

1. Halmazok, halmazműveletek, pontthalmazok

A) Halmazok

Halmaz, halmazhoz tartozás: alapfogalom (bizonyos tulajdonságok, pontok összessége)

Egy halmazt akkor tekintünk adottnak, ha minden dologról egyértelműen eldönthető, hogy eleme ennek a halmaznak vagy nem.

Jelölés: $A, B, H_1, \dots$ (nagybetűk)

Elemei: $a, b, c, \dots$ (kisbetűk)

x : a elem A halmaz eleme

Megadás:

- Felsorolással: $A = \{1; 2; 3; 4\}$
- Tulajdonsággal: $B = \{\text{négyszögek}\}$, $C = \{\text{pozitív egész számok 100-ig}\}$
- Képlettel: $S = \{x \mid \dots, x < 1000\}$
- Egyéb módon

Részhalmaz:

A halmaznak részhalmaza B halmaz, ha B halmaz minden eleme eleme A halmaznak.

Valódi részhalmaz: $A \subset B$, A-nak B-n kívül is van eleme

Nem valódi részhalmaz: $A \not\subset B$, nem föltétlenül van A-nak B-n kívüli eleme

$A=B$: Két halmaz egyenlő, ha elemeik megegyeznek ($A \subset B$ és $B \subset A$)

Üreshalmaz: $\emptyset = \{ \}$, olyan halmaz, melynek nincs eleme. Ez minden halmaznak részhalmaza.

Alaphalmaz: Olyan halmaz, melynek $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ halmazok részhalmazai.

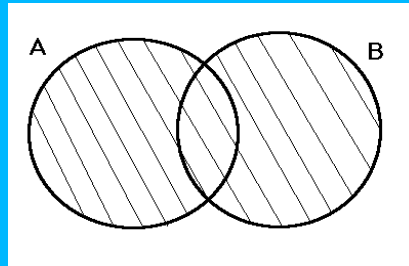
B) Halmazműveletek

Unió: $A \cup B$, az a C halmaz, melynek eleme minden A-ban és minden B-ben előforduló elem, és ezeken kívül nincs más eleme.

Metszet: $A \cap B$, az a C halmaz, melynek elemei A-nak és B-nek is elemei, és ezeken kívül nincs más eleme. Diszjunkt halmaz: $A \cap B = \emptyset$.

Különbség: $A \setminus B$, az a C halmaz, aminek elemei A-nak elemei, de B-nek nem, és nincs más eleme.

Direkt szorzat: $A \times B$, C elemei $(a;b)$, ahol $a \in A$ és $b \in B$, az összes ilyen rendezett pár.



Műveleti tulajdonságok (vagy műveleti axiómák):

1. $a \cdot b = b \cdot a$, kommutatív (felcserélhető)
 2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, asszociatív (csoportosítható)
 3. Egység: $a \cdot 1 = a$, $1 \cdot a = a$
 4. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$,
disztributív (széttagolható)
 5. $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
- Mindezeket szemléltetéssel bizonyítjuk (Venn-diagram).

Komplementer: Egy A halmaz komplementerhalmaza az alaphalmaz (H) azon elemeiből áll, amelyek az A halmaznak nem elemei.

A^c : A komplementer halmaza

De Morgan-szabályok: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Tétel: Bármely n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van.

Bizonyítás: Teljes indukcióval

0-ra, 1-re, 2-re igaz a tétel:

$$n=0 \quad \{ \} \quad 1=2^0$$

$$n=1 \quad \{ \}, \{a\} \quad 2=2^1$$

$$n=2 \quad \{ \}, \{a\}, \{b\}, \{a;b\} \quad 4=2^2$$

Tegyük fel, hogy az n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van.

Bizonyítani kell, hogy az n+1 elemű halmaznak 2^{n+1} részhalmaza van.

n+1 elemből vegyünk ki egy elemet, ekkor n elemű halmazt hozunk létre. Ennek az indukciós feltétel szerint 2^n részhalmaza van. Ha minden részhalmazba beletesszük a kivett elemet, újabb 2^n részhalmazt kapunk. Ekkor az n+1 elemű halmaz összes részhalmazát összeszámoltuk, mivel két eset lehetséges: a kivett elem szerepel egy részhalmazban, vagy nem. Tehát az n+1 elemű halmaznak $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ részhalmaza van.

C) Ponthalmazok

Szokásos megadási módja: képlet, pl. $A = \{P(x;y) \mid x+y < 1; x > 0; y > 0\}$

Nevezetes pontthalmazok:

-Síkbeli pontthalmazok:

Szakaszfelező merőleges: egy szakasz két végpontjától egyenlő távolságra levő pontok halmaza.

Szögfelező: egy szögtartomány két szárától azonos távolságra lévő pontok halmaza.

Kör: egy ponttól azonos távolságra lévő pontok halmaza.

Ellipszis: azon pontok halmaza, melyek két ponttól vett távolságaik összege állandó.

Hiperbola: azon pontok halmaza, melyek két ponttól vett távolságaik különbsége állandó.

Parabola: egy ponttól és egy egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza.

-Térbeli ponthalmazok:

Szakaszfelező sík, gömb, ellipszoid, hiperbolikus felület, paraboloid.

Szögfelező sík (két sík hajlásszögétől egyenlő távolságra lévő sík).

D) Alkalmazások

Matematikai:

Algebra: számhalmazok ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), prímek; egyenletek megoldáshalmaza, relatív prímek, osztók.

Analízis: É.T., É.K. (egyértelmű leképezés)

Geometria: ld. ponthalmazok

Valószínűség:

- Kombinatorika: permutáció, kombináció, variáció (egy halmaz elemeinek kiválasztása, sorbarendezése)
- Valószínűség: kedvező események halmaza, összes esemény halmaza
- Statisztika: egy halmaz elemeinek átlaga, módusza, mediánja, szórása, stb

Gyakorlati élet:

Informatika: minden adattárolás halmazokkal dolgozik (pl. emberek halmaza-adatokat gyárt, TB, adó, stb)

Kereskedelem: áruhalmaz-árhalmaz, leltározás, vonalkódos rendszer figyeli az áruhalmaz elemszámát

Iskola: osztályok, csoportok különféle tulajdonság miatt

2. Számhalmazok, halmazok számossága

Halmazok:

Alapfogalom, amelynek megadása többféleképpen lehet:

- Megadunk egy utasítást, amelynek alapján bármely dologról eldönthetjük, hogy eleme-e a halmaznak vagy sem.
- Véges halmazok esetén felsorolhatjuk a halmaz elemeit.

Halmazműveletek:

- unió: kommutatív, asszociatív
- metszet: kommutatív, asszociatív
- különbség

Nevezetes számhalmazok:

- természetes számok
- egész számok
- racionális számok
- irracionális számok
- valós számok
- komplex számok

Természetes számok:

A természetes számok: 0, 1, 2, 3, ...

Jelölésük általában: $\mathbb{N}$

Axiómák (Piano-axiómák):

1. A 0 természetes szám.
2. Minden természetes számra van rá következő.
3. Ha két rákövetkező egyenlő, akkor a két szám is egyenlő.
4. A 0 semminek sem a rákövetkezője.
5. Ha egy halmaz tartalmazza a 0-t, és minden szám rákövetkezőjét, akkor az összes természetes számot tartalmazza.

Számjegyek:

- Arab: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Római: I, V, X, L, C, D, M

Számrendszerek:

- Tízes: $10a+b$, araboktól ismerjük
- 2-s: számítógép
- 12-s: angol és német nyelv, tucat
- 60-s: Babilon, óra, csillagászat, fokok számítása

felírásuk: $a^n \times a_1 + a^{n-1} \times a_2 + a^{n-2} \times a_3 + \dots + a \times a_{n-1} + a_n$

Normál alak:

- *pozitív valós szám normálalakja:* olyan kéttényezős szorzat, amelynek az egyik tényezője 1 vagy 1-nél nagyobb, de 10-nél kisebb valós szám; a másik tényezője 10-nek egész kitevős hatványa.
- *negatív valós szám normálalakja:* olyan kéttényezős szorzat, amelynek az egyik tényezője -1 vagy -1-nél kisebb, de -10-nél nagyobb valós szám; a másik tényezője 10-nek egész kitevős hatványa.
- A 0-t nem lehet e módon megadni.

Egy szám *abszolútértéke* a szám egyenesen a 0-tól való távolságát jelenti.

Műveletek:

A természetes számok halmazára az összeadás és szorzás zárt. A kivonás kivezet az egész számok halmazába. Az osztás a racionális számok halmazába vezet, a gyökvonás pedig az irracionális ill. a komplex számok halmazába.

Műveleti tulajdonságok:

- kommutativitás: $a+b=b+a$ $a*b=b*a$
- asszociativitás: $(a+b)+c=a+(b+c)$ $(a*b)*c=a*(b*c)$
- disztributivitás: $(a+b)*c=a*c+b*c$

Racionális számok:

Jelölésük: $\mathbb{Q}$

Véges vagy végtelen szakaszos tizedes törtek.

Minden p/q alakú szám felírható véges vagy végtelen szakaszos tizedes törtként: (p és q egész számok, és q nem 0)

- A végtelen szakaszos tizedes tört felírható p/q alakban:

Pl. a 0,131313:

$a=13/100$ $q=1/100$ $S=a/(1-q)$, vagyis $S=(13/100)/(1-1/100)=13/99$

- A p/q alakú szám felírható véges vagy végtelen szakaszos tizedes törtként:

Ha q nincs meg p -ben egészer, vagy nem véges tört, akkor $q-1$ maradék lehetséges. A $q-1$ -edik osztás után olyan maradék lesz, ami már volt egyszer, tehát a szakasz hossza max. $q-1$ lehet.

Halmazok számossága:

Egy halmazt megszámlálhatóan végtelen halmaznak nevezünk, ha a halmaz és a természetes számok halmaza között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető.

A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, mert fel tudjuk sorolni őket:

$1/1, 2/1, 3/1, 4/1, 5/1, 6/1, 7/1, \dots$

$1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2, 11/2, \dots$

$1/3, 2/3, 4/3, 5/3, 7/3, 8/3, \dots$

$1/4, 3/4, 5/4, 7/4, \dots$

$\dots$

$\dots$

Az irracionális számok halmaza megszámlálhatatlanul végtelen, mert azokat nem tudjuk sorba rendezni. (Több irracionális szám van, mint racionális.)

Irracionális számok:

Jelölésük: $\mathbb{Q}^*$

Nem írhatóak fel két egész szám hányadosaként.

Pl. Π , e , $\sqrt{2}$

Tétel:

A $\sqrt{2}$ irracionális szám.

Indirekt bizonyítás!

$$\sqrt{2} = p/q \quad (p; q) = 1$$

$$2q^2 = p^2$$

- Ha p és q is ps, akkor nem lennének relatív prímek.
- Ha p ps és q ptlan, akkor a baloldal csak 2-vel osztható, a jobb viszont legalább 4-gyel.
- Ha p ptlan és q ps, akkor a baloldal ps, a jobb oldal pedig ptlan.
- Ha p és q is ptlan, akkor a baloldal ps, a jobb oldal pedig ptlan.

Az összes lehetőséget megvizsgálva mindegyiknél ellentmondásra jutottunk, tehát a $\sqrt{2}$ irracionális szám.

Valós számok:

Az irracionális és a racionális számok uniója.

A számelmélet alaptétele:

Minden egytől különböző pozitív egész szám felbontható prímszámok szorzatára. Ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$$

Definíció:

Prímszám (törzsszám): csak két osztója van.

Tétel:

Végtelen sok prímszám van.

Indirekt bizonyítás!

Tegyük fel, hogy véges sok prímszám van: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

Ha az összes prímet összeszorozzuk és hozzáadunk egyet, akkor is prímet kapunk, hiszen az összes előtte lévő prím közül egy sem osztja. $(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n)$

Tehát minden egyes megtalált prím után találhatunk még egyet. A föltevésünk rossz volt, végtelen sok prímszám van.

Oszthatóság:

- $a \mid b$, ha létezik c szám: $a \cdot c = b$
- Ha $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid b+c$

Közös osztó:

a, b, c közös osztója d , ha d mindet osztja.

Lnko: a közös osztók közül a legnagyobb. $(a; b; c) = d$

Ha $\text{Inko } 1$, akkor a , b és c relatív prímek.

Többszörös:

a számnak b többszöröse, ha $b=c \cdot a$

Közös többszörös: a -nak és b -nek közös többszöröse c , a és b is maradék nélkül osztja c -t.

Lkcp: a közös többszörösök közül a legkisebb.

- Maradékosztályok

Alkalmazás:

- függvények értékkészlete, értelmezési tartománya
- valós függvények részhalmaza
- egyenlet és egyenlőtlenség gyökei
- számjegyes feladatok
- abszolútértékes feladatok
- egészrész, törtrész

szorzat ill. hányados nagyobb egyenlő 0 Gyakran használjuk a valós számok egyes részhalmazait, amelyeket intervallumoknak nevezzük. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ Ekkor az $a \leq x \leq b$ egyenlőtlenségnek eleget tevő számok halmazát zárt intervallumnak nevezzük. Jele: $[a, b]$ Az $a < x < b$ egyenlőtlenségnek eleget tevő számok halmazát nyílt intervallumnak nevezzük. Jele: $]a, b[$ Beszélhetünk értelemszerűen balról zárt, jobbról nyílt, ill. jobbról zárt, balról nyílt intervallumokról is.

Egyéb alkalmazás:

Egyenletek megoldásánál: alaphalmaz szerepe a megoldás keresésében. Pl.:

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{x-5} \quad x \in \mathbb{R}$$

Értékkészlet szerepe az egyenlet megoldásánál:

$$(x-1)^2 + (x-y+1)^2 = 0 \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Egyenlőtlenségeknél:

$$(5-x)(2x+3) > 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

Itt két eset lehetséges:

A szorzat mindkét tényezője pozitív: $5 > x$, és $x > -3/2$

A szorzat mindkét tényezője negatív: $5 < x$, és $x < -3/2$

Mindkét esetben két számhalmaz közös részét keressük

Oszthatóság (legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös): Pl.: a 6-tal osztható számok a 2-vel osztható számok és a 3-mal osztható számok halmazának közös része.

3. Hatványozás, hatványfüggvény

6. Hatványozás értelmezése pozitív egész kitevőkre

A hatványozás azonos kitevőkkel végzett szorzás.

Tetszőleges a valós szám és n pozitív egész szám esetén olyan n tényezős szorzat, amelynek minden tényezője a .

a a hatványalap, n a kitevő, amely azt mutatja, hogy a hatványalapot hányszor kell szorzótényezőül venni. a^n a hatványmennyiség, vagy röviden **hatvány**.

Definíció szerint:

2. A hatványozás azonosságai (Bizonyításuk a hatványozás definíciója alapján)

- Azonos alapú hatványok szorzása
Tetszőleges a valós szám és n, k pozitív egészek esetén

Bizonyítás:

Közvetlenül a hatványozás definíciója alapján:

- Azonos alapú hatványok osztása
Tetszőleges a valós szám és n, k pozitív egészek esetén:
$$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$$

Ha $n > k$, akkor $n - k$ pozitív egész, ha $n < k$, akkor $n - k$ negatív egész, ha $n = k$, akkor $n - k = 0$.
- Hatvány hatványozása
Tetszőleges a valós szám és n, k pozitív egészek esetén:
$$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$$
- Szorzat hatványozása
Tetszőleges a, b valós számok és n pozitív egész esetén:
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
- Hányados (tört) hatványozása
Tetszőleges a, b valós számok és n pozitív egész esetén:
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

3. A hatványozás értelmezése nulla, negatív egész és racionális kitevőkre

A hatványozás értelmezését úgy terjesztjük ki a pozitív egész kitevőkről másféle kitevőkre, hogy a hatványozás addig érvényben lévő tulajdonságai a kiterjesztés után is igazak legyenek. Ezt a szempontot nevezik **permanenciaelvnek**.

- A nulla kitevőjű hatvány értelmezése

Tetszőleges valós számra $a^0 = 1$.

Bebizonyítható, hogy ezzel az értelmezéssel a hatványozás tulajdonságai érvényben maradnak.

- Negatív egész kitevőjű hatvány értelmezése:

Tetszőleges valós szám és n pozitív egész szám esetén:

Bebizonyítható, hogy ezzel az értelmezéssel a hatványozás tulajdonságai érvényben maradnak.

- Racionális kitevőjű hatvány értelmezése

Tetszőleges a pozitív és p, q pozitív egész szám esetén $a^{\frac{p}{q}}$ az a pozitív szám, amelynek az q -adik hatványa a^p . (Megjegyzés: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$)

- Irracionális kitevőjű hatvány értelmezése

Az irracionális kitevőjű hatvány értelmezése is a permanenciaelv szem előtt tartásával történik.

Bármely irracionális számot tetszőlegesen tudunk közelíteni racionális számokkal. Így az irracionális kitevőjű hatványokkal is hasonlóképpen számolhatunk, mint a racionális kitevőjű hatványokkal.

4. Ha a hatványalap 0, akkor pozitív valós kitevőkre a hatványérték 0. Nem pozitív kitevőkre nem értelmezzük.

5. Hatványfüggvények

Páratlan n -re (n pozitív egész), $f(x) = x^n$, függvény

értékkészlete:

nem korlátos

szigorúan monoton növekvő

szélsőértéke nincs

páratlan függvény

x, y tengelyt az origóban metszi.

Páros n -re az $f(x) = x^n$, függvény

értékkészlete:

alulról korlátos ($a = 0$ és minden negatív szám alsó korlátja), felülről nem korlátos

a $]-\infty, 0[$ -on szigorúan monoton fogy,

$]0, \infty[$ -on szigorúan monoton nő



minimuma 0-ban van (minimum érték:0), maximuma nincs
páros függvény
x,y tengelyt az origóban metszi.

6. Alkalmazások

Geometriai: terület- és térfogatszámítás, koordinátageometria (parabola)

Algebra: sinus, cosinus algebrai megadása hatvánnyal (Taylor-sorok)

egyenletmegoldások, mértani sorozatok

Fizika: radioaktív elemek bomlásának számítása

Biológia: geetika Számok normálalakja

Számrendszerek

Nevezetes azonosságok, binominális tétel

Terület, térfogat képletek

Valószínűség-számítás (ismétléses variáció esetén)

A gazdasági életben exponenciális növekedést mutató jelenségek leírása,
prognosztizálása

Számológép hiányában a hatványozásra épülő logaritmus segítségével bonyolult
számítások elvégzése

4. Gyökvonás, gyökfüggvény

7. A négyzetgyökvonás és azonosságai

3. Egy nemnegatív valós a szám négyzetgyöke az a nemnegatív b szám, amit négyzetre
emelve a -t kapunk.

• Azonosságok:

-Szorzat négyzetgyöke: , .

Bizonyítás: A négyzetgyök fogalmának definíciója szerint az állítás bal oldalán
álló négyzete ab . A jobb oldalon álló négyzete – felhasználva, hogy szorzatot
tényezőnként hatványozhatunk, továbbá a négyzetgyök fogalmának definícióját – szintén ab .
Mivel a két oldalon pozitív számok szerepelnek, ezért igaz az állítás.

-Hányados négyzetgyöke: , .

Bizonyítás: Az előzőhöz hasonlóan, a hatványozás azonosságait, és a négyzetgyök

fogalmának definícióját felhasználva: $\sqrt[n]{a}$ és $\sqrt[n]{b}$. Mivel a két oldalon pozitív számok szerepelnek, ezért igaz az állítás.

-Hatvány négyzetgyöke:

Bizonyítása a fentiekhez hasonlóan történik.

2. Az n -edik gyök értelmezése és azonosságai

Az a szám n -edik gyöke az a b szám, amit n -edik hatványra emelve a -t kapjuk.

Ha

Ha

Azonosságok:

- Szorzat n -edik gyöke:

Bizonyítás: Az n -edik gyök definíciója szerint az állítás bal oldalán álló $\sqrt[n]{ab}$ n -edik hatványa ab .

A jobb oldalon álló $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ n -edik hatványa - felhasználva, hogy szorzatot tényezőnként hatványozhatunk, továbbá az n -edik gyök fogalmának definícióját – szintén ab .

A két oldal n -edik hatványa tehát megegyezik. Páratlan n -re, ha a két oldal n -edik hatványa azonos, akkor a két oldal is azonos. Páros n -re pedig, amikor mindkét oldal értelmes, vagyis nemnegatív, akkor az n -edik hatványok azonosságából ugyancsak következik a két oldal egyenlősége. A bizonyítandó állítás tehát igaz.

- Hányados n -edik gyöke: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$,

Ha

Ha

Bizonyítása az előzőhöz hasonlóan történik.

- Hatvány n -edik gyöke: $\sqrt[n]{a^p}$,

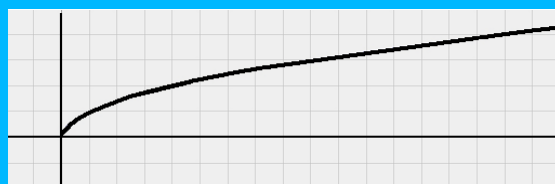
Bizonyítása az előzőhöz hasonlóan történik.

Megjegyzés: $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$, mivel mindkét oldal q -adik hatványa a^p . (p, q pozitív egészek).

