F_{meg}}; \quad (\text{acélra: } b_a = 1,7 - 3,5; \text{ fára: } b_f = 4 - 5)$$

A törőerő hatására fellépő feszültség a *törőfeszültség*:

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A}$$

A megengedett feszültség:

$$\sigma_{meg} = \frac{\sigma_t}{b}$$

[A plasztikus kihajlással Tetmajer Lajos (1850–1905) magyar származású tudós foglalkozott. Ennek részletes ismertetésétől eltekintünk.]

5. A csavaró igénybevétel

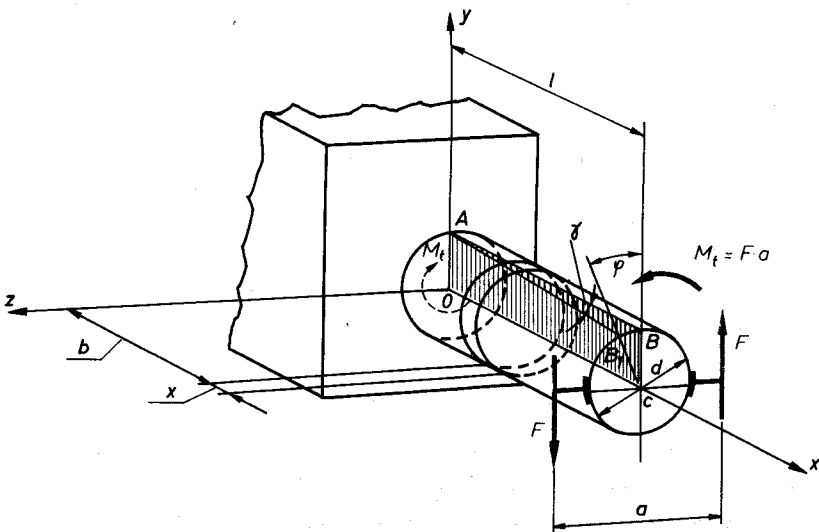
A 101. ábrán egy l hosszúságú d átmérőjű befogott rudat látunk, melyet a végén $F \cdot a = M_t$ nagyságú nyomaték terhel.

A nyomaték a szabad rúdvéget (keresztmetszetet) a befogott rúdvéghez képest az óramutató járásával ellentétes értelemben igyekszik elfordítani, másképpen az l hosszúságú rúdra M_t -vel vagy M_{cs} -vel jelölt *torziós vagy csavarónyomaték hat*.

Az egyensúly alapján azonban a befogás helyén ugyanakkora nagyságú, de ellentétes értelmű reakciónyomaték keletkezik.

Ábránkon jól látható, hogy a vonalkázott AOBC sík az igénybevétel hatására csavarodik, AOB₁C helyzetet vesz fel.

Az az igénybevétel, amelyet két, párhuzamos síkban fekvő, azonos nagyságú, de ellentétes értelmű nyomaték hoz létre a **csavaró igénybevétel**.

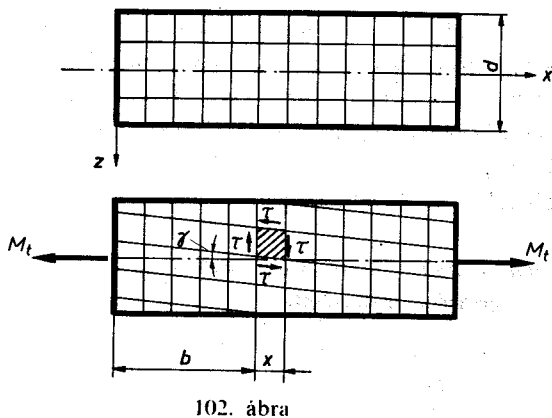


101. ábra

A két nyomaték a rúd d átmérőjű keresztmetszeit az x tengely körül igyekszik elfordítani - ez a tengely a *csavarás tengelye*. A műszaki gyakorlatban csavarásnak kitett helyeken általában kör és körgyűrű keresztmetszeteket alkalmaznak. A fogalmak meghatározásait és levezetéseinket ezekre a keresztmetszetekre vonatkoztatjuk.

5.1. Csavarófeszültségek

A 102. ábrán oldalnézetben ábrázoltuk a 101. ábrán látható rudat. A nyomatékok nyomatékvektorral adtuk meg. A csavarónyomaték vektora a keresztmetszetre merőleges, a keresztmetszettől kifelé mutat. Ha nyilával szemben nézünk, a nyomaték forgatási értelme az óramutató járásával ellentétes.