3. Gyökfüggvény

Az $y = \sqrt{x}$ függvény értelmezési tartománya $x \geq 0$, (tehát a nemnegatív számok) értékkészlete: $y \geq 0$, (tehát a nemnegatív valós számok halmaza) alulról korlátos (0, és minden negatív valós szám alsó korlátja), felülről nem korlátos szigorúan monoton növekvő minimum helye: $(0, 0)$, minimum értéke 0 x,y tengelyt az origóban metszi. invertálható (van inverz függvénye - $y = x^2$, $x \geq 0$).

• Alkalmazás



Statisztika: adatsokaságok jellemzői (szórás)

Algebra: közepek (négyzetes-, mértani közép)

Geometriai: magasságtétel, befogótétel, Pitagorasz-tétel...

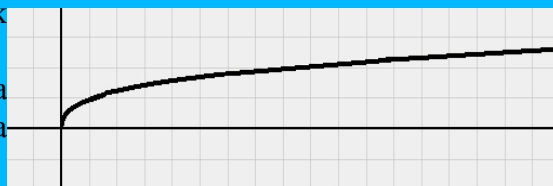
Fizikai: pl. az inga lengésidejének meghatározása, Kepler-törvények, lejtőre tett testre ható

erők meghatározása 1.) geometriai számítások

(pl. Pitagorasz-tétel használatakor).

2.) négyzetesen változó mennyiségek kiszámítása

fizikai problémáknál (pl. sebesség kiszámítása a mozgási energia ismeretében).



5. A logaritmus. Az exponenciális és a logaritmus függvény

A tétel összeállításakor Hajnal Imre, Számadó László, Békéssy Szilvia: MATEMATIKA 11 a gimnáziumok számára című tankönyvet használtam alapul. (NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ 16341)

Definíció: A b pozitív szám a alapú ($0 < a$ és $a \neq 1$) logaritmusának nevezzük azt a kitevőt,

amelyre $a - t$ emelve $b - t$ kapunk.
Jelölése: $\log_a b$

A logaritmus azonosságai:

1. Tétel: Szorzat logaritmus egyenlő a tényezők logaritmusának összegével:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Biz: Tk. 40. old.

2. Tétel: Hányados logaritmus egyenlő a számláló logaritmusának és a nevező logaritmusának különbségével:

$$\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c.$$

Biz: Tk. 40. old.

3. Tétel: Hatvány logaritmus egyenlő az alap logaritmusának és a kitevőnek a szorzatával:

$$\log_a b^k = k \log_a b.$$

Biz: Tk. 40. old.

4. Tétel: Gyök logaritmus egyenlő a gyök alatti kifejezés logaritmusának és a gyökkitevőnek a hányadosával:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = (\log_a b)/n.$$

Biz: Tk. 41. old.

5. Tétel: Egy szám új alapú logaritmusát megkapjuk, ha a szám régi alapú logaritmusát elosztjuk az új alap régi alapú logaritmusával:

$$\log_b k = \log_a k / \log_a b$$

Definíció: Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = a^x$ ($0 < a$ és $a \neq 1$) függvényeket exponenciális függvényeknek nevezzük.

Ha $1 < a$, akkor a^x exponenciális függvény monoton nő, ha $0 < a < 1$, akkor a^x exponenciális függvény monoton csökken.

Biz: Tk. 23. old.

Az a^x és az $(1/a^x)$ exponenciális függvények képei egymás tükörképei az y tengelyre vonatkozóan.

Definíció: Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \log_a x$ ($0 < a$ és $a \neq 1$) függvényt logaritmusfüggvénynek nevezzük.

Ha $1 < a$, akkor a $\log_a x$ függvény monoton növekvő, ha $0 < a < 1$, akkor monoton csökkenő.

Biz: Tk. 36. old.

A $\log_a x$ függvény és a $\log_{1/a} x$ függvény képei egymásnak az x tengelyre vonatkozó tükörképei.

Legyen $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = 2^x$ exponenciális és $g: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \log_2 x$ logaritmusfüggvény.

Az f exponenciális függvény értelmezési tartománya a g logaritmusfüggvény értékkészletével, és a g logaritmusfüggvény értelmezési tartománya pedig az f exponenciális függvény értékkészletével egyezik meg, és mindkét függvény monoton növekvő. Az f exponenciális függvény képeznek az egyenlete $y = 2^x$, a g logaritmusfüggvény képeznek pedig $y = \log_2 x$. Ebből

$x = 2^y$. Az egyik görbe egyenletéből a másik görbe egyenlete az x és y felcserélésével adódik. A két grafikus kép az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozóan egymás tükörképei. Az ilyen függvényeket egymás **inverzeinek** nevezzük.

6. Másodfokú függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek

A) Másodfokú függvények

Definíció:

Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakú függvényt, ahol $a \neq 0$ és $a, b, c \in \mathbb{R}$, másodfokú függvénynek nevezzük.

Minden másodfokú függvény képe **parabola**. A függvény $f(x) = a(x-u)^2 + v$ alakúra hozható, ahonnan $C(u;v)$, a parabola tengelypontja meghatározható.

y

B)

A másodfokú egyenlet

Definíció:

Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Ekkor az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletet másodfokú egyenletnek nevezzük.

Hiányos a másodfokú egyenlet, ha $b = 0$ vagy $c = 0$

x

$C(u,v)$

Ha $a = 0$, az egyenlet elsőfokú.

Tétel: A teljes másodfokú egyenlet megoldóképlete:

Adott az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenlet.

Tegyük fel, hogy $b^2 - 4ac \geq 0$. Ekkor az egyenletnek két különböző megoldása van (x_1 és x_2), amelyek a következő módon számíthatók ki az együtthatók segítségével:

Bizonyítás:

Ha $b^2 - 4ac > 0$, akkor $x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Definíció: A $b^2 - 4ac$ kifejezést a másodfokú egyenlet **diszkrimináns**ának nevezzük.
Jele: D .

A diszkrimináns értéke határozza meg, hogy a másodfokú egyenletnek hány valós gyöke van:

- Ha $D > 0$, az egyenletnek két különböző valós gyöke van,
- Ha $D = 0$, az egyenletnek pontosan egy valós gyöke van,
- Ha $D < 0$, az egyenletnek nincs valós gyöke.

C) Másodfokú egyenlőtlenségek

Az $ax^2 + bx + c > 0$ vagy $ax^2 + bx + c < 0$ alakú egyenlőtlenségeket, ahol $a \neq 0$, és $a, b, c \in \mathbb{R}$, másodfokú egyenlőtlenségnek nevezzük.

Megoldásuk történhet algebrai és grafikus úton.

Az algebrai megoldás egyik lehetséges útja:

Az egyenlőség gyökeinek meghatározása után a gyöktényezős alak segítségével az egyenlőtlenségek a következő alakra hozhatók:

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \quad \text{vagy} \quad a(x - x_1)(x - x_2) < 0.$$

A szorzat előjele alapján a tényezők előjele vizsgálható. Az így adódó egyenlőtlenségek megoldásának közös részéből, majd egyesítéséből kapjuk a feladat megoldását. V.

Alkalmazások:

Közgazdaságtan: kereslet-kínálat, költség-bevétel

Fizika: egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás, szabadesés, út-idő összefüggés.

Matematika: Másodfokú egyenletek megoldhatóságának vizsgálata ($D \geq 0$);

Szöveges feladatok megoldása;

Másodfokúra visszavezethető egyenletek (magasabbfokú, irracionális, trigonometrikus, logaritmikus, stb.) egyenletek megoldása;

Kifejezések értelmezési tartományának vizsgálata (pl. $\log_x(x^2+x-4)$);

Függvények zérushelyének meghatározása;

Szélsőértékfeladatok megoldása;

Fizika: Egyenletesen változó mozgás vizsgálata (út-idő);

Hajítások vizsgálata.

7. Pozitív számok nevezetes közepei. Adatsokaságok jellemzői

1. Pozitív számok nevezetes közepei.

Definíciók:

Számtani (aritmetikai) közép: 2 db pozitív szám számtani közepén azt a számot értjük, amelyet úgy kapunk, hogy a két szám összegét elosztjuk 2-vel.

Geometriai (mértani) közép: 2 db pozitív szám mértani közepén azt a számot értjük, amelyet úgy kapunk, hogy a számok szorzatának vesszük a gyökét.

Harmonikus közép: 2 db pozitív szám harmonikus közepén azt a számot értjük, amelyet

úgy kapunk, hogy a számok reciprokait összeadjuk, majd ennek reciprokát megszorozzuk

2-vel.

Négyzetes (kvadratis) közép: 2 db pozitív szám négyzetes közepén azt a számot értjük, amelyet úgy kapunk, hogy a számok négyzetösszegét elosztjuk 2-vel, majd ennek négyzetgyökét vesszük.

Tételek:

Harmonikus közép (H) $\leq$ Geometriai közép (G) $\leq$ Aritmetikai közép (A) $\leq$ Négyzetes közép (N)

1. *Tétel:* Két pozitív szám (a és b) harmonikus közepe kisebb vagy egyenlő, mint geometriai közepük. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=b$.

Bizonyítás:

Ez pedig minden pozitív a és b esetén igaz, az egyenlőség pedig valóban $a=b$ esetén áll fenn.

2. *Tétel:* Két pozitív szám (a és b) geometriai közepe kisebb vagy egyenlő, mint a számtani közepük. Egyenlőség akkor, és csak akkor áll fenn, ha $a=b$.

Bizonyítás:

Vagyis minden pozitív a és b esetén igaz az állítás, az egyenlőség pedig $a=b$ esetén áll fenn.

3. *Tétel:* Két pozitív szám (a és b) számtani közepe kisebb vagy egyenlő, mint négyzetes közepük. Az egyenlőség akkor, és csak akkor áll fenn, ha $a=b$.

Bizonyítás:

Vagyis minden pozitív a-ra és b-re igaz az állítás, egyenlőség pedig akkor áll

fenn, ha $a=b$.

Definíciók:

Számtani (aritmetikai) közép: n db pozitív szám számtani közepén azt a számot értjük, amelyet úgy kapunk, hogy a számok összegét elosztjuk n-nel.

Geometriai (mértani) közép: n db pozitív szám mértani közepén azt a számot értjük, amelyet úgy kapunk, hogy a számok szorzatának vesszük az n -edik gyökét.

Harmonikus közép: n db pozitív szám harmonikus közepén azt a számot értjük, amelyet úgy kapunk, hogy a számok reciprokait összeadjuk, majd ennek reciprokat megszorozzuk n -nel.

Négyzetes (kvadratikus) közép: n db pozitív szám négyzetes közepén azt a számot értjük, amelyet úgy kapunk, hogy a számok négyzetösszegét elosztjuk n -nel, majd ennek négyzetgyökét vesszük.

A fenti 3 tétel több pozitív számra is igaz.

Tétel: pozitív számok esetén egy szám és reciprokának összege nagyobb vagy egyenlő, mint 2.

Tétel: Magasságtétel

A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága olyan szeletekre osztja az átfogót, amelyeknek mértani közepe az átfogóhoz tartozó magassággal egyenlő.

Az ábra jelöléseit használva $AT=q$, $BT=p$, $CT=m_c$
(m az AB oldalhoz tartozó magasság)

TCA és TBC háromszögek hasonlóak, mert szögeik páronként egyenlőek.
Mivel hasonló háromszögek megfelelő oldalainak arány egyenlő, ezért

Szerkesztések

- A és B számtani közepének szerkesztése: $A+B$ hosszúságú szakasz felvétele, ezen szakasz felezőpontjának megszerkesztése a szakaszfelező-merőleges segítségével

- A és B mértani közepének szerkesztése: A+B hosszúságú átfogó köré háromszög szerkesztése (Thalész-kör), ezen háromszög A+B oldalához tartozó magasság hossza lesz a keresett hosszúság
- gyök n szerkesztése: derékszögű háromszögekkel (gyök1, gyök2, stb. – befogók: 1-1, 1-2, 1-3)

Számtani sorozat: olyan sorozat, melynek egy eleme a két szomszédos elem számtani közepe.

Mértani sorozat: olyan sorozat, melynek egy eleme a két szomszédos elem mértani közepe.

2. Adatsokaságok jellemzői

Cél: bizonyos egyedek bizonyos tulajdonságairól való tájékozódás

Definíciók: (a példák népszámlálással kapcsolatos fogalmak)

Statisztikai sokaság: Azon egyedek összessége, amelyekről információt gyűjtünk. (pl. az ország népessége)

Ismérv: A vizsgált tulajdonság (pl. életkor)

Adat: Az egyes egyedeknek az ismérvnek megfelelő tulajdonsága (pl. 60-65 év közöttiek)

Számsokaság: Az adatok számok

Véletlen mintavétel: A sokaság minden elemét azonos valószínűséggel választják ki.

Reprezentatív mintavétel: A mintába kerülő egyedek összességükben jól jellemzik a teljes sokaságot. (pl. a megkérdezett férfiak aránya ugyanannyi, mint a teljes lakosságon belül)

A felvett minták osztályokba sorolhatók.

Abszolút gyakoriság: A kedvező esetek és az összes eset hányadosa számítások alapján.

Relatív gyakoriság: Egy kísérlet elvégzése során a kedvező esetek számának és az összes eset számának hányadosa.

Modus: Egy $x_1, x_2, \dots, x_n$ számsokaságban a legtöbbször elforduló számot a számsokaság módusának nevezzük. Ha több ilyen van, akkor azok a modulusok halmazát adják. (pl. a legtöbbször előforduló életkor 45 év)

Medián: Egy $x_1, x_2, \dots, x_n$ számsokaság mediánja az az M szám, amelyre az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

függvény felveszi minimumát, tehát, amelyre $f(M) \leq f(x)$, minden x eleme $\mathbf{R}$ esetén.

Számtani közép: ld. fent

Súlyozott számtani közép: Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számoknak a nemnegatív $k_1, k_2, \dots, k_n$ számokkal súlyozott számtani közepe a

szám. (pl. az átlagéletkor 39,2 év)

Abszolút eltérés: Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számsokaságának az a számtól vett átlagos abszolút eltérése az

Négyzetes eltérés: Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számsokaságnak az a számtól vett átlagos négyzetes eltérése a négyzetátlag. Ennek minimális értékét a sokaság szórásnégyzetének nevezzük. A belőle vonat négyzetgyök a *szórás*.

Ábrázolás: Diagramok – kördiagram, oszlopdiaagram, stb.

Grafikon: pontokat kötünk össze

Oszlopdiaagram: az oszlopok magassága fejezi ki az értéket

Kördiagram: az értéket (illetve az összeshez való arányt) a körből elfoglalt terület fejezi ki – az egészet jelenti a kör egész területe

Alkalmazások:

- Közepek:
 - Számelméleti feladatok megoldása, tételek bizonyítása
 - Számtani és mértani sorozatok
 - Statisztika (átlagszámítás, szórás)
 - Szélsőérték számítás
- Statisztika:
 - gazdasági kimutatások (infláció)
 - pénzügyi elszámolások (bevételek, kiadások, raktárkészlet)
 - szociográfiai elemzések (korfa, átlagéletkor)
 - közlekedés: átlagsebesség, járművek átlagos kihasználtsága
 - valószínűségszámítás

8. Nevezetes sorozatok

I. Definíciók, tételek

Sorozatokról általában

D.: A pozitív egész számok halmazán értelmezett számértékű függvényt sorozatnak nevezzük. Jelölése: $\{a_n\}$

Sorozatok megadása általában úgy történik, hogy megadjuk a sorozat általános tagját, az a_n -et.

Sorozatok tulajdonságai:

Korlátosság:

D.: Az $\{a_n\}$ sorozatot felülről korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan K szám, hogy $a_n \leq K$ minden n -re (K -t a sorozat egy felső korlátjának nevezzük); alulról korlátos, ha létezik olyan k szám, hogy $k \leq a_n$ minden n -re (k -t a sorozat egy alsó korlátjának nevezzük); korlátos, ha alulról is, felülről is korlátos.

Monotonitás:

D.: Az $\{a_n\}$ sorozat monoton növekedő(monoton csökkenő), ha bármely $n \in \mathbb{N}^+$ -ra
 $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$).

Nevezetes sorozatok

Számtani sorozatok

D.: Az olyan számsorozatot nevezzük számtani sorozatnak, amelyben (a második tagtól kezdve) bármelyik tag és az azt megelőző tag különbsége állandó. Ezt az állandó különbséget d -vel jelöljük (differencia):

$$a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2.$$

(példa)

Ha $d=0$, akkor állandó számtani sorozatról beszélünk.

Számtani sorozatok esetén tehát igaz, hogy bármely tag az őt követő ill. az őt megelőző tag (ill. a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok) számtani közepe.

T.: Egy számtani sorozat első tagja a_1 , differenciája d , akkor a sorozat n -edik tagja:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

B.: Teljes indukcióval

T.: Egy számtani sorozat első n tagjának az összege $S_n =$, ill. a_1 és d

segítségével $S_n =$.

B.: Gauss módszerével

Mértani sorozatok

D.: Az olyan számsorozatot nevezzük mértani sorozatnak, amelyben (a második tagtól kezdve) bármelyik tagnak és az azt megelőzőnek a hányadosa állandó. Ezt az állandó hányadost q -val jelöljük, kvóciensnek nevezzük.

(példa)

Ha $q=1$, akkor állandó mértani sorozatról beszélünk.

Mértani sorozatra tehát igaz, hogy bármely tag egyenlő az őt megelőző ill. őt követő tag mértani közepével.

T.: Adott a_1 és q . A mértani sorozat tetszőleges n -edik tagja ezek segítségével a következőképpen számolható ki:

B.: Teljes indukcióval.

T.: Mértani sorozat első n tagjának az összege , ha a $q \neq 1$.

Ha a $q=1$, akkor .

III. Nevezetes sorozatok alkalmazásai

1. Kamatoskamat-számítás, járadékszámítás
2. Bizonyos exponenciális egyenlettel megoldható feladatok (pl. radioaktív bomlás)
3. Kémiában oldatok hígítása

9. Az analízis elemei

A függvény

A függvény definíciója: Ha egy A halmaz minden eleméhez egyértelműen hozzárendelünk egy B halmazbeli elemet, akkor az A halmazon értelmezett, B halmazbeli elemeket felvevő függvényről beszélünk.

(Halmaz: alapfogalom; bizonyos tulajdonságok, pontok összessége.)

A halmaz elemei $\rightarrow$ függvény értelmezési tartománya

B halmaz elemei $\rightarrow$ függvény értékkészlete

Megadása: - értelmezési tartomány (alaphalmaz)

– értékkészlet (képhalmaz)

o ha nincs megadva, akkor a valós számok legtágabb részhalmaza, ami lehet

– hozzárendelési szabály

o szó, képlet, grafikon, felsorolás, táblázat, stb.

Ábrázolás: grafikon, nyíldiagram, stb.

Jelölés: $f(x)$ (függő változó, x független változó)

$x \rightarrow x^2$

Műveletek: (értelmezési tartomány a függvények értelmezési tartományának metszete)

$f(x)+g(x)=h(x)$

$f(x)-g(x)=h(x)$

$f(x)*g(x)=h(x)$

$f(x)/g(x)=h(x)$ ($g(x) \neq 0$)

$c*f(x)=h(x)$

$f(g(x))=h(x)$ összetett függvény

Elemi függvények - alapfüggvények

- racionális egészfüggvények, vagy polinomfüggvények
- racionális törtfüggvények
- hatványfüggvények (gyökfüggvények)
- exponenciális függvények
- logaritmusfüggvények
- trigonometrikus függvények
- egészrész, törtrész, szignum
- abszolútérték-függvény

Sorozatok

Definíció: a pozitív egész számok halmazán értelmezett függvény

Jelölés: $a_1; a_2; \dots; a_n$

Megadása: függvény (általános tag megadása); rekurzív módon: $a_n = 2a_{n-2} - a_{n-1}$

Nevezetes sorozatok:

– számtani:

o $a_n = a_{n-1} + d$ (d: differencia)

o $S_n = n(a_1 + a_n)/2 = n(2a_1 + (n-1)d)/2$

– mértani:

o $a_n = a \cdot q^{n-1}$ (q: quociens)

o $S_n = a(q^n - 1)/(q - 1)$, ha $q \neq 1$; $S_n = na$, ha $q = 1$; $S_n = a/(1 - q)$, ha $q < 1$

Tulajdonságok

KORLÁTOSSÁG:

- **Definíció:** A függvényt korlátosnak nevezzük, ha van olyan M illetve m szám, hogy minden értelmezési tartománybeli elemre (x) igaz, hogy $f(x) \leq M$ (felső korlát) vagy $f(x) \geq m$ (alsó korlát).
- Ekkor minden M-nél nagyobb szám is felső korlát, illetve minden m-nél kisebb szám alsó korlát.
- **Tétel:** Egy függvény akkor és csak akkor korlátos, ha alulról is és felülről is korlátos.

MONOTONITÁS:

- **Definíció:** a függvény monoton nő egy intervallumon, ha minden $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$

monoton csökken,

ha minden $x_1 < x_2$ esetén

$f(x_1) \geq f(x_2)$

- o szigorúan monoton: az egyenlőség nincs megengedve

PERIODIKUSSÁG:

- **Definíció:** ha minden x-re létezik $d > 0$ szám, hogy $f(x) = f(x + nd)$ (n egész szám)

PARITÁS:

- **Definíció:** egy függvény páros, ha minden x-re $f(x) = f(-x)$ (pl. $f(x) = x^2$)

páratlan, ha minden x-re $f(x) = -f(-x)$ (pl. $f(x) = x^3$)

HATÁRÉRTÉK

- **Definíció:** $f(x)$ -nek x_0 -ban határértéke van (azaz létezik $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$)

ha minden $\varepsilon > 0$ -ra létezik $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$

vagy: ha minden x_n sorozatra: ha $\lim x_n = x_0$ akkor $\lim f(x_n) = A$

- tágabb értelemben vett határérték: végtelenben van határértéke:
minden $\varepsilon > 0$ -ra létezik N szám, hogy ha $x > N$ akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$, ekkor $A = \text{végtelen}$

- **Tételek:** Ha létezik $\lim f(x) = A$ és $\lim g(x) = B$, akkor

$$\lim (f(x) + g(x)) = A + B$$

$$\lim (f(x) - g(x)) = A - B$$

$$\lim (f(x) \cdot g(x)) = AB$$

$$\lim (f(x)/g(x)) = A/B \quad (B \neq 0)$$

$$\lim (c \cdot f(x)) = cA$$

Bizonyítás: definícióból

FOLYTONOSSÁG:

- **Definíció:** $f(x)$ folytonos x_0 -ban, ha értelmezve van x_0 -ban és környezetében,
és ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
vagy: ha minden x_n sorozatra: ha $\lim x_n = x_0$ akkor $\lim f(x_n) = f(x_0)$

- $f(x)$ folytonos, ha minden pontjában folytonos (intervallumon, ha az iv. minden pontjában)

- **Tételek:** Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos, akkor

$$f(x) + g(x) = h(x)$$

$$f(x) - g(x) = h(x)$$

$$f(x) \cdot g(x) = h(x)$$

$$f(x)/g(x) = h(x) \quad (g(x) \neq 0)$$

$$c \cdot f(x) = h(x)$$

is folytonos

Bizonyítás: definícióból

–
–

- **Tétel:** Ha $f(x)$ x_0 -ban folytonos, akkor létezik határértéke x_0 -ban és ez $f(x_0)$

Bizonyítás: a folytonosság és a határérték definíciójából

- **Bolzano-tétel:** Ha $f(x)$ folytonos $[a; b]$ -n és $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$, akkor létezik x_0 , hogy $f(x_0) = 0$

Bizonyítás: felezős módszer (intervallumot felezem)

→ vagy nulla → kész

→ ellentétes előjelű intervallumhatárokat veszem → felezem tovább

Cantor-axióma: egy és csak egy x_0 létezik, amely minden iv.-ban benne van

→ $f(x)$ egyik oldalán negatív, másikon pozitív → $f(x_0) = 0$ (mivel folytonos)

- **Nagy-Bolzano-tétel:** Ha $f(x)$ folytonos $[a; b]$ -n és $f(a) = c$, $f(b) = d$ és $c < d$,
akkor minden $c < e < d$ -re létezik x_0 hogy $f(x_0) = e$

Bizonyítás: $g(x) = f(x) - e$ → $g(a) < 0$; $g(b) > 0$ ⇒ létezik $g(x_0) = 0$, azaz $f(x_0) = e$

- **Tétel:** Ha $f(x)$ folytonos $[a; b]$ -n, akkor korlátos is

Bizonyítás: indirekten

- **Weyerstrass-tétel:** Ha $f(x)$ folytonos $[a; b]$ -n, akkor felveszi szélsőértékeit

Deriválás

- differenciahányados: $(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$
- differenciahányados-függvény: $g(x)=(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$
létezik $\lim (f(x)-f(x_0))/(x-x_0)=f'(x_0) \rightarrow$ derivált
 $f(x)$ nő, ha $f'(x)>0$
 $f(x)$ csökken, ha $f'(x)<0$
 $\Rightarrow f'(x)=0$ -nál szélsőértéke van
 $\rightarrow$ a derivált megadja a pontban a függvény érintőjének meredekségét
- **Tételek:** ha létezik $f'(x)$ és $g'(x)$, akkor
 $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
 $(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$
 $(f(x)*g(x))'=f'(x)*g'(x)$

Integrálás

- **Definíció:** Az $[a;b]$ intervallumon korlátos f függvényt integrálhatónak nevezzük, ha egy olyan szám létezik, amely az f függvény egyetlen alsó közelítő összegénél sem kisebb és egyetlen felső közelítő összegénél sem nagyobb. Ezt a számot a f függvény $[a;b]$ -on vett határozott integráljának nevezzük.
(A közelítő összegeket beírt ill. körülírt téglalapok területének összegével jellemezhetjük.)
- **Tétel:** Az $[a;b]$ intervallumon értelmezett korlátos f függvény akkor és csak akkor integrálható, ha bármely $\varepsilon>0$ -hoz található olyan beosztás, amelyre $S-s<\varepsilon$
- **Tétel:** Minden $[a;b]$ -on folytonos függvény integrálható
- **primitív függvény:** $f(x)$ primitív függvénye $F(x)$, ha $F'(x)=f(x)$
(Az f primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük.)
- **Newton-Leibniz-tétel:** Ha f $[a;b]$ -on értelmezett folytonos függvény, F pedig egyik primitív függvénye, akkor F integrálja a -tól b -ig egyenlő $F(b)-F(a)$ -val.

Alkalmazás

- számítógépek (logikai függvények)
- geometria: egybevágósági transzformációk, hasonlósági transzformációk függvények érintő megadása deriválttal
- terület- és térfogatszámítás integrállal
- fizika: munka kiszámítása integrállal (görbe alatti terület)
útfüggvény első deriváltja a sebességfüggvény, második deriváltja a gyorsulásfv.
(általában idő szerinti deriválást használunk)

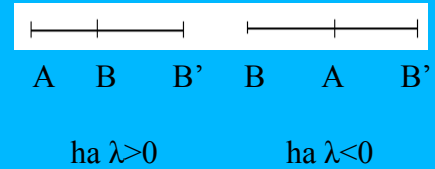
10. Hasonlóság és alkalmazásai a háromszögekre vonatkozó tételek bizonyításában

1. hasonlósági transzformáció:

a. **DEF.:** geometriai transzformáció: a sík vagy a tér pontjaihoz egyértelműen hozzárendelünk egy másik pontot.

b. Hasonlósági transzformáció:

- nagyítás, ha $\lambda > 1$, vagy $\lambda < -1$
- helybenhagyás, ha $\lambda = 1$
- kicsinyítés, ha $-1 < \lambda < 1$
- arány és szögtartó



- c. affinitás
d. vetítés

2. háromszögek hasonlóságának alapesetei:

- oldalaik aránya páronként megegyezik
- 2 oldal aránya és a közbezárt szög egyenlő
- 2 oldal aránya és a nagyobbikkal szemközti szög egyenlő
- szögeik egyenlők

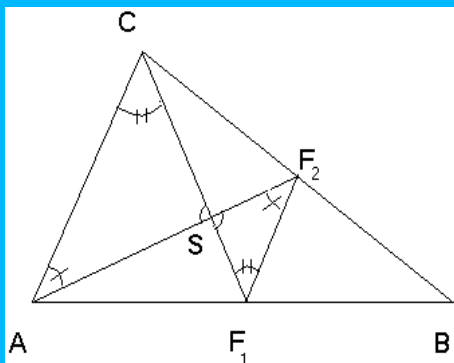
3. **DEF.:** 2 alakzat hasonló, ha létezik olyan hasonlósági és egybevágósági transzformáció sorozat, hogy a 2 alakzat fedésbe hozható

4. Tételek:

- A súlyvonalak a csúcstól távolabbi harmadoló pontban metszik egymást

Biz.:

- két súlyvonalról belátom, hogy a csúcstól távolabbi harmadoló pontban metszik egymást



$$F_1F_2 \parallel AC \quad \text{és} \quad AC = 2 \cdot F_1F_2$$

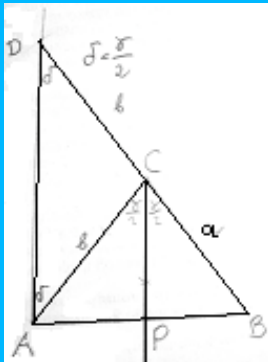
$$\triangle ASC \cong \triangle F_1F_2S \quad (3 \text{ szög egyenlő})$$

$$\text{megfelelő oldalak aránya} = 2:1$$

↓
a csúcstól távolabb

- ez a fenti bizonyítás bármely 2 súlyvonalra elmondható → egy ponton kell átmennie mind a 3 súlyvonalnak
- A háromszög szögfelezője a szemközti oldalt a másik két oldal arányában metszi.

Biz.:



- $\delta = \gamma/2 \rightarrow DA \parallel CF$, mert $\angle BCP \cong \angle CDA \rightarrow$ párhuzamosan szelő tételek: $AP:BP = b:a$

c. Befogó tétel: derékszögű háromszögben, a befogó mértani közepe az átfogónak és a befogó, átfogóra vetített merőleges vetületének.

Biz.:

- $a = \sqrt{cp}$ $b = \sqrt{cq}$

$$\triangle ABC \cong \triangle ATC \cong \triangle CTB$$

$$\begin{aligned} a:c &= p:a & b:c &= c:b \rightarrow a^2 = cp & b^2 &= cq \rightarrow \\ a &= \sqrt{cp} & b &= \sqrt{cq} \end{aligned}$$

d. Magasság tétel: a derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága mértani közepe az átfogó két szeletének.

Biz.:

- $m = \sqrt{pq}$

$$\triangle ADC \cong \triangle CTB \cong \triangle ATC$$

$$m:p = q:m \rightarrow m^2 = pq \rightarrow m = \sqrt{pq}$$

e. Párhuzamosan szelők tétele: $AB:AC = BB':CC'$

Biz.:

- $BC \parallel B'C'$
 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (3 szög egyenlő)
 $\downarrow$
a megfelelő oldalak aránya egyenlő

f. Hasonló alakzatok területének és térfogatának az aránya: $T' = \lambda^2 T$, $V' = \lambda^3 V$

Biz.:

- elég háromszögre bizonyítani, mert az alakzatok felbonthatók háromszögekre

$$T = am/2 \quad T' = \lambda a \lambda m/2 = \lambda^2 T$$

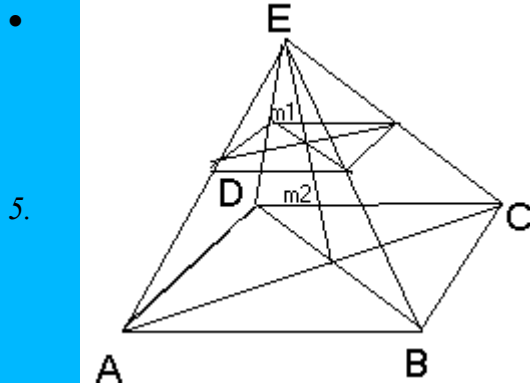
- körre:

$$T = r^2 \pi \quad T' = (r\lambda)^2 \pi = \lambda^2 T$$

- háromszög: $V = At \cdot m$ $V' = \lambda^2 At \cdot \lambda m = \lambda^3 V$
- kör: $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$ $V' = \frac{4}{3} (r\lambda)^3 \cdot \pi = \lambda^3 V$

g. A gúla alappal $\parallel$ síkmetszetei úgy aránylanak, mint a hozzá tartozó magasságaik.

Biz.:



$$T':T = m_1^2:m_2^2 \rightarrow T' = m_1^2:m_2^2 \cdot T$$

$$T' = \lambda^2 T$$

$$\downarrow$$

$$\lambda = m_1:m_2$$

Alkalmazás

- geometriai feladatok
 - tervrajzok
 - térképészet, magasságmérés
 - rajzok, festmények
- geometriai optika
 - fénykép, fényképezőgép

11. Derékszögű háromszögek

Definíció:

Háromszög: a síknak három, nem egy egyenesen lévő pont és az őket összekötő szakaszokkal határolt része.

Egy háromszög szögei szerint lehet derékszögű:

Egy háromszög **derékszögű**, ha a háromszög egyik szöge derékszög. A derékszöget bezáró oldalak a *befogók*, a derékszöggel szemben fekvő oldal az *átfogó*.

A derékszögű háromszögre igazak a háromszögre vonatkozó tételek és megállapítások, így:

A háromszög belső szögeinek összege 180° . $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

(Ez a Riemann – geometriában: $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$

A Bolyai – geometriában: $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$)

A háromszög külső szögeinek összege 360° .

A háromszög bármelyik külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével

Egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.
 Egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

Igaz rá a háromszög-egyenlőtlenség:

Egy háromszög bármely oldalának hossza kisebb a másik két oldal hosszának összegénél, vagyis a háromszög oldalait a -val, b -vel és c -vel jelölve:

$$a < b + c \qquad b < a + c \qquad c < a + b$$

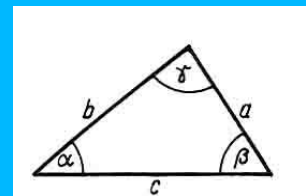
Vagy másképpen: Egy háromszög bármely oldalának hossza nagyobb a másik két oldal hossza különbségének abszolút értékénél.

$$a > |b - c| \quad b > |a - c| \quad c > |a - b|$$

A derékszögű háromszögben az oldalak aránya egyenlő a velük szemközti szögek szinuszának arányával. Az ábra jelöléseit használva:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

Mivel $\gamma = 90^\circ$, ezért $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : 1$



A derékszögű háromszögnél a legismertebb és leginkább használt tétel a **Pitagorasz –tétel**

A derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével.

Algebrai alakban: $a^2 + b^2 = c^2$ ahol a és b a derékszögű háromszög két befogója és c az átfogója. A Pitagorasz – tétel tehát azt mondja ki, hogy a derékszögű háromszögben a befogók négyzetösszege az átfogó négyzetével egyenlő.

Bizonyítására többféle módszer lehetséges, egyik: a Koszinusz-tétel felhasználásával:

Koszinusz-tétel:

Bármely háromszögben egy oldal négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk a két oldal és a közbezárt szög koszinusza szorzatának kétszeresét.

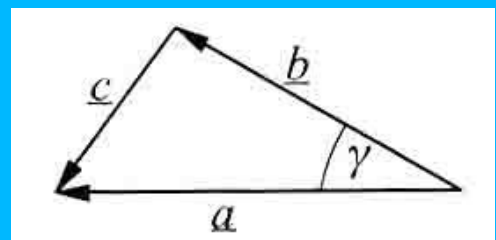
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma,$$

mivel derékszögű háromszögben $\gamma = 90^\circ$, ezért $\cos 90^\circ = 0$ vagyis $c^2 = a^2 + b^2$

Tehát a Pitagorasz tétel bizonyításához elég belátni a koszinusz-tételt.

Bizonyítás:

Íranyítsuk a háromszög oldalait az ábrán látható módon.



Az így kapott $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ oldalvektorokra fennáll: $\underline{c} = \underline{a} - \underline{b}$

Az egyenlőség két oldalának négyzete is egyenlő:

$$\underline{c}^2 = (\underline{a} - \underline{b})^2$$

$$\underline{c}^2 = \underline{a}^2 - 2\underline{a}\underline{b} + \underline{b}^2 \quad (*)$$

A skaláris szorzat értelmezése alapján

$$\underline{a}^2 = |\underline{a}| |\underline{a}| \cos 0^\circ = |\underline{a}|^2 \cdot 1 = |\underline{a}|^2 = a^2; \text{ hasonlóan } \underline{b}^2 = b^2; \underline{c}^2 = c^2$$

$$\underline{a} \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \gamma = a b \cos \gamma$$

Ezeket a (*) egyenlőségbe beírva kapjuk:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ezzel a tételt igazoltuk.

Közben felhasználtuk, hogy $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, ez igaz, hiszen $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a háromszög oldalai.

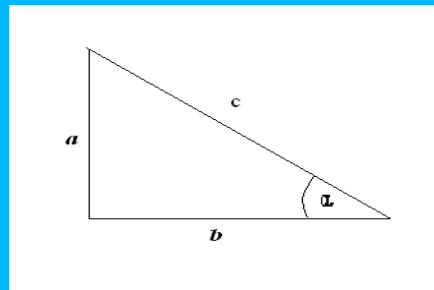
Szögfüggvények:

$$\sin \alpha = a/c$$

$$\operatorname{tg} \alpha = a/b$$

$$\cos \alpha = b/c$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = b/a$$



A derékszögű háromszögben $K = a + b + c$
 $T = ab/2$

Magasság-tétel:

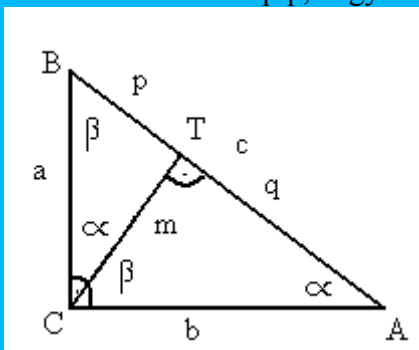
Az átfogóhoz tartozó magasság mértani közepe az átfogó két szeletének

$$m = \sqrt{pq}$$

Biz.: Az $ABC \sim CTB \sim ATC$, mivel szögeik egyenlők

$$\text{Ezért } m/p = q/m$$

$$m^2 = pq, \text{ vagyis } m = \sqrt{pq}$$



Befogó- tétel:

A befogó mértani közepe a befogó, az átfogóra eső vetületének és az átfogónak

$$a = \sqrt{cp}$$

$$b = \sqrt{cq}$$

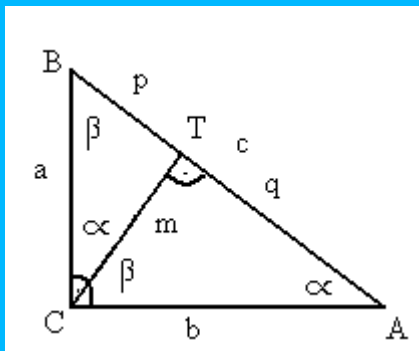
Biz.: $ABC \sim CTB \sim ATC$, szögek egyenlőségéből következően

Ezért $a/c = p/a$

$$a^2 = cp, \text{ tehát } a = \sqrt{cp}$$

továbbá $b/q = c/b$

$$b^2 = cq, \text{ vagyis } b = \sqrt{cq}$$



A befogó tétel a Pitagorasz –tétel egyik lehetséges bizonyítási módja:

$$a^2 + b^2 = cp + cq$$

$$a^2 + b^2 = c(p + q)$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Alkalmazások:

Számolások (terület-, térfogatszámítások stb.)

Fizika (mechanika pl.: erők felbontása)

Építészet

Földművelés (pitagorasz számhármass ókori használata)

- Lejtő, emelő, ék
- a hegyesszög szögfüggvényeinek definíciói (trigonometria)
- érintő szerkesztése (geometria)
- érintőszakasz hosszának meghatározása (koordináta-geometria)
- távolságok meghatározása (sík- és térgeometria)
- anyagszükséglet meghatározása (pl: építészet)

12. A háromszög nevezetes vonalai

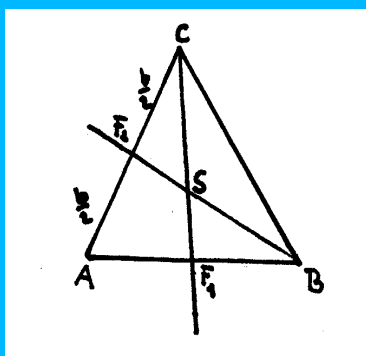
Háromszög:

- Egy síkban vett három nem párhuzamos és egymást nem egy pontban metsző egyenesek által közbezárt területet háromszögnek nevezzük.
- Egy háromszögben az A csúcsnál az α szög, a csúccsal szemben az „a” oldal van.
- Egy háromszögben a szögek összege mindig 180° .
- Egy háromszöget egyértelműen meghatároz:
 - a) három oldala
 - b) két oldala és a közbezárt szöge
 - c) egy oldala és a rajta fekvő két szöge
 - d) két oldala és a hosszabb oldallal szemközti szöge

Speciális háromszögek:

- Egy egyenlőszárú háromszögben az a alapon fekvő két szög egyenlő ill. két oldala egyenlő.
- Egy egyenlő oldalú háromszög minden oldala egyenlő
- Egy derékszögű háromszög egyik szöge 90° .

Súlyvonal:

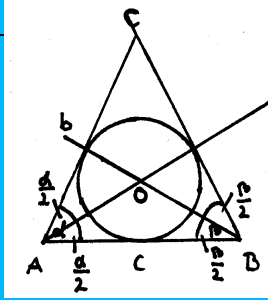


Definíció: A háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt súlyvonalnak nevezzük.

Tétel: A súlyvonalak a csúctól távolabbi harmadolópontban metszik egymást, ezt nevezzük súlypontnak.

Bizonyítás: Hajnal Imre: Matematika I. 335. o.

Szögfelező



Definíció: Az α szög szögfelezője azon pontok halmaza a síkban, amelyek egyenlő távolságra vannak b és c oldaltól.