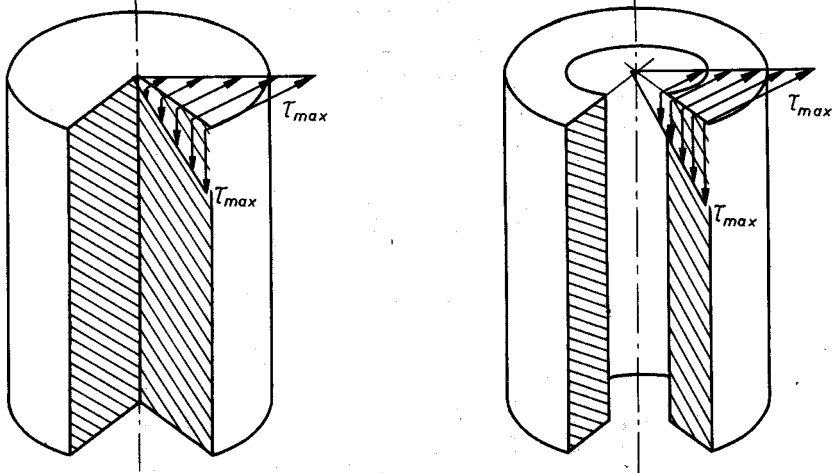
102. ábra

Terheletlen állapotban egymásra merőleges vonalhálózatot rajzoltunk a d átmérőjű rúd felszínére. (102. a) ábra.) A csavarás hatására a hálózat x irányú vonalai elfordultak, de a rúdvégek és a velük párhuzamos z irányú vonalak változatlanok maradtak. (102. b) ábra.)

Összegezzük a tapasztaltakat:

1. A csavaró igénybevétel hatására a rúdvégek keresztmetszei és valamennyi x tengelyre merőleges síkú keresztmetszet a tengelyre merőlegesek maradnak és alakjuk nem változik meg.
2. Az egymástól ugyanakkora távolságban levő keresztmetszetek egymáshoz viszonyítva egyforma (γ) szöggel fordulnak el.
3. A palást x irányú vonalai az igénybevétel hatására csavarvonal alakot vesznek fel.

A csúsztató rugalmassági tényező bevezetésekor megtanultuk, hogy szögváltozás esetén τ feszültség jelenlétére kell következtetnünk. A dualitás értelmében mind a keresztmetszet síkjában, mind pedig a rá merőleges síkokban τ feszültségek ébrednek. Ezt szemléltetjük a 102. b) és a 103. ábrákon.



103. ábra

5.2. A csavarás alapegyenlete

A 101. ábrán láttuk, hogy csavarás hatására a keresztmetszet **C** és **O** pontja (x tengely) helyben maradt. A **B** pont elfordult **B₁** pontba, az elfordulás körpályán történt. Az $A-B$ szál γ szöggel fordult $A-B_1$ -be, a CB_1 szöget φ -vel jelöltük és $CB = CB_1 = r$.

Nagyon kis szögelfordulások esetén a matematikában tanultak alapján írható:

$$1. BB_1 = \varphi \cdot \frac{d}{2}, \text{ vagy } BB_1 = \varphi \cdot r,$$

$$2. BB_1 = \gamma \cdot l.$$

A két összefüggés összehasonlításából:

$$\gamma \cdot l = \varphi \cdot r, \text{ azaz: } \gamma = r \cdot \frac{\varphi}{l}.$$

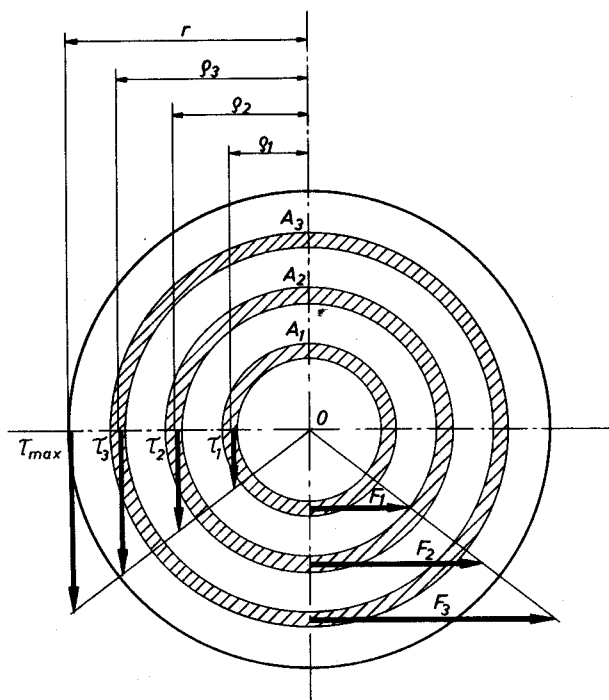
Mivel a $\frac{\varphi}{l}$ állandó, a γ szög a sugárral egyenes arányban változik. Felírható továbbá, hogy

$$\tau = \gamma \cdot G.$$

Behelyettesítve γ -t:

$$\tau = r \cdot \frac{\varphi}{l} \cdot G.$$

A τ feszültség tehát a sugárnak is függvénye, és – megelőző tanulmányaink alapján – a sugárra merőleges.