Tétel: A háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszögbe írható kör középpontja.

Bizonyítás: Hajnal Imre: Matematika I. 295. o.

Magasságvonal:

Definíció: A háromszög magassága a háromszög egyik csúcsából a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges. A magasságvonal a csúctól a szemközti oldalig tartó szakasz. Egy háromszögnek három magasságvonala van.

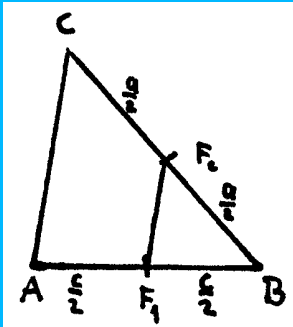
- Hegyesszögű háromszögnél a magasságpont a háromszögben belül van.
- Tompaszögű háromszögnél a magasságpont a háromszögön kívülre esik.
- Derékszögű háromszögnél a magasságpont azzal a csúccsal egyenlő, amelynél a derékszög van

Tétel: A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

Ez a metszéspont háromszög magasságpontja.

Bizonyítás: Hajnal Imre: Matematika I. 294. o.

Középvonal:



Definíció: Egy háromszög középvonalának azt a szakaszt nevezzük, amely a háromszög két oldalának a felezőpontjait köti össze.

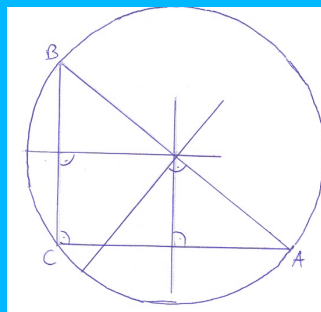
Tétel: Egy háromszög középvonala párhuzamos a harmadik oldallal, és annak a fele. Bizonyítás: Hajnal Imre: Matematika I. 334. o.

Oldalfelező merőlegese:

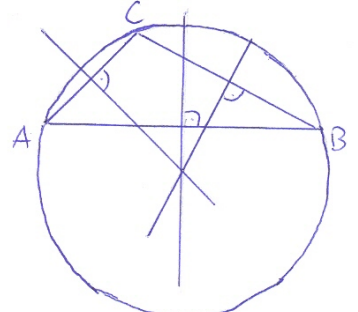
Definíció: A háromszög egy oldalfelező merőlegese egy oldalszakasz felezőmerőlegese, vagyis egy oldalszakasz felezőpontjába állított merőleges egyenes. Egy háromszögben három oldalfelező merőleges van.

Tétel: A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, és ez a metszéspont a háromszög köré írható kör középpontja.

Bizonyítás: Hajnal Imre: Matematika I. 290. o.



hegyesszögű h.-ben



derékszögű h.-ben

tompaszögű h.-ben

Szabályos háromszögben az oldalfelező merőlegesek, a magasságvonalak, a súlyvonalak ill. a szögfelezők megegyeznek egymással.

Egy egyenlőszárú háromszögben az alaphoz tartozó magasság, súlyvonal, oldalfelező merőleges ill. az alappal szemközti szög szögfelezője egy egyenesbe esnek.

Derékszögű háromszögben egy befogóhoz tartozó magasság megegyezik a másik befogóval.

Alkalmazások:

Oldalfelező:

- Thalész tétel
- geometriában

Súlyvonal:

- fizikában fontos a súlypont meghatározása:
felfüggesztések a súlypontban (pl. repülőgépgyártás) tengelyes
- egy test súlyvonala jól meghatározható egy fonálra való felfüggesztéssel
- koordináta geometriában, a súlypont meghatározása: a megfelelő koordináták összegének a harmada.

Magasság:

- geometriában
- a háromszög területe egyenlő egy oldal és e hozzátartozó magasság szorzatának a felével

Szögfelező:

- geometriában
- szögfelező tétel: Bármely háromszögben egy belső szög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre.

Középvonal:

13. A háromszög nevezetes köre

A háromszög az a síkbeli alakzat, amelyet a sík három pontja, és az azokat összekötő szakaszok határolnak, ha a pontok közül 2-2 van egy egyenesen. A háromszög csúcsait nagy nyomtatott betűvel (A, B, C), oldalait kisbetűvel (a, b, c), - mindig az azonos betűjelű oldallal szemben az azonos betűvel ellátott csúcs - , belső szögeit pedig rendre: α, β, γ görög betűkkel jelöljük.

• A háromszög köré írható kör

A háromszög oldalainak felezőpontján áthaladó merőlegeseket röviden oldalfelező merőlegeseznek hívjuk.

Def: A háromszög köré írható köre az a kör, mely átmegy a háromszög minden csúcspontján.

Tétel: A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, és ez a háromszög köré írható kör középpontja.

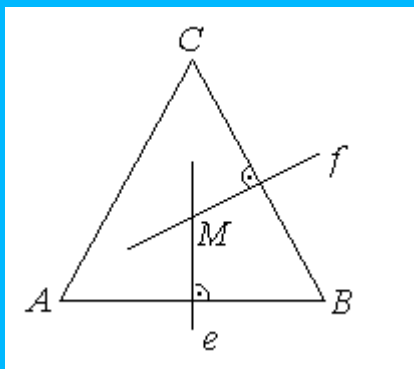
Bizonyítás: Legyen az ABC háromszög AB oldalának felezőmerőlegese e . Ennek minden pontja egyenlő távolságra van A -tól és B -től.

A BC oldal felezőmerőlegese f . Ennek minden pontja egyenlő távolságra van B -től és C -től.

Mivel AB és BC metszik egymást, a felezőmerőlegeseik, e és f is metszik egymást (mert a metsző egyenesekre merőlegeseik). Az M metszéspont egyenlő távolságra van A -tól és B -től, és B -től és C -től is; vagyis mindhárom ponttól, eszerint A -tól és C -től is.

Tehát M rajta van az AC oldal felezőmerőlegesén.

A három felezőmerőleges egyetlen közös pontja az M , a háromszög három csúcsától egyenlő távolságra van. Így ez a pont a háromszög köré írható kör középpontja.

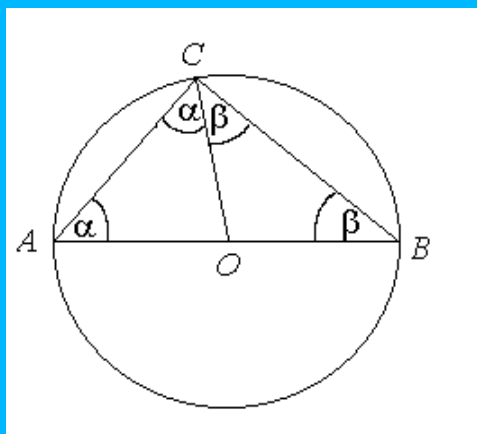


Speciális esetek:

A) Thalész tétel: Egy kör tetszőleges átmérőjének két végpontját a körvonal bármely más pontjával összekötve derékszögű háromszöget kapunk. Az átmérő a derékszögű háromszög átfogója, a kör pedig a derékszögű háromszög köré írható köre.

Bizonyítás:

A kör átmérője legyen AB , a körvonal tetszőleges, A -tól és B -től különböző pontja C . Rajzoljuk be az OC sugarat. Az AOC és a BOC háromszög egyenlő szárú. Az AOC háromszögnek az alapon fekvő két szögét jelöljük α -val, a BOC háromszögnek az alapon fekvő két szögét β -val. Az ABC háromszög belső



szögeinek összege:

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ, \text{ innen } \alpha + \beta = 90^\circ.$$

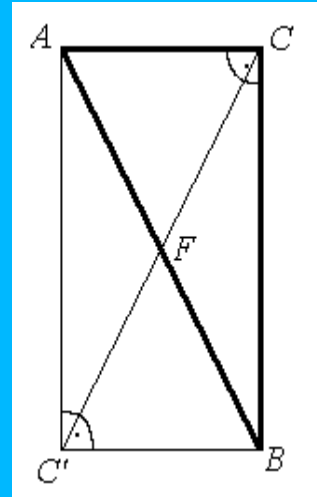
Az ABC háromszög C csúcsánál lévő szög derékszög.

B) A Thalész tétel megfordítása: Derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó középpontja, az átfogó a kör átmérője.

Bizonyítás:

Azt kell megmutatnunk, hogy az átfogó felezőpontja egyenlő távolságra van a háromszög csúcsaitól. Tükrözzük az ABC háromszöget az átfogó F felezőpontjára. A középpontos tükrözés tulajdonságai miatt egy olyan paralelogrammát kapunk, melynek két szemközti szöge derékszög. A paralelogramma tehát téglalap. A téglalap átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást.

Így tehát $AF=FB=FC$; épp a háromszög köré írható kör sugarával egyenlők.



• A háromszög beírt köre

A háromszög belső szögeinek szögfelező félegyeneseit röviden a háromszög szögfelezőinek nevezzük. Az α szögfelezőjét f_α -val, a β szögfelezőjét f_β -val, a γ szögfelezőjét pedig f_γ -val jelöljük.

Def: A háromszög beírt köre az a kör, amely érinti a háromszög mindhárom oldalát (oldalszakaszt).

Tétel: A háromszög három szögfelezője egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy a szögfelező bármely pontja egyenlő távolságra van a két

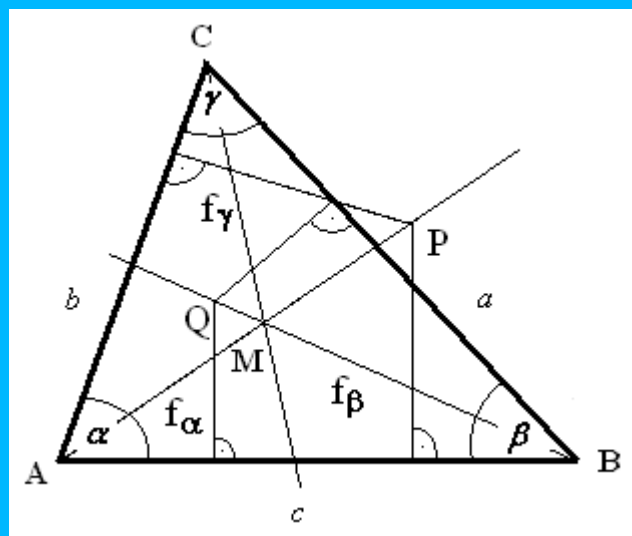
szögszártól; ezért az f_α szögfelező bármely P pontjára igaz: $d(P, b) = d(P, c)$; az f_β szögfelező

bármely Q pontjára igaz: $d(Q, c) = d(Q, a)$. Legyen $f_\alpha \cap f_\beta = M$. $\rightarrow M \in f_\alpha$ és $M \in f_\beta$, ezért

$d(M, b) = d(M, c)$ és $d(M, c) = d(M, a)$. Ebből következik, hogy $d(M, b) = d(M, a)$, tehát $M \in$

f_γ is, tehát a háromszög szögfelezői egyetlen pontban metszik egymást, amely minden oldaltól

egyenlő távolságra van. Ezért M egy olyan kör középpontja, amely érinti a háromszög oldalait



belülről. Ezt a kört hívjuk a háromszög beírt körének. A beírt kör sugarát gyakran ρ -val jelöljük.

Területszámítás:

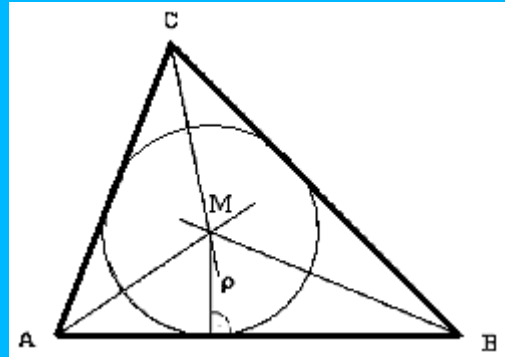
Ha az ABC háromszög beírt körének középpontját összekötjük az A, B, C csúcsokkal, akkor az eredeti háromszöget három kis háromszögre bontottuk fel, melyek területének az összege az eredeti, nagy háromszög területével egyenlő.

A felbontásból adódik, hogy a kis háromszögek magasságai rendre a nagy háromszög beírt körének sugarai (ρ). Így az ABC háromszög területére felírható:

$$t = 0,5a\rho + 0,5b\rho + 0,5c\rho = 0,5\rho(a + b + c)$$

ha bevezetjük a Heron-képletnél már alkalmazott jelölést a félkerületre, akkor:

$$t = \rho s$$

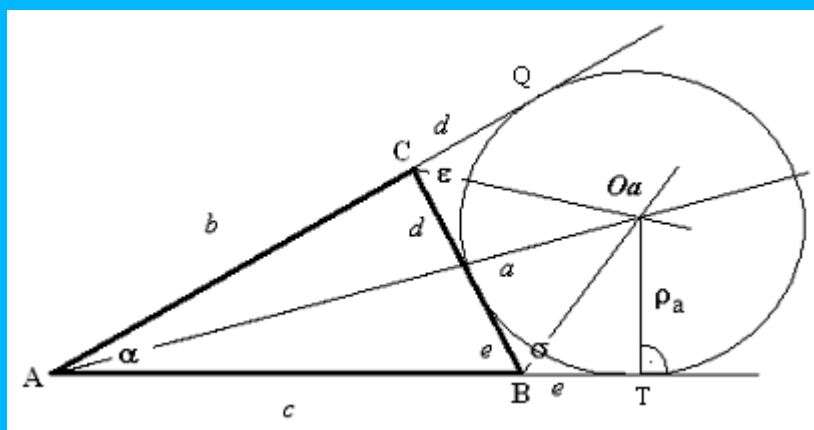


• A háromszög hozzáírt köre:

Az előzőek alapján a háromszög belső α , valamint a nem mellette lévő δ és ε külső szögek szögfelezői is egy pontban metszik egymást; az Oa pontban. Ez a pont a háromszög oldalegyeneseitől egyenlő távolságra van, ezért egy olyan körnek a középpontja, amely érinti a háromszög oldalegyeneseit, egyet közülük az oldalszakaszon, kívülről. Ezt a kört a háromszög hozzáírt körének nevezzük. Minden háromszögnek 3 hozzáírható köre van. A háromszög hozzáírt körének sugarát is ρ -val jelöljük, de indexszel látjuk el: az a oldalt kívülről érintő kör sugara ρ_a .

Tétel: *A háromszög egyik csúcsából a szemközti oldalhoz illeszkedő hozzáírt körhöz húzott érintő szakaszok egyenlők a fél-kerülettel (s).*

Bizonyítás: Jelöljük a hozzáírt kör és a b és c oldalak oldalegyeneseinek metszéspontjait Q -val és T -vel. Mivel egy külső pontból egy körhöz húzott két érintő szakasz egyenlő, ezért az ábra szerint: $d = d$, $e = e$ és $c + e = AT = AQ = b + d$, valamint $e + d = a$. Ebből következik, hogy $AT + AQ = a + b + c$, valamint $AT = AQ = 0,5(a + b + c)$, tehát az



érintőszakaszok egyenlőek a fél-kerülettel (s). Mivel egy háromszög esetében mind a három hozzáírható kör esetében hasonló eredményre jutunk, ezért kimondhatjuk: A háromszög bármely csúcsából, a szemközti oldalhoz tartozó hozzáírt körhöz húzott érintő szakaszok a fél-kerülettel egyenlőek.

• Alkalmazás:

Kivágás, letakarás; Az építészetben: oszlopok talapzatának és az oszlopfők kimérésénél használható.

1. Matematikán belüli alkalmazások

- A háromszög területe egyenlő a beírt kör sugarának és a félkerületnek a szorzatával.
- A háromszög területe egyenlő a félkerület és egy oldal különbsége valamint az oldalhoz írt kör sugarának szorzatával.
- A gömbbe illetve a gömb köré írt testekkel kapcsolatos számítások során általában síkmetszeteket kell tanulmányozni, ahol megjelennek a háromszög nevezetes körei.

2. Alkalmazás a gyakorlati életből

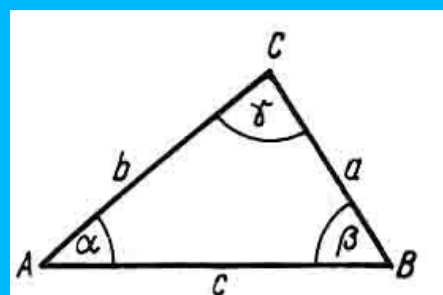
- építészetben
- konkrét példa: Egy ismert oldalú, háromszög alaprajzú telken egy kör alaprajzú víztározót akarnak építeni. Mekkora lehet ennek a sugara?

14. Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

Definíció:

Háromszög: a síknak három, nem egy egyenesen lévő pont és az őket összekötő szakaszokkal határolt része.

A háromszög csúcsait latin nagybetűkkel, szögeit a csúcsokhoz írt betűknek megfelelő görög kisbetűkkel, az oldalakat a szemben levő csúcsoknak megfelelő latin kisbetűkkel jelöljük. (a körüljárás iránya a gyakorlatban az óramutató járásával ellentétes)



Az oldalak és a szögek a háromszög alkotórészei. A háromszögeket szögeik és oldalaik szerint is megkülönböztetjük.

Szögei szerint lehet:

- Egy háromszög **hegyesszögű**, ha mindhárom szöge hegyesszög.

- Egy háromszög **derékszögű**, ha a háromszög egyik szöge derékszög. A derékszöget bezáró oldalak a *befogók*, a derékszöggel szemben fekvő oldal az *átfogó*.
- Egy háromszög **tompaszögű**, ha a háromszög egyik szöge tompaszög.

Oldalai szerint lehet:

- **Általános háromszög**: olyan háromszög, amelynek oldalai különböző hosszúságúak.
- Egy háromszög **egyenlő szárú** (vagy tükrös vagy szimmetrikus) ha van két egyenlő oldala (ekkor van két egyenlő szöge is). A két egyenlő oldal (szár) metszéspontját és a szemközti oldal felezőpontját összekötő egyenes a háromszög tükörtengelye.
- Egy háromszög **szabályos** (vagy egyenlő oldalú), ha a három oldala egyenlő hosszúságú (ekkor a három szöge is egyenlő nagyságú, 60°). Minden szabályos háromszög természetesen egyenlő szárú is három tükörtengellyel (mindhárom csúcspontját a szemközti oldal felezőpontjával összekötő egyenes tükörtengely).

Tétel: A háromszög belső szögeinek összege 180° . $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

(Ez a Riemann – geometriában: $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$

A Bolyai – geometriában: $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$)

Tétel: A háromszög külső szögeinek összege 360° .

Külső szög: A háromszög bármely oldalának meghosszabbításakor keletkező mellékszöget nevezzük külső szögnek.

A háromszög bármelyik külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével.

Összefüggések a egy háromszög oldalai és szögei között:

Tétel: Egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.

Tétel: Egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

Egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek és egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak.

Háromszög – egyenlőtlenség:

Egy háromszög bármely oldalának hossza kisebb a másik két oldal hosszának összegénél, vagyis a háromszög oldalait a -val, b -vel és c -vel jelölve:

$$a < b + c \qquad b < a + c \qquad c < a + b$$

Vagy másképpen: Egy háromszög bármely oldalának hossza nagyobb a másik két oldal hossza különbségének abszolút értékénél.

$$a > |b - c| \quad b > |a - c| \quad c > |a - b|$$

Pitagorasz – tétel:

A derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra

rajzolt négyzet területével.

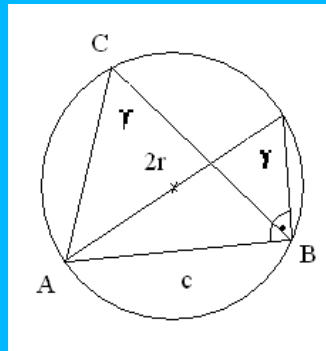
Algebrai alakban: $a^2 + b^2 = c^2$ ahol a és b a derékszögű háromszög két befogója és c az átfogója. A Pitagorasz – tétel tehát azt mondja ki, hogy a derékszögű háromszögben a befogók négyzetösszege az átfogó négyzetével egyenlő.

Húrtétel:

$$a = 2r \sin \alpha$$

$$b = 2r \sin \beta$$

$$c = 2r \sin \gamma$$



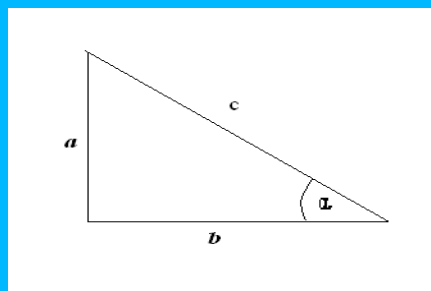
Szögfüggvények:

$$\sin \alpha = a/c$$

$$\tan \alpha = a/b$$

$$\cos \alpha = b/c$$

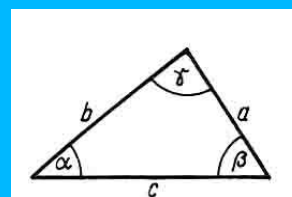
$$\cot \alpha = b/a$$



Színusztétel:

Bármely háromszögben az oldalak aránya egyenlő a velük szemkötti szögek szinuszáinak arányával. Az ábra jelöléseit használva:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

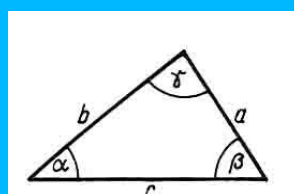


Koszinusztétel:

Bármely háromszögben egy oldal négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk a két oldal és a közbezárt szög koszinusza szorzatának kétszeresét.

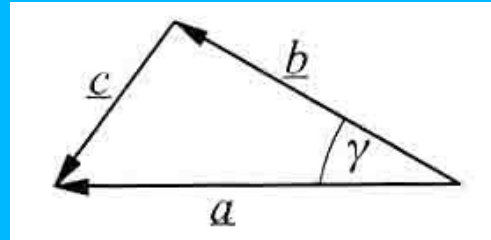
Az ábra jelöléseit használva:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Bizonyítás:

Irányítsuk a háromszög oldalait az ábrán látható módon.



Az így kapott $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ oldalvektorokra fennáll: $\underline{c} = \underline{a} - \underline{b}$

Az egyenlőség két oldalának négyzete is egyenlő:

$$\begin{aligned}\underline{c}^2 &= (\underline{a} - \underline{b})^2 \\ \underline{c}^2 &= \underline{a}^2 - 2\underline{a}\underline{b} + \underline{b}^2 \quad (*)\end{aligned}$$

A skaláris szorzat értelmezése alapján

$$\begin{aligned}\underline{a}^2 &= |\underline{a}| |\underline{a}| \cos 0^\circ = |\underline{a}|^2 \cdot 1 = |\underline{a}|^2 = a^2; \text{ hasonlóan } \underline{b}^2 = b^2; \underline{c}^2 = c^2 \\ \underline{a}\underline{b} &= |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \gamma = a b \cos \gamma\end{aligned}$$

Ezeket a (*) egyenlőségbe beírva kapjuk:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ezzel a tételt igazoltuk.

Közben felhasználtuk, hogy $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, ez igaz, hiszen $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a háromszög oldalai.

A koszinusztétel derékszögű háromszögben:

$$\gamma = 90^\circ \Rightarrow 2ab \cos \gamma = 0 \text{ a Pitagorasz – tételt adja: } c^2 = a^2 + b^2$$

A koszinusztétellel a háromszög három független adatának ismeretében (három oldal vagy két oldal és az általuk bezárt szög) határozzuk meg a következő adatot.

Egybevágóság és hasonlóság

Két háromszög egybevágó ha:

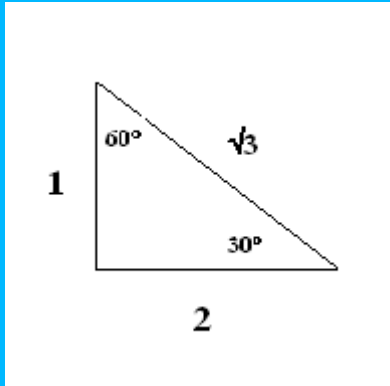
- két megfelelő oldal és a közbezárt szög páronként egyenlő nagyságú
- mindhárom megfelelő oldal páronként egyenlő nagyságú
- egy megfelelő oldal és a rajta levő két szög páronként egyenlő nagyságú
- két megfelelő oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög páronként egyenlő nagyságú

Két háromszög hasonló ha:

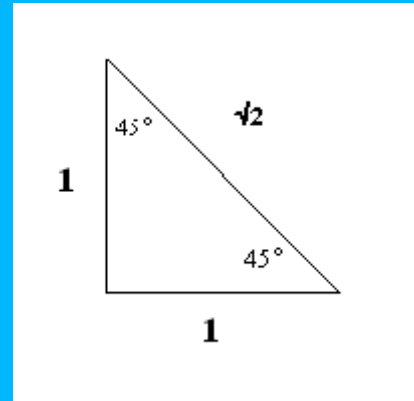
- ha két-két megfelelő oldal aránya és a közbezárt szög egyenlő
- ha a megfelelő oldalak aránya egyenlő
- ha két-két megfelelő szög egyenlő
- ha két-két megfelelő oldal aránya és a nagyobbik oldallal szemben fekvő szög egyenlő

Alkalmazás:

- területszámítás, sokszögek területe
a sokszögek felbonthatók háromszögekre, ahol $T = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$
- felületszámítás
- nevezetes szögek szögfüggvényeinek pontos értéke:



$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= 1/2 & \operatorname{tg} 30^\circ &= \sqrt{3}/3 \\ \sin 60^\circ &= \sqrt{3}/2 & \operatorname{tg} 60^\circ &= \sqrt{3} \\ \cos 30^\circ &= \sqrt{3}/2 & \operatorname{ctg} 30^\circ &= \sqrt{3} \\ \cos 60^\circ &= 1/2 & \operatorname{ctg} 60^\circ &= \sqrt{3}/3\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \sqrt{2}/2 \\ \cos 45^\circ &= \sqrt{2}/2 \\ \operatorname{tg} 45^\circ &= 1 \\ \operatorname{ctg} 45^\circ &= 1\end{aligned}$$

- fizika: erők felbontása – paralelogramma-módszer
súlyvonalak, súlypontok meghatározása
geometriai optika: szerkesztések és bizonyítások
- térképészet, földmérés, magasságmérés
- csillagászat: távolságmérés

15. Húrnégyszög, érintőnégyszög, szimmetrikus négyszögek

A sokszög definíciója: A sík egy önmagát át nem metsző zárt töröttvonal által határolt része.

A kör definíciója: Azon pontok halmaza a síkban, amelyek egy ponttól egyenlő távolságra vannak.

Húr: a kört metsző egyenes két metszéspontját összekötő szakasz.

Átmérő: olyan húr, amely átmegy a kör középpontján

Sugár: a kör középpontjából a kör egy pontjába húzott szakasz (az átmérő fele)

Érintő: Azt az egyenest nevezzük a kör érintőjének, amely a kör síkjában van, és a körrel pontosan egy közös pontja van.

Kerületi szög: a kerületi szög csúcsa a kör kerületén van, két szára a kör két húrja, vagy egy húr és egy érintő.

Középponti szög: a középponti szög csúcsa a kör középpontja, (két szára két sugár).

Tétel: Azonos ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők.

Tétel: Egy ívhez tartozó kerületi szög fele az ívhez tartozó középponti szögnek.

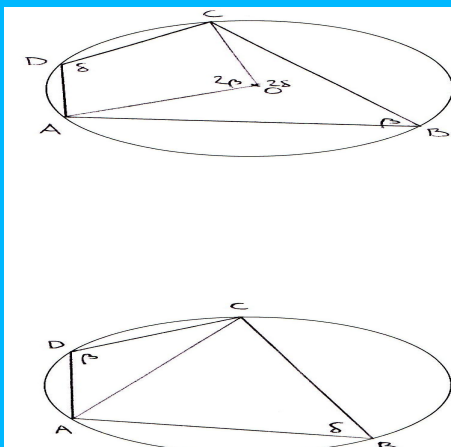
A négyszög definíciója: A négy csúcspontú sokszöget négyszögnek nevezzük. Ha a négy csúcspont egy síkban van, akkor síkbeli, egyébként térbeli (torznégyszög) négyszögről beszélünk.

n húrsokszög definíciója: olyan sokszög, amelynek minden csúcsa egy körön van (oldalai húrok).

A) Húrnégyszög

Definíció: olyan négyszög, amelynek négy csúcsa egy kör kerületén van (oldalai húrok).

Tétel: a négyszög akkor, és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180° .



Bizonyítás:

I. A húrnégyszög szemközti szögeinek összege 180° .

$\text{AOC szög} = 2\beta$

(mert ABC kerületi szöghöz tartozó központi szög)

$\text{COA szög} = 2\delta$

(mert ADC kerületi szöghöz tartozó központi szög)

O-nál lévő két szögre: $2\beta + 2\delta = 360^\circ$



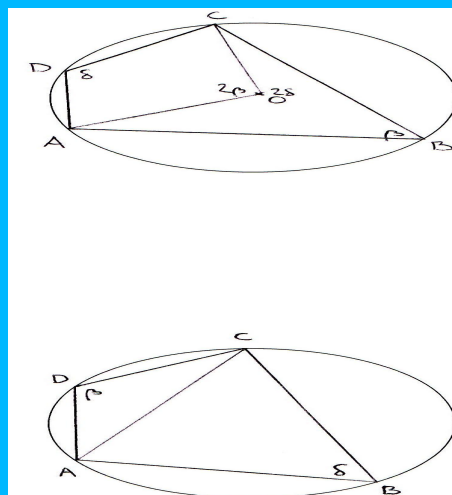
II. A

180°

$\Rightarrow$

ADC
 $\beta + \delta = 180^\circ$
 látókörvén.

A
 csakis AC
 Azaz B
 körén.



négyszög szemközti szögeinek összege

húrnégyszög

háromszög köré írható kör

$\Rightarrow \delta = 180^\circ - \beta \Rightarrow B$ is rajta van AC oldal

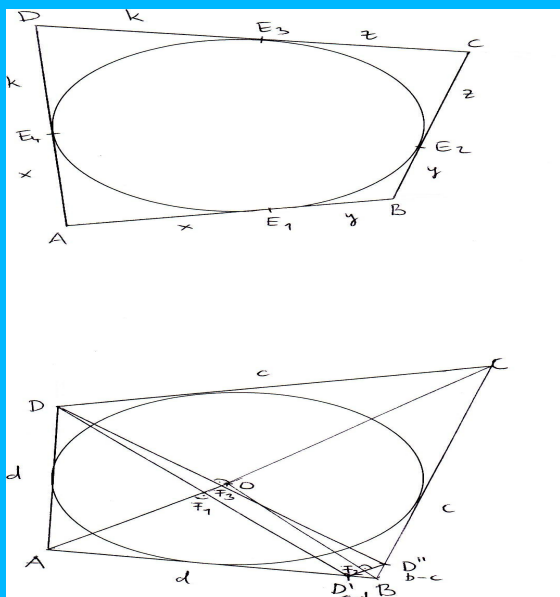
húrnégyszög konvex alakzat, ezért B
 köríven lehet, nem a tükörképén.

rajta van ADC háromszög körülírható

B) Érintőnégyyszög

Definíció: olyan négyszög, amelynek oldalai egy kört érintenek.

Tétel: a négyszög akkor, és csak akkor érintőnégyyszög, ha szemközti oldalainak összege egyenlő.



$$AB + CD = BC + DA$$

Bizonyítás:

I. Az érintőnégyyszög szemközti oldalainak összege egyenlő.

Külső pontból húzott érintők egyenlők.

$\Downarrow$

$$AE_4 = AE_1 = x$$

$$BE_1 = BE_2 = y$$

$$CE_2 = CE_3 = z$$

$$DE_3 = DE_4 = k$$

$$AB + CD = x + y + z + k$$

$$BC + DA = y + z + k + x$$

$\Downarrow$

II. A négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő $\Rightarrow$ érintőnégyyszög

a) $a=d \Rightarrow$ a négyszög deltoid $\Rightarrow$ érintőnégyyszög is

b) $a>d$

$$a+c=b+d \Rightarrow a-d=b-c$$

$$AD=AD'=d$$

$$CD=CD''=c$$

$$BD'=BD''=a-d=b-c$$

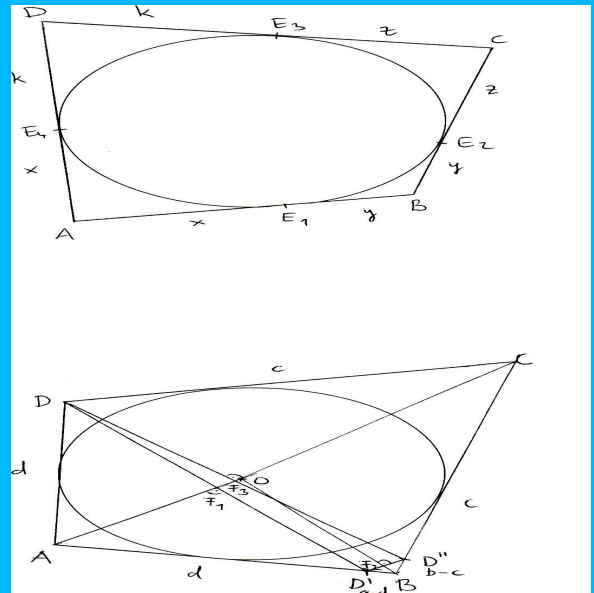
ADD' , $D'BD''$, DCD'' háromszög egyenlőszárú

$\Rightarrow$ szögfelezőik magasságvonalak és súlyvonalak is egyben

$\Rightarrow DD'D''$ háromszög oldalfelező merőlegesei is

Ezek biztos egy pontban metszik egymást $\rightarrow O$

O egyenlő távolságra van AD , AB , BC és CD oldaltól is $\Rightarrow$ beírható kör középpontja



C) Szimmetrikus négyszögek

Tengelyesen szimmetrikus:

húrtrapéz

- két párhuzamos oldaluk van
- száraik egyenlők
- 1 szimmetriatengely: párhuzamos oldalra merőlegesen

deltoid

- két-két szomszédos oldaluk egyenlő
- átlóik derékszöget zárnak be egymással
- 1 szimmetriatengely: az egyik átló

Középpontosan szimmetrikus:

paralelogramma

- szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők
- szemközti szögei egyenlők, egy oldalon fekvők kiegészítő szögpárok
- átlói felezik egymást
- szimmetria középpont: átlóinak metszéspontja

Tengelyesen és középpontosan szimmetrikus:

rombusz

- olyan paralelogramma, amelynek minden oldala egyenlő
- 2 szimmetriatengely: átlók + szimmetria középpont: átlók metszéspontja
- átlói derékszögben metszik egymást

téglalap

- olyan paralelogramma, amelynek oldalai derékszöget zárnak be egymással
- 2 szimmetriatengely: középvonalak + szimmetria középpont: átlók metszéspontja

négyszet

- olyan rombusz, amely téglalap
- 4 szimmetriatengely: átlók, középvonalak + szimmetria középpont: átlók metszéspontja

D) Alkalmazások

Matematikai:

- szabályos testek (kocka)
- szélsőérték feladatok megoldásánál (négyzet: maximális alapterület)
- hasonlóság → szabályos sokszögek

Egyéb:

- építészet: négyzet, téglalap
- testek súlypontja fizikából → szabályos sokszögek

16. Sokszögek, szimmetrikus sokszögek

Vázlat:

1. Csoportosítás
 - konvex
 - konkáv
2. Külső és belső szögeinek összege
3. Átlóinak száma (konvex)
4. Szabályos sokszögek

Kifejtés:

1.
 - a, Egy sokszög konvex, ha mindegyik szöge konvex szög (szögei egyenként 180° -nál kisebbek).
 - b, Egy sokszög konkáv, ha van konkáv szöge (180° -nál nagyobb szöge van).

2.

Tétel: Az n oldalú ($n \geq 3$) konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2)180^\circ$.

Tétel: Az n oldalú ($n \geq 3$) konvex sokszög külső szögeinek összege 360° .

Biz.: 312.o.

3.

Tétel: Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma : $\frac{n(n-3)}{2}$.

Biz.: 312.o.

4.

Def.: Az olyan konvex sokszöget, amelynek minden oldala és minden szöge egyenlő, szabályos sokszögnek nevezzük.

Az n oldalú szabályos sokszög

- minden belső szögének a nagysága:
- minden külső szögének a nagysága:

Akár páros, akár páratlan szám az n , az n oldalú szabályos sokszögnek n szimmetriatengelye van.

Ha az n páros szám, akkor a szimmetriatengelyek egyik fele két-két szemközti szög közös szögfelezője, a szimmetriatengelyek másik fele két-két szemközti oldal közös felező merőlegese.

Ha az n páratlan szám, akkor mindegyik szimmetriatengely egy szögnek szögfelezője és egy oldalnak felező merőlegese.

A szimmetriatengelyek egy pontban metszik egymást, ez a szabályos sokszögbe és a szabályos sokszög köré írt körnek a középpontja.

Ha az oldalak száma páros, akkor a szabályos sokszög középpontosan is szimmetrikus, szimmetria-középpontja a köré írt kör középpontja.

Minden szabályos sokszögnél találunk forgásszimmetriát is:

ha az n oldalú sokszöget a köré írt kör középpontja körül a $\frac{360^\circ}{n}$ fokos szöggel vagy ennek valamely többszörösével elforgatjuk, a sokszög önmagába megy át.

Pl.: ha a szabályos hatszöget elforgatjuk a középpontja körül 60° -kal, 120° -kal, ..., akkor képe az eredeti hatszög lesz.

Alkalmazás:

Matematikában: koordináta-geometria

térmértan

trigonometria

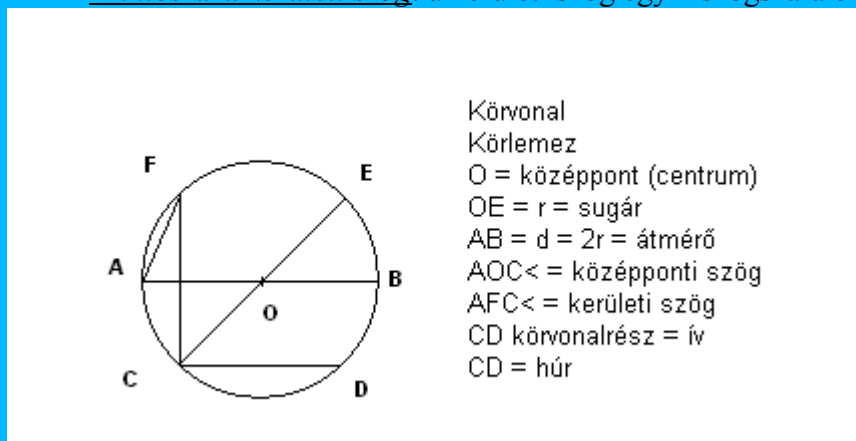
Matematikán kívül: gépészet

17. A kör és részei, kör és egyenes kölcsönös helyzete

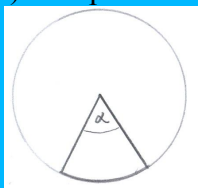
1. A kör és részei

Definíció: A kör azon pontok halmaza a síkban, amelyek egy adott ponttól egyenlő távolságra vannak.

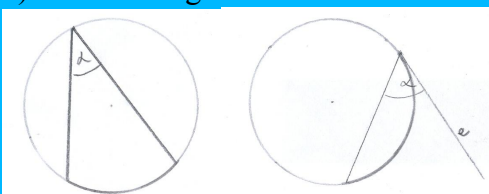
- > Szelő: a kör két pontján átmenő egyenes
- > Húr: a kör két pontján átmenő egyenes két pont közé eső szakasza
- > Átmérő: a középponton átmenő húr
- > Körlemez: a körvonal határolta síkrész
- > Ív: a körvonal két pontja közé eső körvonal-szakasz
- > Körcikk: a körlemeznek két sugár közé eső része
- > Körselet: a körlemezből a szelő által lemetszett síkrész
- > Körsáv: a két szelő közé eső szakasz
- > Középponti szög: az ív két végpontjához húzott két sugár közé eső szög
- > Kerületi szög: a körvonal egy pontjából az ív két végpontjához húzott húrok közé eső szög
- > Érintőszáru kerületi szög: a kerületi szög egyik szögszára érintő



a) középponti szög



b) kerületi szög



Egy körön belül az azonos ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők

Egy körben az azonos íven nyugvó középponti szög kétszerese a kerületi szögnek.

Terület:

A kör területe: $r^2\pi$

A körcikk területe: $\alpha / 360^\circ \cdot r^2 \pi$ (ha α° -ban van) vagy $\alpha / 2\pi \cdot r^2 \pi$ (ha α radianban van), ahol α a két sugár által bezárt szög

Kerület:

A kör kerületét tetszőleges pontossággal meghatározhatjuk a körbe és a kör köré írt szabályos sokszögek kerületéből. Legyen a körbe írt szabályos n -szög egy oldala s , a kör köré írt szabályos n -szög egy oldala pedig S . A két oldal között a következő összefüggés áll fenn:

$$S : s = r : OP, \text{ de } OP = \sqrt{r^2 - (s/2)^2} = r \sqrt{1 - s^2/4r^2}$$

$$\text{Így } s = S \sqrt{1 - s^2/4r^2}$$

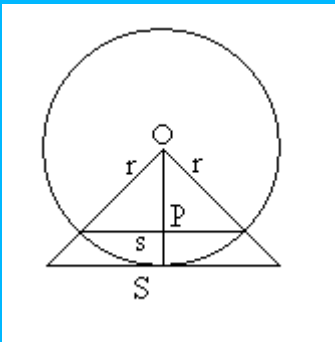
Ha mindkét oldalt megszorozzuk n -nel, akkor a körbe és a kör köré írt szabályos sokszög kerülete közötti összefüggést kapjuk:

$$K = k \sqrt{1 - s^2/4r^2}$$

ahol $k = n \cdot s$ a körbe és $K = n \cdot S$ a kör köré írt szabályos n -szög kerülete. A sokszög oldalszámának növelésével s egyre csökken (0-hoz tart), tehát a második tényező egyre közelít 1-hez; a kör köré írt sokszög kerülete csökken, közös értékhez közeledik.