104. ábra

Metsszük most ki az x hosszúságú rúdelemet a 101. ábrán rajzolt rúdból, és vizsgáljuk a rúdvég felőli keresztmetszetet (104. ábra). E célból vegyünk fel benne pl. a középpontból $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ távolságra nagyon kis méretű körgyűrű alakú területrészeket: A_1, A_2, A_3 . A csavarónyomaték hatására a keresztmetszetekben a τ csavarófeszültségek a sugarakkal arányosak:

$$\tau_1 : \tau_{max} = \varrho_1 : r;$$

$$\tau_2 : \tau_{max} = \varrho_2 : r;$$

$$\tau_3 : \tau_{max} = \varrho_3 : r.$$

Ezekből:

$$\tau_1 = \tau_{max} \frac{\varrho_1}{r}; \quad \tau_2 = \tau_{max} \frac{\varrho_2}{r}; \quad \tau_3 = \tau_{max} \frac{\varrho_3}{r}.$$

A τ feszültségeket az M_x csavaró nyomaték okozta. Ezek összefüggését a következő módon határozhatjuk meg:

1. Továbbra is az A_1, A_2, A_3 körgyűrű alakú elemi keresztmetszeteket vizsgáljuk, melyek $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ távolságra vannak O ponttól (104. ábra).

2. A $\tau = \frac{F}{A}$ egyenlet alapján a *belső erők*:

$$F_1 = A_1 \cdot \tau_1;$$

$$F_2 = A_2 \cdot \tau_2;$$

$$F_3 = A_3 \cdot \tau_3.$$

3. A *belső erőknek a csavarás tengelyére számított nyomatéka*:

$$M_1 = F_1 \cdot \varrho_1 = A_1 \tau_1 \cdot \varrho_1;$$

$$M_2 = F_2 \cdot \varrho_2 = A_2 \tau_2 \cdot \varrho_2;$$

$$M_3 = F_3 \cdot \varrho_3 = A_3 \tau_3 \cdot \varrho_3.$$

4. A keresztmetszetben ébredő és a külső csavarónyomatékkal egyenlő nagyságú *belső nyomaték* a felületelemeken fellépő erők nyomatékainak az összege:

$$M_t = M_1 + M_2 + M_3 + \dots,$$

$$M_t = A_1 \tau_1 \varrho_1 + A_2 \tau_2 \varrho_2 + A_3 \tau_3 \varrho_3 + \dots.$$

Behelyettesítve az egyes keresztmetszetekre kapott csavarófeszültségeket:

$$M_t = A_1 \tau_{max} \frac{\varrho_1^2}{r} + A_2 \tau_{max} \frac{\varrho_2^2}{r} + A_3 \tau_{max} \frac{\varrho_3^2}{r} + \dots,$$

Emeljük ki a $\frac{\tau_{max}}{r}$ -et:

$$M_t = \frac{\tau_{max}}{r} \cdot (A_1 \varrho_1^2 + A_2 \varrho_2^2 + A_3 \varrho_3^2 + \dots).$$

5. A zárójelben levő kifejezés a *kör keresztmetszet poláris (pontra vonatkoztatott) másodrendű nyomatéka*. Jele: I_p , mértékegysége: m^4 (méter a negyediken).

$$I_p = A_1 \varrho_1^2 + A_2 \varrho_2^2 + A_3 \varrho_3^2 + \dots$$

Tehát:

$$M_t = \tau_{max} \cdot \frac{I_p}{r}.$$

6. A poláris másodrendű nyomaték és a csavarás tengelyétől mért távolság hányadosa a *kör keresztmetszeti tényezője* (K_p):

$$K_p = \frac{I_p}{r}, \quad \text{Mértékegysége: } m^3 \text{ (méter a harmadikon).}$$

7. A *csavarás alapegyenlete*:

$$M_t = \tau_{max} \cdot K_p$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{K_p}, \quad \text{mértékegysége: } \frac{N}{m^2}.$$

A levezetés alapján a következőket állapíthatjuk meg:

1. A csavaró igénybevétel nyomaték (M_t) hozza létre.
2. Csavarónyomaték hatására a keresztmetszetben τ feszültségek ébrednek.
3. A τ csavarófeszültség nemcsak a keresztmetszet nagyságától, hanem az alakjától és a csavarás tengelyétől mért távolságtól is függ (K_p).

A poláris másodrendű nyomaték integrálszámítással kapott végképleteit levezetés nélkül közöljük:

Kör keresztmetszetre:

$$I_p = \frac{d^4 \cdot \pi}{32}; \quad K_p = \frac{d^3 \cdot \pi}{16} \approx 0,2 d^3.$$

Körgyűrű keresztmetszetre:

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \quad (\text{ahol a } D \text{ a külső, } d \text{ a belső átmérő});$$

$$K_p = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D}.$$

5.3. Alakváltozás csavaráskor

A 101. ábrán láttuk, hogy az l hosszúságú kör keresztmetszetű rúd vége az $M_t = F \cdot a$ nagyságú csavarónyomaték hatására φ szöggel elfordult a befogott keresztmetszethez képest. Határozzuk meg, hogy mitől függ a φ elfordulási szög nagysága!

A 101. ábránál bebizonyítottuk, hogy:

$$\gamma \cdot l = \varphi \cdot r; \quad \text{amiből: } \gamma = \varphi \cdot \frac{r}{l}.$$

Hooke törvényéből tudjuk, hogy: $\tau = G \cdot \gamma$; amiből: $\gamma = \frac{\tau}{G}$.

A két egyenletből: $\varphi \cdot \frac{r}{l} = \frac{\tau}{G}$, és $\varphi = \frac{\tau \cdot l}{G \cdot r}$.

A kerületen a csavarás tengelyétől r távolságra ébredő feszültség:

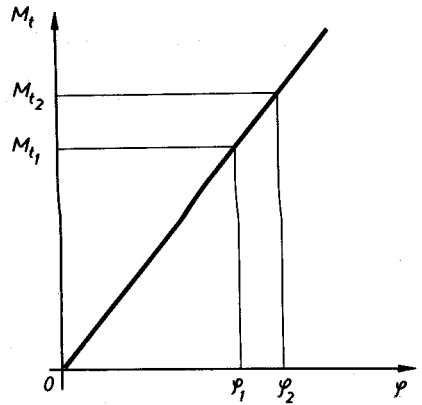
$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r.$$

Behelyettesítve az elfordulási szög képletébe:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot r \cdot l}{I_p \cdot G \cdot r} = \frac{M_t \cdot l}{I_p \cdot G}$$

Adott rúd esetén a hossz (l), a csúsztató rugalmassági tényező (G) és a poláris másodrendű nyomaték (I_p) állandó. Az elfordulási szög (φ) egyenesen arányos a csavarónyomatékkal (M_t). Mértékegysége: radián.

Az elcsavarodási szög és a csavarónyomaték közötti összefüggést a 105. ábra szemlélteti.



105. ábra

5.4. Méretezés csavarásra

A csavarásra terhelt rudat a következő szempontok szerint méretezzük (ellenőrizzük).

1. A rúdban a csavaráskor ébredő τ_{max} feszültség nem lépheti túl a rúd anyagára megengedett τ feszültséget:

$$\tau_{max} \leq \tau_{meg}$$

2. Adott anyagú és hosszúságú rúd elcsavarodása nem lehet nagyobb egy megengedett értéknél. Például megadják a méterenkénti megengedett elcsavarodási szög értékét.

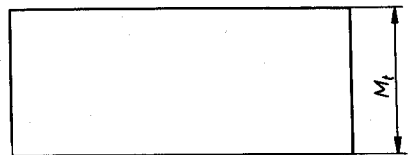
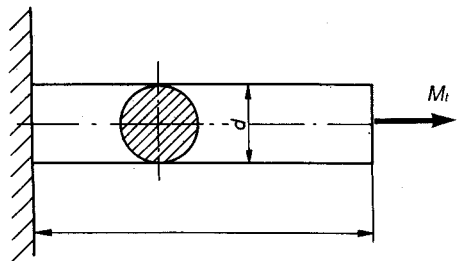
47. PÉLDA

A 106. ábrán egy tengelyt látunk, melyet $M_t = 700 \text{ N}\cdot\text{m}$ nyomaték csavarásra terhel. Határozzuk meg a tengely átmérőjét, ha

$$\tau_{meg} = 60 \text{ MPa} = 60 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \left(= 600 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right);$$

$$G = 80 \text{ GPa} = 80 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \left(= 800\,000 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right)!$$

Milyen hosszú legyen a tengely (l), ha $\varphi = 1^\circ$ -os elcsavarodást engedünk meg?



106. ábra

1. a) Írjuk fel a csavarás alapegyenletét!

$$\tau = \frac{M_t}{K_p}, \quad \text{de: } K_p = \frac{d^3 \cdot \pi}{16}, \quad \text{ezért: } \tau = \frac{M_t \cdot 16}{d^3 \cdot \pi}$$

Fejezzük ki ebből d -t!

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \cdot \tau_{\text{meg}}}}$$

b) Behelyettesítve az adatokat:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 70}{\pi \cdot 6 \cdot 10^6}} \approx \sqrt[3]{\frac{59,44}{10^6}} = 0,039 \text{ m},$$

$$d = 40 \text{ mm}.$$

2. a) Írjuk fel az elcsavarodási szög összefüggését!

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{I_p \cdot G}, \quad \text{ebből: } l = \frac{\varphi \cdot I_p \cdot G}{M_t}$$

b) Behelyettesítve az adatokat:

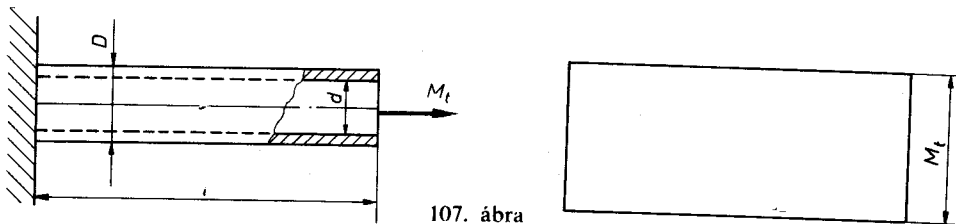
$$l = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-2})^4 \cdot \pi \cdot 80 \cdot 10^9}{32 \cdot 700} = 0,5013 \text{ m},$$

$$l = 0,5 \text{ m}.$$

Megjegyezzük, hogy az $l = 0,5$ m-re jutó $\varphi = 1^\circ$ elcsavarodás meglehetősen nagy az általánosan megengedett értékekhez viszonyítva. (A 106. ábrán felrajzoltuk a csavarónyomatékok ábráját is!)