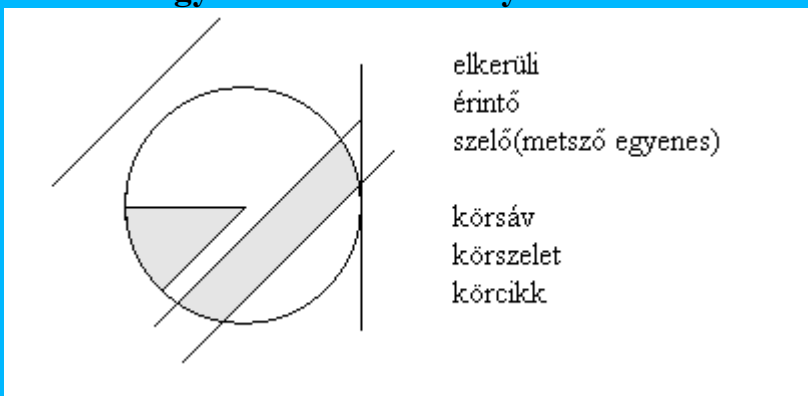
A kör kerülete k és K között van, tehát $k < K$

A kör kerülete: $2\pi r$



> A kört 360° -ra vagy 2π radiánra lehet felosztani

2. Kör és egyenes kölcsönös helyzete

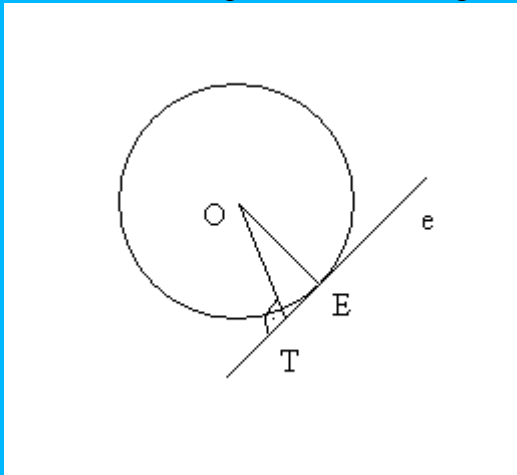


- A kört egy egyenes elkerülheti, érintheti vagy metszheti.
- A kör egy adott pontjához csak egy érintő, a körön kívül fekvő bármely pontjából a körhöz két érintő húzható.

Definíció: Azt az egyenest nevezzük a kör érintőjének, amely a kör síkjában van és a körrel pontosan egy közös pontja van.

I. Tétel: A kört érintő egyenes merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra.

Biz.: Indirekten: Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, az e érintő nem merőleges az E érintési pontban húzott sugárra. A kör O pontjából bocsássunk merőleget az e érintőre, a merőleges talppontja legyen T . Ekkor az OTE háromszögnek T -nél derékszöge van, és az ezzel szemkötti OE oldala a sugár. A derékszögű háromszögnek az $OE=r$ átfogója, az $OT < r$ befogója lenne. Ez azonban lehetetlen, mert ekkor a T a kör belső pontja lenne. Az e érintőegyenesnek nem lehet belső pontja. Így a feltevés hibás, az érintő merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra.



II. Tétel: Külső pontból húzott érintő szakaszok hossza egyenlő

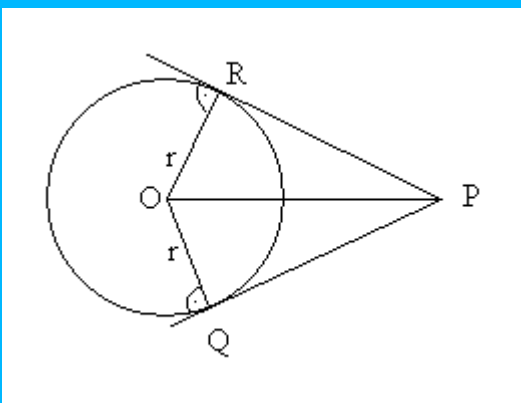
Biz.: Az OQP és az ORP háromszögek egybevágóak, mivel:

$$OR = OQ = r$$

OP közös

A nagyobbik oldallal szemkötti szög egyenlő (derékszög)

A két háromszög egybevágósága miatt $RP = QP$, vagyis a külső pontból húzott érintő szakaszok hossza egyenlő



Alkalmazások

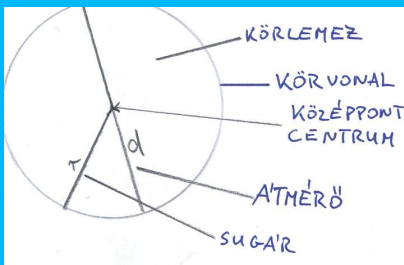
- térképészet

- bakelit lemez, Compact Disc (CD), Mini Disc (MD)
- diagramok (kör-, Wenn-)
- fizika (pl. körmozgás)
- területszámítások
- művészete (kör alak- nap)
- ruházat (kalap)
- építészet
 - a) oszlopok
 - b) Görög körszínház
 - c) gótika, román rózsablatok

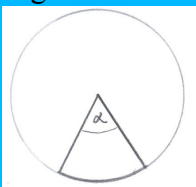
18. Kerületi szög, középponti szög, látószög

Definíciók:

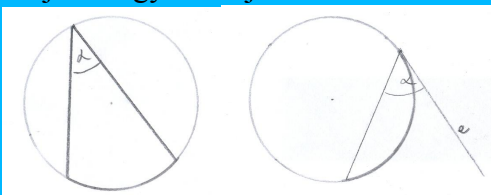
1. Kör: azon pontok halmaza a síkon, amelyek egy ponttól egyenlő távosságra vannak.



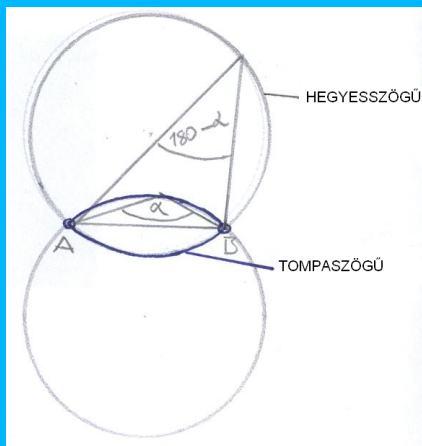
2. Fok: a körív 360-ad részéhez tartozó középponti szög mérőszáma.
3. Újfok: a körív 400-ad részéhez tartozó középponti szög mérőszáma.
4. Radián: sugárnyi ívhez tartozó középponti szög mérőszáma. Dimenzió nélküli mértékegység.
5. Vonás: az a szög, amely alatt látjuk az 1000m-re derékszögben fellállított 1m hosszú szakaszt.
6. Középponti szög: az a szög, amelynek a csúcsa a kör középpontjában van (és szárai egy-egy sugarat tartalmaznak).



7. Kerületi szög: az a szög, amelynek csúcsa a kör kerületén van, szárai a kör két húrját, vagy egy húrját és egy érintőjét tartalmazzák.



8. Látószög: azon pontok halmaza a síkban, amelyekből egy szakasz α szög alatt látszik.



Tételek:

1. Egy körben a középponti szögek nagysága és a hozzá tartozó ívek nagysága egyenesen arányos.
 $i = \alpha \cdot r$

Segéd-tétel: a középponti szögek aránya, megegyezik hozzá tartozó ívek arányával.
 $\alpha/\beta = a/b$

2. Egy körben az azonos íven nyugvó középponti szög kétszerese a kerületi szögnek.

3. Thálesz –tétel:

-Közös átfogójú derékszögű háromszögek derékszögű csúcsainak halmaza, a közös átfogó, mint átmérő fölé írt kör, kivéve az átmérő két végpontját.

-Azon pontok halmaza a síkon, amelyekből egy szakasz derékszög alatt látszik, a szakasz, mint átmérő fölé írt kör, kivéve a szakasz két végpontját.

4. A síkon azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekből egy adott AB szakasz adott ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) szögben látszik, két szimmetrikus körív.

5. Egy négyszög akkor, és csak akkor húrnégyszög, ha szemben lévő szögeinek összege 180° .

6. Egy körben a szelőszeletek szorzata állandó.

7. Egy körön belül az azonos ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők. (a 2. tételből egyenesen következik)

Alkalmazás:

- Térképészetben a tengerszintfeletti magasság meghatározásához.
- Testek magasságának meghatározásához.
- Látószögekörív meghatározásához, megszerkesztéséhez.
- Terület, kerület kiszámítása (pl. kör területe és kerülete közelítéssel).
- Szögmérés
- Körmozgás, forgómozgás, elfordulás szöge, szögsebesség
- Fázisszög
- Optikában a vissza verődés szöge stb.

19. Vektorok

Bevezetés

A matematika a vektor fogalmát a fizikából vette át. A fizikában bizonyos jelenségek leírásához szükség volt olyan mennyiségekre (vektoriális mennyiségekre) bevezetésére, amelyek a nagyságon kívül az irányra vonatkozó információt is tartalmaznak (pl. elmozdulás, sebesség, gyorsulás, lendület, erő, stb.)

Vektorok a matematikában

A matematikában a vektor fogalma az eltolás nevű egybevágósági transzformációhoz kötődik a legkézenfekvőbb módon.

Az eltoláshoz meg kell adnunk egy irányított szakaszt és bármely P ponthoz olyan P' pontot rendelünk, hogy $d(P, P')$ az irányított szakasz hosszával egyezzen meg, a P kezdőpontú P' végpontú irányított szakasz „iránya” pedig az adott „iránnyal”.

Itt irányított szakaszon egy rendezett pontpár (kezdőpont és végpont) által kijelölt geometriai alakzatot értünk.

Tehát az irányítás a pontpárok „rendezettsége”, amit rajzon nyíllal jelölünk (A nyíl hegye az irányított szakasz végpontja) :

A B
(1. ábra)

Ha pl. egy síkbeli alakzat minden pontjának megszerkesztjük a képét, akkor a képalakzat egybevágó lesz az eredeti alakzattal. Bármely pont és képpontja által meghatározott egyenesek párhuzamosak és a két pont közé eső szakaszok egyenlő hosszúak.

Például :

d
d
d
d
d
(2. ábra)

Ez adhat ötletet a vektor absztrakt fogalmának bevezetésére.

A középiskolai tankönyvek egyszerűen azt mondják, hogy „az irányított szakaszt vektornak nevezzük” és az A kezdőpontú, B végpontú vektort így jelöljük :

A kezdőpont és végpont feltüntetése nélkül a jele: $\underline{v}$ vagy $\mathbf{v}$. Az igazság azonban az, hogy egy *adott irányított szakasz csak egy reprezentánsa* a vektornak. (Így a szabadvektor fogalmához jutunk. A matematikában általában nem, de sok fizikai problémában előfordulhat, hogy a vektor kezdőpontjának – például az erő támadáspontja – is jelentősége van.)

A szabadvektornak a koordináta-rendszer origójából kiinduló reprezentánsát helyvektornak nevezzük.

A vektornak három jellemzője van :

1. A vektor állása :bármely reprezentáló irányított szakaszát tartalmazó egyenes állása (két egyenes azonos állású, ha párhuzamosak vagy egybeesnek).

2. A vektor irányítása :a reprezentáns irányított szakasz kezdőpontjának és végpontjának rendezettsége.

3. A vektor hossza (abszolút értéke): bármely reprezentáns irányított szakasz hossza.

Jelölése ($\mathbf{v}$ vektor esetén): $|\mathbf{v}|$ vagy $|\underline{v}|$, esetleg:

Definíció:Két vektort egyenlőnek mondunk (két irányított szakasz ugyanazt a vektort reprezentálja), ha azonos az állásuk, irányításuk és hosszuk is.

Definíció:Az olyan vektort, amelynek reprezentánsai olyanok, hogy a kezdőpontjuk és végpontjuk megegyezik, nullvektornak nevezzük.

Jele: $\underline{0}$ vagy $\mathbf{0}$. Hossza: $|\underline{0}|=0$. Állása és iránya tetszőleges.

Megjegyzések:

1. Bevezetjük a „ $\uparrow$ ” és „ $\downarrow$ ” szimbólumokat az irányítás és állás jelölésére :

- a) $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{b}$ jelentése: $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok azonos állásúak és azonos irányításúak (egyirányúak).
- b) $\mathbf{a} \downarrow \mathbf{b}$ jelentése: $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok azonos állásúak, de nem azonos irányításúak (ellentétes irányúak).
- c) Ha $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{b}$ és $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$, akkor $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.
- d) Ha $\mathbf{a} \downarrow \mathbf{b}$ és $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$, akkor ezt így jelöljük: $\mathbf{a}=-\mathbf{b}$

2. A következőképpen (pl. a fizikában) is lehetne definiálni az irányt :

Két félegyenest egyirányúnak mondunk, ha párhuzamosak és irányításuk is megegyezik.

Hasonlóan : Két félegyenest ellentétes irányúnak mondunk, ha párhuzamosak és ellentétes irányításúak.

(Két félegyenes azonos irányítású, ha a kezdőpontjuk által meghatározott egyenes ugyanazon oldalára esnek , ellentétes irányításúak, ha különböző oldalára esnek.)

Az irány pedig az a tulajdonság, ami az egyirányú félegyenesekben közös.(Az egyirányú félegyenesek egy ekvivalencia-osztályt alkotnak.)

3. A szabadvektorok halmazát V -vel fogom jelölni.

Kérdés: Ha két eltolást hajtunk végre egymás után, akkor a két eltolást helyettesíthetjük egyetlen eltolással, amit a két eltolás eredőjének nevezünk. De mi lesz az eredő eltolás vektora ?

(Erre a kérdésre a következő fogalom bevezetése után kaphatunk választ.)

Vektorok összege

Definíció: Két vektor $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V)$ összegét (eredőjét) úgy kapjuk, hogy a két vektornak olyan reprezentánsát rajzoljuk fel, hogy $\mathbf{a}$ reprezentánsának végpontjában legyen $\mathbf{b}$ reprezentánsának kezdőpontja. Ekkor az $\mathbf{a}$ kezdőpontjából $\mathbf{b}$ végpontjába mutató irányított szakasz által reprezentált vektort $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összegének nevezzük és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ -vel jelöljük.

Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} \in V$, tehát V zárt a vektorösszeadásra nézve !



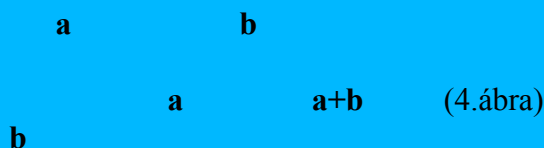
(A felvetett probléma megoldása: az eredő eltolásvektor a két eltolásvektor összege lesz)

Az összeadás spec.esetei: 1. $\forall \mathbf{a} \in V : \mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a} \quad (\mathbf{0} \in V)$

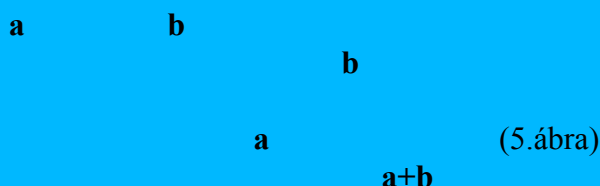
2. $\forall \mathbf{a} \in V : \mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0} \quad (\mathbf{a} \in V \Rightarrow -\mathbf{a} \in V)$

3. Az összeadandók állása megegyezik :

a) $\mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{b}$:



b) $\mathbf{a} \downarrow \uparrow \mathbf{b}$:

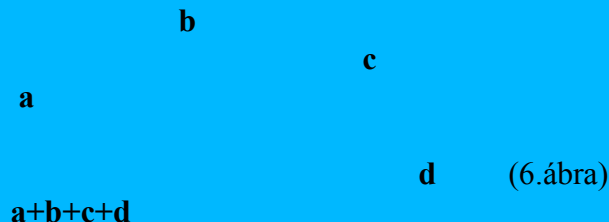


(Ezekben az esetekben a valós számok számegyenesen történő összeadását kapjuk vissza.)

Több vektor összeadása (az „összefűzési szabály”):

A reprezentánsokat úgy vesszük fel, hogy összefűzzük őket oly módon, hogy a reprezentánsok kezdőpontjai végponthoz csatlakozzanak. Az összegvektor reprezentánsa lesz az elsőnek felvett vektor kezdőpontjából az utolsónak felvett vektor végpontjába mutató irányított szakasz :

Pl: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in V)$



$$(a, b, c, d \in V \Rightarrow a + b + c + d \in V)$$

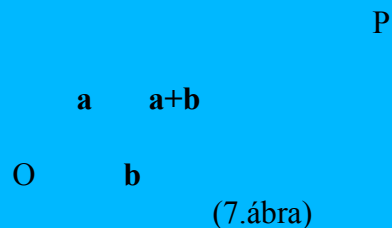
Két vektor összeadására használjuk a „paralelogramma-szabályt”:

A vektorreprezentánsokat közös kezdőpontba (O) vesszük fel, majd paralelogrammává egészítjük ki őket, úgy, hogy a végpontokon át párhuzamost húzunk a másik reprezentánssal.

A két párhuzamos egyenes metszéspontja legyen P !

Ekkor az O kezdőpontú és P végpontú irányított szakasz az $a+b$ reprezentánsa lesz.

(A kapott paralelogramma átlója irányítva)



(Ezt csak nem egyállású vektorok esetén tehetjük meg)

A vektorösszeadás tulajdonságai :

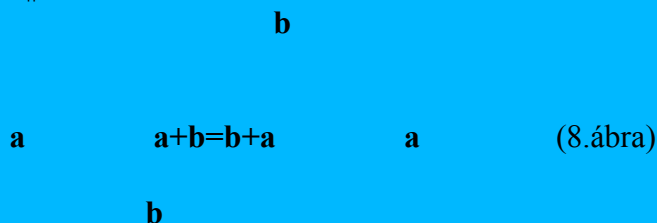
1. Az összegképzés szabályából és a háromszög-egyenlőtlenségből következik : $(\forall a, b \in V \text{ esetén}) :$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad (\text{egyenlőség} \Leftrightarrow a \uparrow \uparrow b)$$

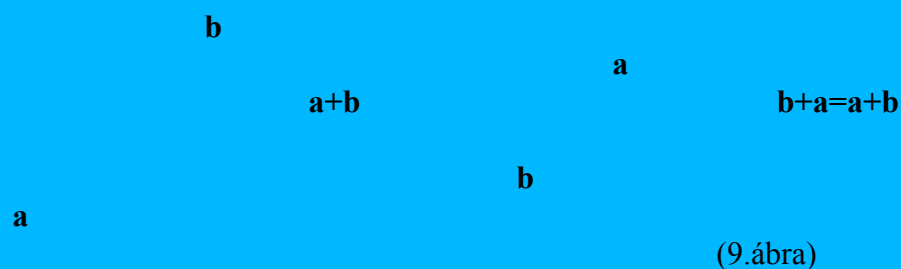
2. A vektorösszeadás kommutatív $(\forall a, b \in V) :$

$$a+b=b+a$$

a) $a \parallel b :$



b) $a \uparrow \uparrow b :$



c) $a \downarrow \uparrow b :$

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{b+a=a+b} \\
 \mathbf{a+b} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{a} \quad (10.\text{ábra})
 \end{array}$$

3. A vektorösszeadás asszociatív : $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ esetén :
 $(\mathbf{a+b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b+c})$

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{b} \\
 \mathbf{a} \quad \mathbf{a+b} \quad \mathbf{b+c} \quad \mathbf{c} \\
 (11.\text{ábra})
 \end{array}$$

$$\mathbf{a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)}$$

(A fenti tulajdonságok akárhány vektor összeadására is érvényesek.)

Két vektor különbsége

Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok különbségén azt a $\mathbf{c}$ vektort értjük, amelyre: $\mathbf{b+c=a}$.
 (Két vektor különbsége is vektor.)

Elnevezések: az $\mathbf{a}$ -vektor a kisebbítendő és a $\mathbf{b}$ -vektor a kivonandó. ($\mathbf{a=b+c} \Leftrightarrow \mathbf{c=a-b}$)

Két vektor különbségének reprezentánsát úgy kapjuk, hogy közös kezdőpontból kiinduló reprezentánsukat vesszük fel, és a különbségvektor reprezentánsa a kivonandó végpontjából a kisebbítendő végpontjába mutató irányított szakasz lesz.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{b} \\
 \mathbf{a} \quad \mathbf{a-b} \quad \mathbf{(a-b)+b=a} \\
 \mathbf{a-b} \\
 \mathbf{b} \quad \mathbf{(12.\text{ábra})}
 \end{array}$$

Megjegyzések:

1.A szerkesztés következménye : $\mathbf{b-a \neq a-b}$ (tehát a vektorkivonás nem kommutatív) és:

$$(\mathbf{b-a} = -(\mathbf{a-b}))$$

2.A vektorkivonást lehet összeadásként is értelmezni :

$$\mathbf{a-b=a+(-b)}$$

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{a} \\
 \mathbf{b} \quad \mathbf{a-b} \quad \mathbf{a+(-b)} \\
 \mathbf{a} \quad \mathbf{-b}
 \end{array}$$

(13.ábra)

Vektor szorzása számmal

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a} \in V$ tetszőlegesen. Ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{a}$ ($= \lambda \mathbf{a}$) az az egyértelműen létező V -beli vektor, amelyre :

- Ha $\lambda=0$ vagy $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, akkor $\lambda \mathbf{a}=\mathbf{0}$
- Ha $\lambda \neq 0$ és $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\lambda \mathbf{a}$ az a vektor, amelynek hossza : $|\lambda \mathbf{a}|=|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$, továbbá, ha $\lambda > 0$, akkor $\mathbf{a} \uparrow \uparrow \lambda \mathbf{a}$, ha pedig $\lambda < 0$, akkor $\mathbf{a} \downarrow \uparrow \lambda \mathbf{a}$.