48. PÉLDA

A 107. ábrán egy körgyűrű keresztmetszetű csövet láthatunk, melynek méretei a következők: $D = 6 \text{ cm}$; $d = 2,8 \text{ cm}$;



107. ábra

$$\tau_{\text{meg}} = 55 \text{ MPa} = 59 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} (= 550 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}); \quad l = 3 \text{ m}.$$

1. Határozzuk meg, hogy mekkora M_t csavarónyomaték engedhető meg!

2. Számítsuk ki a csőtengely szögelfordulását! Rajzoljuk fel a csavarónyomatékok ábráját!

Megoldás

1. a) Írjuk fel a csavarás alapegyenletét!

$$\tau = \frac{M_t}{K_p}, \quad \text{ebből: } M_t = \tau \cdot K_p \quad K_p = \frac{\pi}{16} \left[\frac{D^4 - d^4}{D} \right].$$

b) Behelyettesítve az adatokat:

$$K_p = \frac{\pi}{16} \left[\frac{6^4 - 2,8^4}{6} \right] = 40,4 \text{ cm}^3 \quad (40,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3),$$

$$M_t = 55 \cdot 10^6 \cdot 40,4 \cdot 10^{-6} = 2222 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad (2,222 \text{ kN} \cdot \text{m}).$$

2. a) Írjuk fel az elcsavarodás egyenletét!

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{I_p \cdot G}; \quad G = 80 \text{ GPa}, \quad (80 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}),$$

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32} (6^4 - 2,8^4) = 121,13 \text{ cm}^4 \quad (121,13 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4).$$

b) Behelyettesítve az adatokat:

$$\varphi = \frac{2,222 \cdot 10^3 \cdot 3}{121,13 \cdot 10^{-8} \cdot 80 \cdot 10^9} = 0,0688 \text{ rad} = 3,94^\circ.$$

6. Összetett igénybevételek

Ha két igénybevétel (pl. hajlítással párosult nyírás) együtt lép fel, akkor az igénybevétel összetett. Az összetett igénybevételek csoportosítása:

1. Ha valamelyik egyszerű igénybevétel miatt fellépő feszültség jóval meghaladja a másikat, ilyenkor egy *egyszerű igénybevételekre érvényes összefüggések alapján méretezünk*, a kisebb feszültséget okozó igénybevételt nem vesszük figyelembe. (Például szegecsméretezésnél valójában hajlítva nyírás lép fel, de a hajlítás olyan kicsi, hogy csak tisztá nyírásra méretezünk.)

2. Ha a két egyszerű igénybevétel okozta feszültségek jellege azonos (csak τ vagy σ), akkor *egyirányú összetett igénybevételről beszélünk* (pl. húzás-hajlítás, nyomás-hajlítás, nyírás-csavarás).

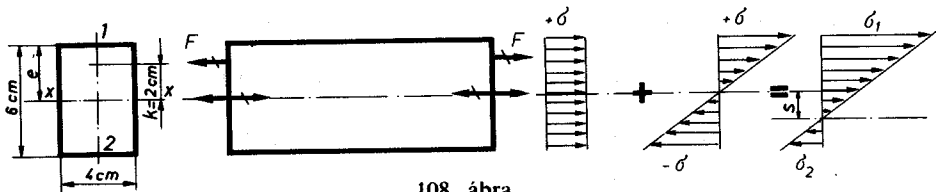
3. Ha a két egyszerű igénybevétel okozta feszültségek jellege eltérő, tehát egyidejűleg σ és τ feszültségek is fellépnek; *többirányú összetett igénybevétel szerint számolunk* (pl. húzás-csavarás, hajlítás-csavarás).

6.1. A húzó-hajlító igénybevétel

A 108. ábrán egy téglalap keresztmetszetű acélrudat látunk, melyet az ábrán vázolt módon F erő terhel húzásra. Az F erő a keresztmetszet súlypontján átmenő $x-x$ tengelytől 2 cm-re terheli a keresztmetszetet.

A statikában elsajátított erőáthelyezést végrehajtva rögtön láthatjuk, hogy a rudat az F húzóerőn kívül egy erőpár is terheli, ami hajlításra veszi igénybe a rudat.

Probléma: az eredő feszültség meghatározása.



108. ábra

49. PÉLDA

A 108. ábra szerinti rudat $F = 200 \text{ kN}$ erő terheli.

1. Számítsuk ki először a húzófeszültséget!

$$\sigma_{\text{húzó}} = \frac{F}{A} = \frac{200 \cdot 10^3}{24 \cdot 10^{-4}} = 83,33 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 83,33 \text{ MPa} \quad (\approx 833,3 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}).$$

2. Számítsuk ki a hajlítófeszültséget!

A hajlítónyomaték:

$$M_h = F \cdot k = 200 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

A keresztmetszeti tényező:

$$K = \frac{a \cdot b^2}{6} = \frac{4 \cdot 6^2}{6} = 24 \text{ cm}^3 = 24 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Így:

$$\sigma_{\text{hajl}} = \frac{M_h}{K} = \frac{4000}{24 \cdot 10^{-6}} = \frac{4 \cdot 10^9}{24} = 166,66 \text{ MPa} \quad (\approx 16666 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}).$$

3. Az eredő feszültség:

A keresztmetszet 1. pontjában:

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{húzó}} + \sigma_{\text{hajl}} = 83,33 + 166,66 = 250 \text{ MPa} \quad (\approx 2500 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}).$$

A keresztmetszet 2. pontjában:

$$\sigma_2 = \sigma_{\text{húzó}} - \sigma_{\text{hajl}} = 83,33 - 166,66 = -83,33 \text{ MPa} \quad (\approx -833,3 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}).$$

Látható tehát, hogy az 1. pontban húzó-, a 2. pontban nyomófeszültség ébred a terhelés hatására.