A művelet tulajdonságai ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$):

- $\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda \cdot \mu) \mathbf{a}$ (asszociativitás)
- $(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$ (disztributív a számra)
- $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ (disztributív a vektorra)
- $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$

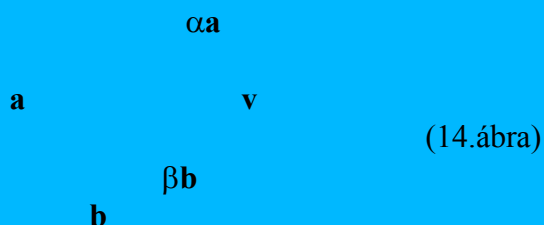
Megjegyzések:

- Ha $\lambda = -1$, akkor $\lambda \mathbf{a} = -\mathbf{a}$
- Legyen $\mathbf{a} \cdot \lambda := \lambda \cdot \mathbf{a}$ (Így is jelölhetnénk.)
- A $\mathbf{b}$ -vektor $\mathbf{a}$ -vektor irányú egységvektor, ha $\mathbf{b} = (1/|\mathbf{a}|) \cdot \mathbf{a}$
- $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ esetén : $\mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} = (|\mathbf{b}|/|\mathbf{a}|) \cdot \mathbf{a}$

Tétel (Vektor összetevőkre való bontásának tétele a síkon):

Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v} \in V$ ugyanazon síkbeli vektorok és $\mathbf{a}$ nem párhuzamos $\mathbf{b}$ -vel ($\neg \exists \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{b}$), akkor egyértelműen léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hogy :

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$$



Definíció: Ezeket az egyértelműen létező α és β számokat a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ bázisvektorokra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Megjegyzések:

- A tétel nyilván akkor is érvényes, ha a bázisvektorok $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ egymásra merőleges egységvektorok ($\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$ és $|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=1$). Ekkor a vektor derékszögű koordinátáit kapjuk. A továbbiakban mindig ezt használjuk.
- Adott bázisvektorok esetén a vektorok és a rendezett valós számpárok között kölcsönösen

egyértelmű megfeleltetés van.

3. Ha felvesszünk egy O pontot (origóként) és tekintjük $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ -t, valamint a koordinátatengelyeket úgy, hogy az x-tengely $\parallel \mathbf{i}$ és az y-tengely $\parallel \mathbf{j}$, akkor az ezek által meghatározott síkban a Descartes-féle koordinátarendszert kapjuk vissza:

Tetszőleges P pont koordinátái az O-ból P-be mutató irányított szakasz által reprezentált vektor $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisvektorokra vonatkozó koordinátaival egyeznek meg.

Tétel (A vektorösszeadás és a számmal való szorzás szabályainak következménye):

Ha az $\mathbf{a}$ vektor koordinátái $(a'; a'')$, a $\mathbf{b}$ vektor koordinátái $(b'; b'')$ (valamilyen bázisra vonatkozóan), továbbá $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek, akkor a $\lambda \mathbf{a} \pm \mu \mathbf{b}$ vektor koordinátái ugyanazon bázisra vonatkozóan :

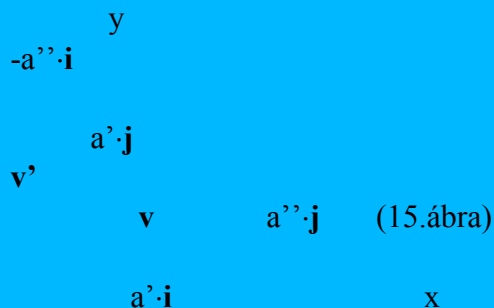
$$(\lambda \cdot a' \pm \mu \cdot b'; \lambda \cdot a'' \pm \mu \cdot b'')$$

Tétel (Vektor 90°-os elforgatottjának koordinátái ($\mathbf{i}, \mathbf{j}$ -re vonatkozóan)):

Ha egy tetszőleges vektor ($\mathbf{v}$) koordinátáit ismerjük $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ -re vonatkozóan ($\mathbf{v}$ az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ síkjával párhuzamos), akkor ezek segítségével felírhatjuk a $\mathbf{v}$ -re $\perp$ -es, $\mathbf{v}$ -vel egyező hosszúságú, ugyancsak $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ síkjával $\parallel$ -os vektor (két ilyen van) koordinátáit.

Ezeket úgy kapjuk, hogy az adott koordinátákat felcseréljük és az egyik(!) előjelét megváltoztatjuk. Például pozitív forgatás esetén annak az előjelét, amelyik a második volt.

(Lásd a 15. ábrán! Itt $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}'$)



Tétel: A vektor derékszögű koordinátái segítségével meghatározhatjuk a vektor abszolút értékét is (Pitagorasz tételének alkalmazásával):

Legyen $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{i} + \mu \mathbf{j}$ ($\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$ és $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$)



$$|\mathbf{v}|^2 = |\lambda \mathbf{i}|^2 + |\mu \mathbf{j}|^2 = \lambda^2 + \mu^2 \quad (|\lambda \mathbf{i}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{i}| ; |\mu \mathbf{j}| = |\mu| \cdot |\mathbf{j}|)$$

$$\text{Így: } |\mathbf{v}| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

Vektorok skaláris szorzata

Ezt a fogalmat is a fizika motiválta.

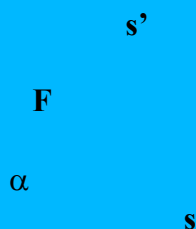
A fizikában munkavégzésről beszélünk, ha erő hatására elmozdulás jön létre (az erő ($\mathbf{F}$) és az elmozdulás ($\mathbf{s}$) vektoriális mennyiségek).

A munkát (W) úgy számítjuk ki (állandó erőhatás esetén), hogy az erő nagyságát szorozzuk az irányába történő (!) elmozdulás nagyságával, vagy az elmozdulás nagyságát szorozzuk az erő elmozdulás-irányú összetevőjének nagyságával.

1. Ha $\mathbf{F} \uparrow \uparrow \mathbf{s}$ akkor $W = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{s}|$
2. Egyébként :



(17. ábra)



(18. ábra)

A 17. ábrán : $|\mathbf{F}'| = |\mathbf{F}| \cdot \cos \alpha$; a 18. ábrán : $|\mathbf{s}'| = |\mathbf{s}| \cdot \cos \alpha$

Ezekből adódóan : $W = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{s}| \cdot \cos \alpha$. (Nevezzük ezt az $\mathbf{F}$ és az $\mathbf{s}$ skaláris szorzatának !)

(Ez tartalmazza az 1.pont esetét ($\cos \alpha = 1$) is, viszont azt is mondja, hogy, ha $\mathbf{F} \downarrow \uparrow \mathbf{s}$, akkor :
 $W = -|\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{s}|$ ($\cos \alpha = -1$).)

A matematikában a skaláris szorzat fogalmát a fizikai jelentéstől függetlenül definiáljuk.

Definíció (Két vektor hajlásszöge): A két vektorral egyirányú, egy pontból kiinduló félegyenesek konvex szöge (α). ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$)
 ($\alpha = 0^\circ \Rightarrow$ egyirányúak ; $\alpha = 180^\circ \Rightarrow$ ellentétes irányúak.)

Definíció: Tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, α hajlásszögű vektorok $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (= $\mathbf{ab}$) -vel jelölt skaláris szorzata:
 $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$ ($\mathbf{ab} \in \mathbb{R}$ mindig !)

A skaláris szorzás tulajdonságai ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ minden esetben):

1. $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ (kommutatív)
2. $\mathbf{ab} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ (beleértve azt is, hogy $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$ nullvektor ($\forall \mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \perp \mathbf{0}$))
 (Így: $\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \mathbf{0}$)
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$ (disztributivitás) (ez akkor is igaz, ha valamelyik két tagból áll)
4. $\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\mathbf{a}|^2$
 (Ha $\mathbf{a}$ egységvektor, akkor $\mathbf{a}^2 = 1$ és $\mathbf{0}^2 = 0$)
 (Így: $\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = 1$)
5. $\lambda(\mathbf{ab}) = \mathbf{a}(\lambda \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a})\mathbf{b}$
6. Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ és $\alpha \neq 90^\circ$ akkor:
 - a) $\mathbf{ab} > 0 \Leftrightarrow 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$
 - b) $\mathbf{ab} < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$

Megjegyzés : $(\mathbf{ab})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{bc})$ ($\mathbf{c}$ irányú, illetve $\mathbf{a}$ irányú vektorok !!!)

Következmények: 1. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+2\mathbf{ab}$

2. $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{ab}$

3. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$

4. $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1 \Rightarrow \mathbf{ab}=\cos\alpha$

5. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ -re vonatkozó koordinátái: $(a'; a'')$ illetve $(b'; b'')$, akkor :

$$\mathbf{ab}=(a'\mathbf{i}+a''\mathbf{j})\cdot(b'\mathbf{i}+b''\mathbf{j})=a'\cdot b'+a''\cdot b'' \text{ (mivel } \mathbf{ii}=\mathbf{jj}=1 \text{ és } \mathbf{ij}=\mathbf{ji}=0\text{)}.$$

Vektorok vektoriális szorzata (Kiegészítő anyag)

A vektoroknak létezik az úgynevezett vektoriális szorzata is, ami ugyan kiegészítő anyag, de a fizika tantárgyhoz szükséges lehet, főleg emelt szinten. Ezt a műveletet $\times$ -tel jelöljük.

Definíció: Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, akkor $\mathbf{c}=\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ az a vektor, ami $\perp$ -es $\mathbf{a}$ -ra és $\mathbf{b}$ -re is, hossza: $|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\alpha$ (α : az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ hajlásszöge), továbbá jobbsodrású rendszert alkotnak a következő módon:

$$\mathbf{c}=\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \quad \mathbf{b}$$

(19. ábra)

Alkalmazás

A skaláris szorzás felhasználásával például egyszerűen bizonyítható a koszinusztétel:

$\mathbf{b}$

$\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$

(20. ábra)

($0^\circ < \gamma < 180^\circ$, mivel háromszögről van szó)

γ

$\mathbf{a}$

$$\mathbf{c}^2=(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{ab} \Rightarrow |\mathbf{c}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\cdot|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\gamma$$

További alkalmazásként számos példát említhetnénk még például a koordinátageometriából, amely szinte teljes egészében a vektorokra támaszkodik.

Például egy AB szakasz adott arányú osztópontjának a meghatározásánál a szakasz végpontjainak

helyvektoraival (tetszőleges vonatkoztatási ponthoz viszonyítva) kifejezhető az osztópont helyvektora, s így természetesen a végpontok koordinátaival kifejezhetők az osztópont koordinátái. (A vektorműveleteket a koordinátákkal is elvégezve, a tanult módon.)

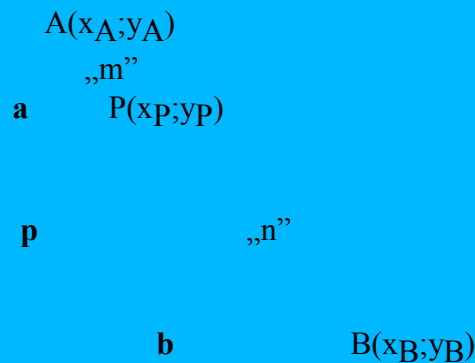
Az AB szakaszt $m:n$ arányban osztó P pont (amely az AB szakaszon található) által keletkezett AP és PB szakaszok esetén :

$$AP:PB = m:n$$

(Az „m-rész” az A ponthoz, az „n-rész” a B ponthoz van közelebb.)

Legyenek az A,P,B pontokhoz mutató helyvektorok rendre: **a,p,b** !

y



(21.ábra)

Ekkor teljesülnek a következők:

Ezek alapján pedig (a fentieket beírva, s az átalakításokat elvégezve):

Koordinátákkal pedig:

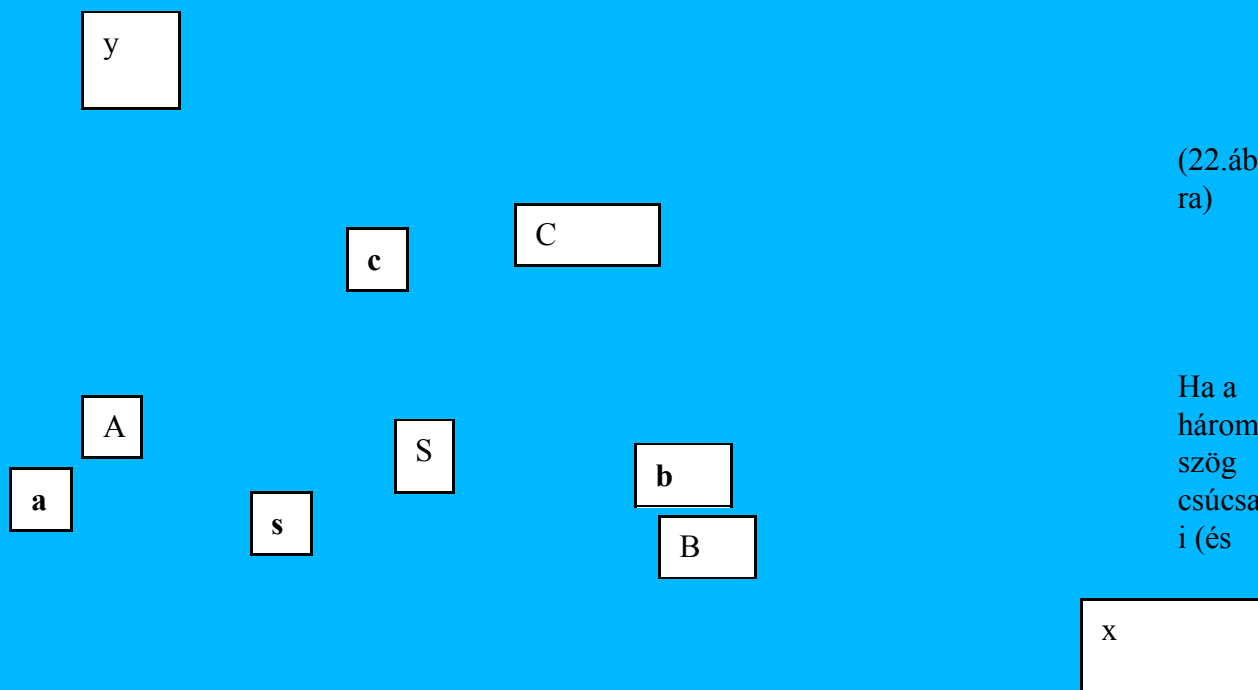
és

Ennek speciális esete az, amikor felezőpontról van szó, azaz $m:n = 1:1$. Ekkor használjunk P helyett F-et és **p** helyett **f**-et! Az eredmény ekkor a következőképpen alakul:

$$x_F = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_F = \frac{y_A + y_B}{2};$$

Az osztópontra kapott eredmény alapján hasonlóan felírható a harmadolópont helyvektora és a harmadolópont koordinátái, s mivel a súlypont harmadolja a súlyvonalakat, úgy, hogy a nagyobb rész a csúcshoz, a kisebb rész pedig az oldalfelező ponthoz esik közelebb, ezért mindezeket felhasználva könnyen felírhatjuk bármely háromszög súlypontjának helyvektorát és koordinátáit a háromszög csúcsainak helyvektorai és a csúcsok koordinátái segítségével.

Az eredmény (a rajz jelöléseivel):



azok koordinátái): $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, valamint azok helyvektorai rendre : $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, akkor súlypontjának helyvektora:

A súlypont koordinátái pedig:

és

20. Szakaszok és egyenesek a koordinátasíkon

I.

1. Szakaszok

- a) szakasz hossza: a szakasz egyik végpontjából a másikba mutató vektor hossza
szakasz hosszának meghatározása: a végpontkoordináták négyzetösszegének négyzetgyöke

b) szakasz osztópontja

szakasz felezőpontja: a végpontok koordinátáinak számtani közepe

szakasz harmadolópontja

(m:n arányban osztó pont)

háromszög súlypontja

A háromszög súlypontjának a koordinátái a csúcsok koordinátáinak számtani közepe

2. Egyenesek

a) egyenes helyzetét jellemző adatok

irányvektor: egy egyenes irányvektora az egyenessel egyállású bármely vektor, amely nem zérusvektor

normálvektor: az (xy) síkban egy egyenes normálvektora az egyenesre merőleges, a zérusvektortól különböző bármely vektor.

irányszög: az (xy) síkban az egyenes irányszöge az egyenes és az x tengely pozitív iránya által bezárt szög

iránytangens: az irányszög tangense (ha létezik)

b) összefüggések az egyenes helyzetét jellemző adatok között

irányvektort 90° -kal elforgatva normálvektort kapunk és viszont

irányvektor és normálvektor skaláris szorzata 0

iránytangens az irányvektor két koordinátájának hányadosa

iránytangensből az egyenes egy irányvektorát kaphatjuk meg

c) két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének a feltétele

párhuzamos egyenesek

két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha iránytangenseik egyenlők, azaz (irányvektoraik egyállásúak, azaz az egyik irányvektor a másiknak konstansszorososa)

merőleges egyenesek

az iránytangenssel rendelkező egyenesek akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha iránytangenseik egymásnak ellenkező előjelű reciprok értékei

d) az egyenes egyenletei

Olyan egyenlet, amelynek azoknak és csak azoknak pontoknak a koordinátái a megoldásai, amelyek az egyenesen vannak.

irányvektoros egyenlet

Az $(x_0; y_0)$ ponton átmenő $v(v_1; v_2)$ irányvektorú egyenes egyenlete v_2x

$$-v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$$

normálvektoros egyenlet

Az $(x_0; y_0)$ ponton átmenő $n(A; B)$ normálvektorú egyenes egyenlete

$$Ax + By = Ax_0 + By_0$$

irányítványos egyenlet

Az $(x_0; y_0)$ ponton átmenő m iránytangensű egyenes egyenlete

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

e) az egyenes egyenlete és az elsőfokú kétismeretlenes egyenlet

f) két egyenes metszéspontja

Két egyenes metszéspontja olyan koordinátájú pont, amely illeszkedik mindkét egyenesre.

Két egyenes metszéspontjának meghatározása a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása

g) pont és egyenes távolsága

h) szögfelezők egyenlete

II.

Alkalmazások

elemi geometriai feladatok megoldása koordináta-geometriai úton

lineáris programozási feladatok megoldása

egyenlőtlenséggel jellemzett ponthalmazok meghatározása

szélsőérték problémák megoldása

távolságok meghatározása a földi (égi) objektumok esetén

21. A kör és parabola a koordinátasíkon

A Koordináta-rendszerről általában:

A Descartes-féle koordináta-rendszerben a kettő tengely merőleges egymásra. Ezeket x (abszcissza) és y (ordináta) tengelyeknek nevezzük. Így bármely pontot két értékkel meg tudunk adni (pl.: $P(1;4)$). De hasonlóképpen egyeneseknek és más alakzatoknak is határozott egyenletük van. Most részletesen a kör és a parabola egyenleteit fogjuk vizsgálni.

A kör

A kör definíciója: A kör azon pontok halmaza a síkon, melyek egyenlő távol vannak egy ponttól.

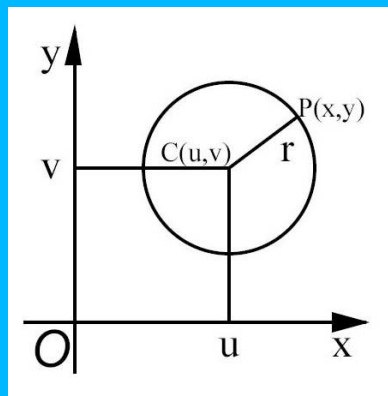
Adott középpontú és sugarú kör egyenlete

Tétel:

Egy x - y koordináta-rendszer síkjában lévő $O(u;v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

(Különleges eset, ha $u = 0$ és $v = 0$. ebben az esetben egyenlet: $x^2 + y^2 = r^2$)



a z

Bizonyítás:

A kör definíciójából OP állandó, ha P a körív egy pontja. Ez a kör sugara: r .

Legyen a koordináta-rendszerben $C(u;v)$ a középpont, r a sugar és $P(x;y)$ a futópont. Két pont távolságát így tudjuk felírni:

$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} = r$$

Mivel mindkét oldal pozitív, négyzeteik egyenlősége ekvivalens az eredeti egyenlettel:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Ezt az egyenletet csak azok az $(x;y)$ számpárok elégítik ki, melyek az $C(u;v)$ középpontú, r sugarú kör pontjainak koordinátái.