Összefoglalva

1. Egyirányú összetett igénybevételre való méretezés és ellenőrzés esetén (pl. húzás-hajlítás) arra kell törekedni, hogy a keletkező legnagyobb feszültség kisebb legyen, mint az anyagra megengedett σ_{hajl} feszültség ($\sigma_{\text{hajl}} = \sigma_{\text{meg}}$):

$$\sigma_{\text{max}} < \sigma_{\text{meg}}$$

(A megengedett feszültségértékeket a példatárban találhatjuk meg.)

2. A maximális, azaz a legnagyobb feszültség a két részfeszültség összege:

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{húzó}} + \sigma_{\text{hajl}}.$$

3. Az egyidejű húzó és hajlító igénybevétel esetén a semleges réteg eltolódik (108. ábra).

6.2. A nyomó-hajlító igénybevétele

50. PÉLDA

A 109. ábrán egyik végén befogott tartót látunk. A tartó $l = 0,2$ m hosszú és $d = 4$ cm átmérőjű acélrúd. Szabad végét $F = 8$ kN erő terheli hossz tengelyéhez viszonyítva 45° -os szögben.

Határozzuk meg:

1. Milyen és mekkora a rúd igénybevétele?
2. Hol, azaz melyik keresztmetszetben és a keresztmetszet melyik helyén lép fel a maximális feszültség, és mekkora az?

Megoldás

1. $F_x = F \cdot \cos 45^\circ$,
 $F_x = 8000 \cdot 0,7071 = 5657 \text{ N}$ ($\approx 565,7$ kp).
 $F_y = F \cdot \sin 45^\circ$,
 $F_y = 8000 \cdot 0,7071 = 5657 \text{ N}$.

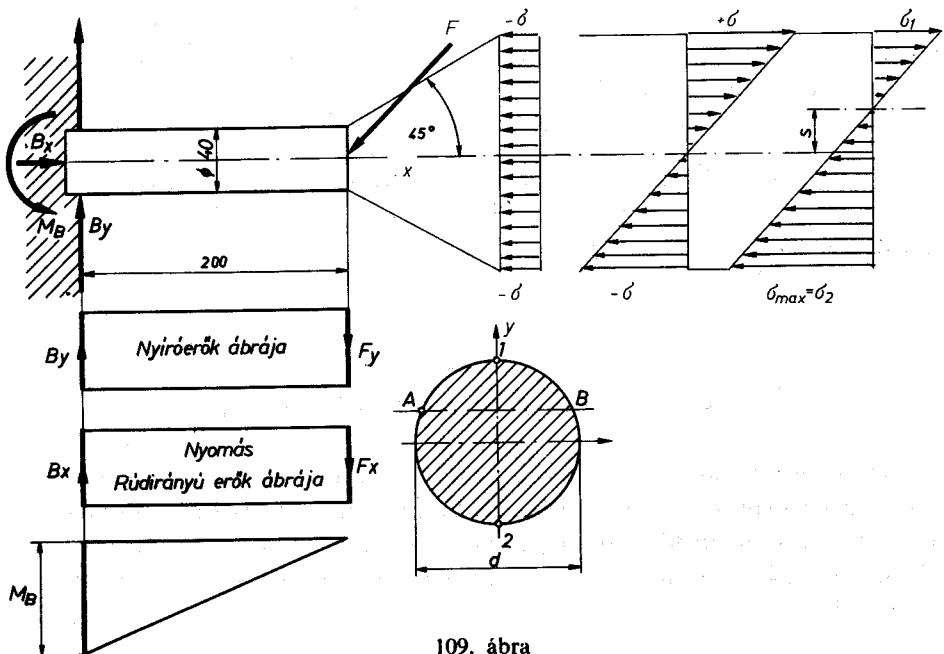
Reakcióerők:

$$B_x = -F_x = -5657 \text{ N};$$

$$B_y = -F_y = -5657 \text{ N}.$$

Reakciónyomaték:

$$M_B = F_y \cdot l = 5657 \cdot 0,2 = 1131,4 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (\approx 113,14 \text{ mkp})$$



109. ábra

- A rúd igénybevétele: – nyomás ($\approx 5657 \text{ N}$),
 – hajlítás ($\approx 1131,4 \text{ N}\cdot\text{m}$),
 – nyírás ($\approx 5657 \text{ N}$).

2. Az igénybevételi ábrák megrajzolása után számítsuk ki a keletkező feszültségeket:

$$\sigma_{nyomó} = -\frac{B_x}{A} = \frac{5657}{12,56 \cdot 10^{-4}} = -4\,503\,980 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} (= -4,504 \text{ MPa}) (\approx 45,0 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}).$$

$$\sigma_{hajl} = \frac{M}{I} \cdot \frac{d}{2} = \frac{1131,4 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 64}{(4 \cdot 10^{-2})^4 \cdot \pi \cdot 2},$$

$$\sigma_{hajl} = 180,15 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 180,15 \text{ MPa} (= 1801,5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}).$$

A legnagyobb feszültség a befogás keresztmetszetében ébred.

A keresztmetszet 1. pontjában az eredő feszültség:

$$\sigma_1 = \sigma_{nyomó} - \sigma_{hajl},$$

$$\sigma_1 = 180,15 - 4,50 = 175,65 \text{ MPa (húzófeszültség)} (\approx 1755,7 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}).$$

A keresztmetszet 2. pontjában az eredő feszültség:

$$\sigma_2 = \sigma_{hajl} + \sigma_{nyomó},$$

$$\sigma_2 = -4,58 - 180,15 = -184,65 \text{ MPa (nyomófeszültség)} (\approx -1847,3 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}).$$

A semleges szálréteg (a hajlítás tengelye) s -sel eltolódott, így az AB egyenesen fekvő pontokban nem ébred feszültség.

A $B_y = 56,57 \text{ kN}$ nyíróerő hatására ébredő τ feszültség:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{B_y}{A} = \frac{4}{3} \frac{5657}{12,56 \cdot 10^{-4}} = 6 \cdot 10^6 = 6 \text{ MPa} (\approx 60 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}).$$

Ez jelentéktelen értékű, nem vesszük figyelembe.

6.3. Több irányú összetett igénybevétel

Mint már említettük, ha egy alkatrészben (keresztmetszetében) egyidejűleg σ és τ feszültségek ébrednek, több irányú összetett igénybevételről beszélünk. Ilyenkor nem állapítható meg az eredő feszültség olyan egyszerűen, mint az egyirányú összetett igénybevételeknél. A méretezést, illetve az ellenőrzést a Mohr-féle feszültségelmélettel végezzük.

Otto Mohr (1835–1918), neves szilárdságtani kutató hosszú kísérletezés és matematikai levezetés után hajlítás-csavarás és hajlítás-nyírás esetére azt a feszültségelméletet alkotta meg, amelynek végeredménye:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

A redukált feszültség (σ_{red}) egy eredő feszültség, amely a négyzetgyökjel alatti húzó-, nyomó- vagy hajlítófeszültségből (σ) és a nyíró- vagy csavarófeszültségből (τ) számolható.

A $\sigma_{red} \cong \sigma_{meg}$ -tel, amit a következőképpen kell értelmezni: pl. ha hajlítás és csavarás terheli az alkatrészt, akkor a σ_{meg} a hajlításánál található σ_{meg} -tel egyenlő. Tehát normál és csúsztatófeszültség esetén a normál feszültség a mérvadó.

Hajlítás-csavarás esetén a *méretezés, ellenőrzés lépései* a következők:

1. Meghatározzuk a σ_{hajl} feszültséget.
2. Meghatározzuk a τ_{csav} feszültséget.
3. Kiszámítjuk a σ_{red} feszültséget.
4. Összehasonlítjuk a táblázatban a hajlításnál előírt σ_{meg} feszültséggel.

Hajlítás-csavarás esetén, ha kör vagy körgyűrű keresztmetszettel van dolgunk a *méretezés, ellenőrzés menete* a következő:

1. Felírjuk a hajlítás képletét:

$$\sigma_{hajl} = \frac{M_h}{K}.$$

2. Felírjuk a csavarás képletét:

$$\tau_{csav} = \frac{M_t}{K_p}.$$

Figyelembe vesszük a $K_p = 2K$ összefüggést és behelyettesítjük az egyenletbe:

$$\tau_{csav} = \frac{M_t}{2K}.$$

3. Felírjuk a Mohr-féle összefüggés négyzetes alakját és az előzőket behelyettesítjük:

$$\sigma^2 + 4\tau_{cs}^2 = \sigma_{red}^2;$$

$$\sigma^2 + 4\tau_{cs}^2 = \frac{M_h^2}{K^2} + \frac{4M_t^2}{(2K)^2} = \frac{M_h^2}{K^2} + \frac{4M_t^2}{4K^2};$$

$$\sigma_{red}^2 = \frac{M_h^2 + M_t^2}{K^2};$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{M_h^2 + M_t^2}{K^2}};$$

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{M_h^2 + M_t^2}}{K}.$$

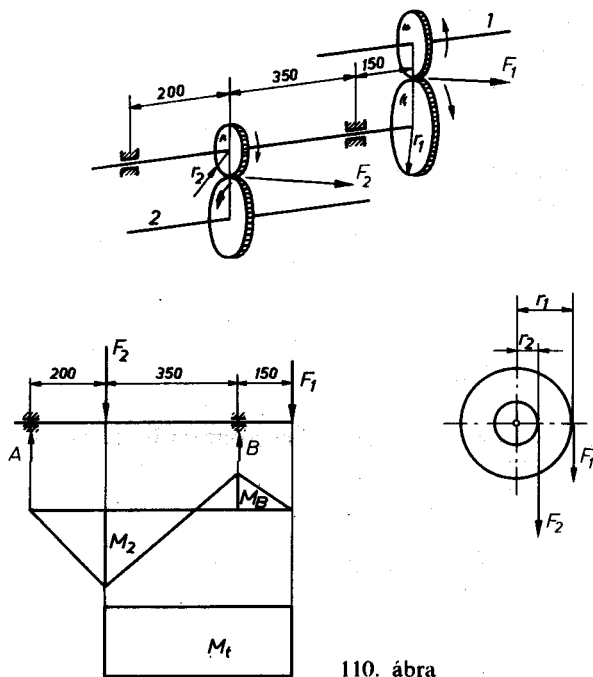
4. $\sigma_{red} = \frac{M_{red}}{K}$, így a redukált nyomaték: $M_{red} = \sqrt{M_h^2 + M_t^2}$

$$\sigma_{red} \leq \sigma_{meg}$$

Tehát úgy méretezünk, illetve ellenőrzünk, mintha csak hajlító igénybevétel terhelné a szerkezetet, de M_h helyett M_{red} -tal számolunk.

51. PÉLDA

Egy $d = 75$ mm átmérőjű, A és B helyeken csapágyazott tengely $P = 29,4$ kW teljesítményt visz át fogaskerékpárokkal az 1. tengelyről a 2. tengelyre (110. ábra). A tengelyt $M_t = 1908$ N·m csavarónyomaték terheli. A fogaskerekek osztóköreinek sugara $d_1 = 30$ cm, $r_2 = 10$ cm. Megfelel-e a tengely átmérője, ha $\sigma_{meg} = 95$ MPa ($= 950 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$)?



110. ábra

a) Határozzuk meg a σ_{red} feszültséget a Mohr-elmélettel!

1. A tengelyt terhelő fognyomásokból adódó kerületi erők:

$$F_1 = \frac{M_t}{r_1} = \frac{1908}{0,3} = 6360 \text{ N}; \quad F_2 = \frac{M_t}{r_2} = \frac{1908}{0,1} = 19080 \text{ N}.$$

A tengelyt a két fogaskerékpár között 1908 N·m csavarónyomaték terheli.

2. A tengelyt terhelő hajlítónyomatékok, ha $A = 10\,400$ N és $B = 15\,040$ N reakcióerők hatnak: Az F_2 függőlegesében: $M_2 = A \cdot 0,2 = 2080$ N·m.

A B függőlegesében: $M_B = -F_1 \cdot 0,15 = -6360 \cdot 0,15 = -954$ N·m.

3. A feszültségek:

$$\sigma_{hajl} = \frac{M_h}{I} \cdot \frac{d}{2},$$

$$I = \frac{d^4 \cdot \pi}{64} = \frac{7,5^4 \cdot \pi}{64} = 155,23 \text{ cm}^4 = 155,23 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4,$$

$$\sigma_{hajl} = \frac{2080}{155,23 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{7,5 \cdot 10^{-2}}{2} = 50,248 \text{ MPa} \quad (= 502,48 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}),$$

$$\tau_{csav} = \frac{M_t}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_t}{2I} \cdot \frac{d}{2} \quad (\text{mivel } I_p = 2I),$$

$$\tau_{csav} = \frac{1908 \cdot 7,5 \cdot 10^{-2}}{310,46 \cdot 10^{-8} \cdot 2} = 23,046 \text{ MPa} \quad (= 23,046 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}; 230,46 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2})$$

4. A redukált feszültség Mohr elmélete alapján:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2},$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{50,248^2 + 4 \cdot 23,046^2} = 68,186 \text{ MPa},$$

$$68,186 \text{ MPa} < 95 \text{ MPa}, \text{ tehát } \sigma_{red} < \sigma_{meg}.$$

A választott tengelyátmérő az igénybevételnek megfelel.

b) A következőkben σ_{meg} ismeretében határozzuk meg a tengely átmérőjét!

$$M_h = 2080 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad M_t = 1908 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{és} \quad \sigma_{meg} = \sigma_{red} = 95 \text{ MPa}.$$

Az alapösszefüggés:

$$\sigma_{meg} = \sigma_{red} = \frac{M_{red}}{K} = \frac{M_{red}}{\frac{d^3 \cdot \pi}{32}};$$

ebből:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{red}}{\pi \cdot \sigma_{red}}}.$$

A redukált nyomaték:

$$M_{red} = \sqrt{M_t^2 + M_h^2} = \sqrt{1908^2 + 2080^2} = 2822,56 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Behelyettesítve az értékeket:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2822,56}{\pi \cdot 95 \cdot 10^6}} = 0,067 \text{ m} \quad (= 67 \text{ mm});$$

Tehát, ha megengedünk 95 MPa feszültséget, akkor a 75 mm-es tengelyátmérő helyett a 67 mm is megfelel.

Hajlítva nyírás esetén, ahol a τ nyírófeszültség nem hanyagolható el, szintén a Mohr-féle elmélettel végezzük a méretezést és az ellenőrzést.