A másodfokú kétismeretlenes egyenlet és a kör

A kör

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

egyenletében elvégezzük a négyzetreemelést és rendezzük az egyenletet:

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + (u^2 + v^2 - r^2) = 0$$

Így ezt az egyenletet általánosabban:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

ahol a , b és c valós számok: $a = -2u$, $b = -2v$ és $c = u^2 + v^2 - r^2$.

Ezt az egyenletet visszaalakítva $(x-u)^2 + (y-v)^2 = N$ egyenletté azt mondhatjuk el, hogy

1. Ha N pozitív, akkor ez egy kör egyenlete.
2. Ha N nulla, ez egy $K(u;v)$ pont egyenlete.
3. Ha N negatív, akkor a koordinátasík egyetlen pontja sem elégíti ki az egyenletet, tehát nem lehet egy kör egyenlete.

Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy másodfokú kétismeretlenes egyenlet akkor és csak akkor állít elő kört, ha

- a) négyzetes tagjaik együtthatója egyenlő;
- b) az egyenlet nem tartalmaz xy -os tagot;
- c) az $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$ egyenlet együtthatói között fennáll $B^2 + C^2 > 4AD$.

Kör és egyenes kölcsönös helyzete

Egy kör és egy egyenes közös pontjainak a száma attól függ, hogy hány megoldása van az egyenletükből álló egyenletrendszernek:

- Ha kettő, akkor metszik egymást;
- Ha egy, akkor az egyenes a kör érintője;

- Ha egy sem, akkor a két ponthalmaznak nincs közös pontja.

Két kör kölcsönös helyzete

Hasonlóan az egyenes és kör helyzetéhez itt is három lehetőséget különböztetünk meg.

- Ha 2 megoldás van az egyenletükből létrehozott egyenletrendszernek, akkor metszik egymást.
- Ha 1, érintik egymást (belülről, vagy kívülről).
- Ha nincs, akkor nincs közös pontjuk (, de az egyik tartalmazhatja a másikat).

Körhöz külső pontból húzott érintő

Számolhatunk ez elemi geometria alapján, mely a kör középpontja és a külső pont fölé állított Thalesz-kör és az eredeti kör metszéspontjával kapja meg a kérdéses pontokat. Ezt a koordináta-geometriában távolságméréssel, szakaszfelezéssel és egyenletrendszer-megoldással el tudjuk végezni.

Másként is megállapíthatjuk. Az érintőt a külső ponton átmenő egyenesek közt keressük amit fel tudunk írni iránytangens segítségével. Ekkor megint egy egyenletrendszert kapunk az egyenesek m meredekségével, amire olyan számokat keresünk, ahol a másodfokú egyenletnek csak egy megoldása van (ott érintő).

A parabola

A parabola definíciója: A parabola azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyek egy adott egyenestől – a vezéregyenestől – és egy adott ponttól – a fókuszponttól – egyenlő távolságra vannak. A vezéregyenes és a fókuszpont távolságát a parabola paraméterének, a fókusz és a vezéregyenes összekötő legrövidebb szakasz felezőpontját pedig tengelypontnak nevezzük.

A legegyszerűbb helyzetű parabola egyenlete

Tétel:

Ha egy parabola úgy helyezkedik el egy x - y koordináta-rendszerben, hogy a tengelypontja az origó és fókusza az $F(0;p/2)$ (p -vel a paramétert jelöljük), akkor a parabola egyenlete:

$$x^2 = 2py$$

Bizonyítás:

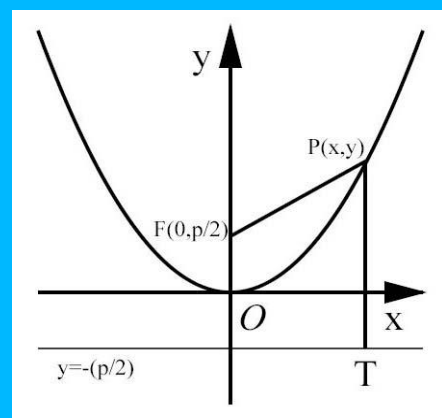
Ebben az esetben a parabola vezéregyenesének az egyenlete: $y = -p/2$

A definíció alapján $P(x;y)$ akkor eleme a parabolának, egyenlő a fókuszról és a vezéregyenestől mért távolsága.

$$y + (p/2) = \sqrt{x^2 + (y - (p/2))^2}$$

Az egyenlet mindkét oldalán pozitív szám áll, így a négyzetre emelés ekvivalens átalakításnak számít:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - py + (p/2)^2 &= y^2 + py + (p/2)^2 \\ x^2 &= 2py \end{aligned}$$



h a

A koordináta-tengelyekkel párhuzamos tengelyű parabolák egyelete

- Ha az $x^2 = 2py$ egyenletű parabolát a $v(u;v)$ vektorral eltoljk, akkor az egyenlete így módosul: $(x-v)^2 = 2p(y-v)^2$.
- Ha egy $x^2 = 2py$ egyenletű parabolát tükrözzük az x tengelyre, akkor a tükörkép egyenlete: $x^2 = -2py$.
- Ha az $x^2 = -2py$ egyenletű parabolát eltoljuk a $v(u;v)$ vektorral, akkor az egyenlete így módosul: $(x-v)^2 = -2p(y-v)^2$.
- Ha egy parabola úgy helyezkedik el a koordinátasíkon, hogy tengelypontja az origó és fókusza $F(p/2;0)$, akkor a parabola egyenlete: $y^2 = 2px$.
- Ha ezt eltoljuk v vektorral, akkor egyenlete: $(y-v)^2 = 2p(x-u)^2$.
- Ha az $y^2 = 2px$ egyenletű parabolát tükrözzük az y tengelyre, akkor az egyenlete így fog kinézni: $y^2 = -2px$.
- A v vektorral eltolva pedig: $(y-v)^2 = -2p(x-u)^2$.

A másodfokú függvények és a parabola

Ha egy parabola tengelye merőleges az ordiátatengelyre, akkor az egyenlete felírható $y = ax^2 + bx + c$ alakban, ahol $a = 1/2p$, $b = -u/p$, $c = (u^2/2p + v)$, így a , b és c valós számok, és $a \neq 0$. Ha pedig visszafelé néznénk végig, a teljes négyzetté alakítás után ugyanígy megkapnánk az eredeti egyenletet. Így bizonyítottuk, hogy a másodfokú függvények grafikus képe y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola. (Ha a parabola tengelye az x tengellyel párhuzamos, akkor az nem függvény, így ezt az esetet nem kell vizsgálnunk.)

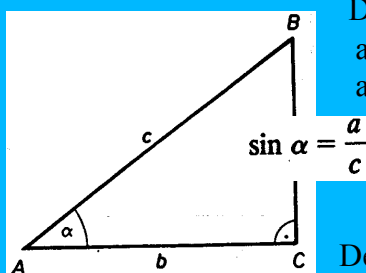
Alkalmazás:

Matematikán belül: szerkesztés pontosítása, pontos adatok számolása, kúpszeletek (végtelen kúp metszete), felületek

Matematikán kívül: vektorgrafika, számítógépes képmegjelenítés, tervezés, építészet (parabolikus-, elliptikus-, hiperbolikus felületek), fizika (körmozgás, hajítások, erőterek).

22. Szögfüggvények a geometriában

I. Háromszöges definíció:



Derékszögű háromszögben az α hegyesszög **szinusának** nevezzük az α hegyesszöggel szemközti befogónak és az átfogónak az arányát.

Derékszögű háromszögben az α hegyesszög **koszinusának** nevezzük α hegyesszög melletti befogónak és az átfogónak az

arányát.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Derékszögű háromszögben az α hegyesszög **tangensének** nevezzük az α hegyesszöggel szemközi befogó és az α hegyesszög melletti befogó arányát.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Derékszögű háromszögben az α hegyesszög kotangensének nevezzük az α hegyesszög melletti befogó és az α hegyesszöggel szemközi befogó arányát.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Közvetlenül a definíciókból következik:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{c \sin \alpha}{c \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Pótszögek függvényei:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{és} \quad \cos \beta = \cos (90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} \quad , \text{tehát egy szög szinusza egyenlő pótszögének a koszinuszával}$$

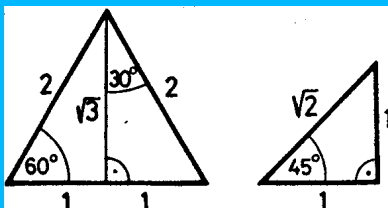
$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$$

hasonlóan:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \text{és} \quad \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha) = \frac{a}{b} \quad , \text{tehát egy szög tangense egyenlő pótszögének kotangensével}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha)$$

II. Néhány hegyesszög pontos szögfüggvényértéke:



Szabályos háromszögből 30° -nak, 60° -nak, valamint egyenlőszárú derékszögű háromszögből 45° -nak a pontos szögfüggvényeit meghatározhatjuk:

sin	cos	tg	ctg
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

III. A szögfüggvények tágabb értelemben:

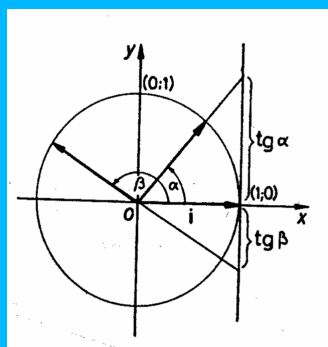
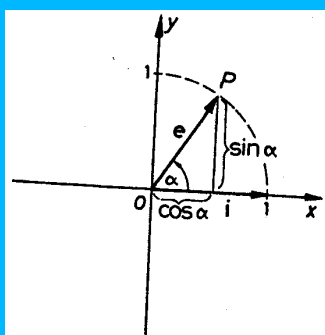
Definíció:

- vegyünk fel egy $i(0;1)$ egységvektort és forgassuk el pozitív irányba α szöggel, az így kapott vektor legyen e vektor, ekkor:

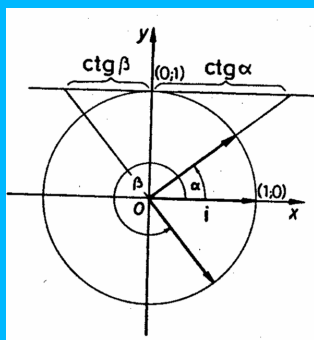
- az α szög **szinusza**, a koordinátasíkon, az i vektortól α szöggel elforgatott egységvektor y , azaz 2. koordinátája

- az α szög **koszinusa**, a koordinátasíkon, az i vektortól α szöggel elforgatott egységvektor x , azaz 1. koordinátája

- ebből következik, hogy $e = (\cos\alpha)i + (\sin\alpha)j$

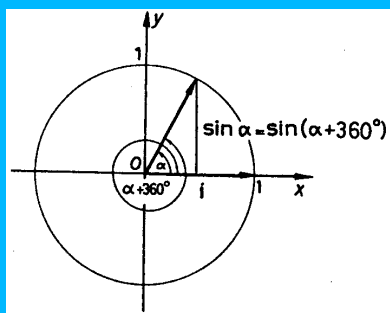


– egy α szög **tangense** a koordinátasíkon annak a pontnak az y koordinátája, amelyet az α szöggel elforgatott egységvektor egyenese az origó körüli egységsugarú kör $(1;0)$ pontjához húzott érintőből kimetsz



– Az α szög **kotangense** a koordinátasíkon annak a pontnak az x koordinátája, amelyet az α szöggel elforgatott egységvektor egyenese az origó körüli egységsugarú kör $(0,1)$ pontjához húzott érintőből kimetsz.

IV. Összefüggések a szögfüggvényértékek között:

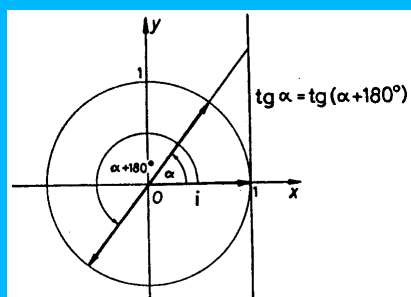


– 360° -kal történő elforgatás esetén az egységvektor az előző helyzetébe visszatér, ezért y koordinátája, azaz a $\sin \alpha$ értéke ugyanaz lesz:

$$k \in \mathbf{Z} \quad \sin \alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ)$$

– ugyanezt tapasztaljuk $\cos \alpha$ vizsgálatánál:

$$k \in \mathbf{Z} \quad \cos \alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ)$$



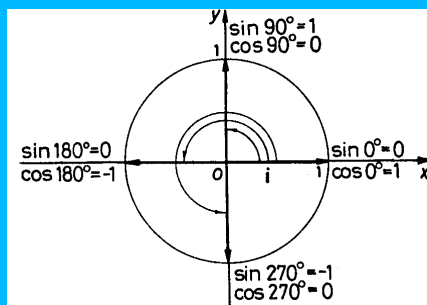
– belátható továbbá, hogy

$$k \in \mathbf{Z} \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ)$$

illetve

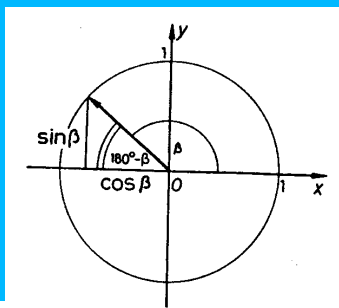
$$k \in \mathbf{Z} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 180^\circ)$$

Ha az α szöggel egységvektor a koordináta-rendszer valamelyik tengelyén van, akkor a definíciók alapján:



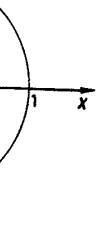
	$\sin$	$\cos$	tg	ctg
0°	0	1	0	nem létezik
90°	1	0	nem létezik	0
180°	0	-1	0	nem létezik
270°	-1	0	nem létezik	0

Ha az α szöggel elforgatott egységvektor a koordináta-rendszer valamelyik negyedében van, akkor az ott lévő szögek szögfüggvényértékeit visszavezethetjük a hegyesszögek szögfüggvényértékeire:



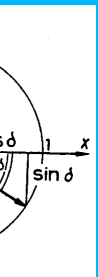
ha $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin (180^\circ - \alpha) \\ \cos \alpha &= -\cos (180^\circ - \alpha) \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) \\ \operatorname{ctg} \alpha &= -\operatorname{ctg} (180^\circ - \alpha)\end{aligned}$$



ha $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= -\sin (\alpha - 180^\circ) \\ \cos \alpha &= -\cos (\alpha - 180^\circ) \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} (\alpha - 180^\circ) \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \operatorname{ctg} (\alpha - 180^\circ)\end{aligned}$$



ha $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= -\sin (360^\circ - \alpha) \\ \cos \alpha &= \cos (360^\circ - \alpha) \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\operatorname{tg} (360^\circ - \alpha) \\ \operatorname{ctg} \alpha &= -\operatorname{ctg} (360^\circ - \alpha)\end{aligned}$$

V. Tételek:

Színusz tétel:

Bármely háromszögben az oldalak aránya egyenlő a velük szemközti szögek színuszának az arányával.

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Bizonyítás: Hajnal Imre – dr. Pintér Lajos: Matematika III. B változat 36. o.

Koszinusz tétel:

Bármely háromszögben egy oldal négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal

négyzetének az összegéből kivonjuk e két oldal és a közbezárt szög koszinuszának a kétszeres szorzatát.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Bizonyítás: Hajnal Imre – dr. Pintér Lajos: Matematika III. B változat 38. o.

VI. Alkalmazások:

- elektromágneses hullámok számításánál
- egyéb hullámok számításánál
- rezgőmozgások reprezentációjánál
- atomfizikában a hullámmozgások számításánál
- geometriában:
 - vektorok skaláris szorzatánál
 - háromszög területének számítása:
 $T = 0,5 \cdot (a \cdot b \cdot \sin \gamma)$
 - a háromszög oldalainak kiszámítása
 (koszinusz- ill. szinusz tétel) stb.

23. A mérés(szög,hosszúság, terület, térfogat)

Szög: Def: két egyenes által határolt síkrész(részei: szögcsúcs , -szár , -tartomány)

Fajtái: nullszög, hegyesszög($0 < \alpha < 90^\circ$), derékszög(90°), tompaszög($90^\circ < \alpha < 180^\circ$), egyenesszög(180°), homorúszög($180^\circ < \alpha < 360^\circ$), teljesszög(360°)
 Két szög egyenlő, ha fedésbe hozhatók

1 úa körív 1/360- ad részéhez tartozó középponti szög mérőszáma

1 újfok a körív 1/400 ad részéhez tartozó középponti szög mérőszáma

1' 1000m távol lévő 1m magas szakasz ekkora szögben látszik

1 radián a sugárnyi ívhez tartozó középponti szög mérőszáma(nincs dimeziója) $1 \text{ rad} = 2\pi/360$

Def: hajlásszög: két egyenes metszésénél keletkező kisebbik szög

Def: szögfelező: azon pontok halmaza a síkon amelyek a két szögszártól egyenlő távolságra vannak

Szögpárok:

- pótszögek($\alpha + \beta = 90^\circ$)
- mellékszögek=kiegészítőszögek=társszögek($\alpha + \beta = 180^\circ$)
- csúcsszögek($\alpha = \beta$)
- egyállású szögek($\alpha = \beta$)
- váltószögek($\alpha = \beta$)
- merőleges szárú szögek($\alpha = \beta$)

Tételek szöge:

Definíciók:

- *Két kitérő egyenes hajlásszöge: a tér egy tetszőleges pontján átmenő, velük párhuzamos*

egyenesek hajlásszöge

- Egyenes és sík hajlásszöge: ha egy egyenes nem merőleges a síkra, akkor az egyenese és a sík hajlásszöge alatt azt a szöget értjük, amelynek egyik szára az egyenes, másik szára az egyenesnek a síkon levő merőleges vetülete.
- Síkra merőleges egyenes: egy egyenes és egy sík akkor merőleges egymásra, ha az egyenes merőleges a sík minden egyenesére
- Két sík hajlásszöge: két metsző sík esetében metszésvonaluk egy pontjában a két sík mindegyikében merőlegest állítunk a metszésvonalra, e kétmerőleges hajlásszögét nevezzük a két sík hajlásszögének

Tételek:

- Ha egy egyenes merőleges a sík két egymást metsző egyenesére, akkor a sík minden egyenesére, azaz a síkra is merőleges.
- Ha a tér egy P pontjából merőlegest bocsátunk az S síkra és annak egy ' a ' egyenesére, akkor a két talppontot összekötő egyenes is merőleges az ' a ' egyenesre

Hosszúság:

Tételek távolsága:

- Egyenes és pont: a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza
- Két egyenes távolsága:
 1. Két metsző egyenes távolsága 0
 2. Két párhuzamos egyenes távolsága: az egyik egyenes pontjából a másik egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza
 3. Két kitérő egyenes távolsága: annak a szakasznak a hossza, amely a kitérő egyenesek normáltranszverzálisán a két kitérő egyenes között van
- Pont és sík távolsága: a pontból a síkra bocsátott merőleges egyenesnek a pont és sík közötti szakaszának hossza
- Két sík távolsága(ha nem metszők): az egyik sík egy pontjából a másik síkra bocsátott merőleges szakasz hossza.

Terület:

Axiómák:

1. Egységnyi oldalú négyzet területe 1
2. Egybevágó síkidomok területe egyenlő
3. Ha egy sokszöget két sokszögre bontunk, akkor a kapott két sokszög területének az összege az eredeti sokszög területével egyenlő.

Síkidomok területe:

Négyzet: a^2

Téglalap: $a \cdot b$

Rombusz: $a \cdot b \cdot \sin \alpha = e \cdot f / 2 = a \cdot m_a$

Romboid: $a \cdot b \cdot \sin \alpha = a \cdot m_a$

Trapéz: $(a+c) \cdot m / 2$

Deltoid: $e \cdot f / 2$

Háromszög: $a \cdot m_a / 2 = a \cdot b \cdot \sin \alpha / 2$ (+héron képlet)

A többi sokszög területét háromszögekre bontva kaphatjuk meg.

Kör: $r^2 \pi$

Grafikon alatti területet integrál segítségével számoljuk ki.

Nagyítás/kicsinyítés esetén, ha a nagyítás/kicsinyítés aránya l , akkor a keletkezett terület l^2 szeresére változik.

Térfogat

A síkbeli sokszögeknek a térben a poliéderek felelnek meg.

Poliéder: a tér olyan része, amelyet véges sok sokszögtartomány határol, s amelynek bármely két pontja összeköthető olyan töröttvonallal, amely a határoló sokszögtartományok egyikét sem metszi.

Axiómák:

1. *Térfogat nagyobb vagy egyenlő, mint nulla*
2. *Egybevágó testek térfogata egyenlő*
3. *Ha egy testet két részre bontunk, akkor a kapott két test térfogatának az összege az eredeti test térfogatával egyenlő.*
4. *Egységkocka térfogata 1*

Testek térfogata:

- *Kocka: a^3*
- *Téglatest: $a \cdot b \cdot c$*
- *Hasáb: $T_{\text{alap}} \cdot m$ hasáb: ha egy síkbeli alakzatot párhuzamos egyenesekkel körbejárunk, és két párhuzamos síkkal elmetsszük, hasábot kapunk (egyenes v. ferde).*
- *Gúla: $T_{\text{alap}} \cdot m/3$*
- *Csonkagúla: $m/3 \cdot (T + (Tt)^{1/2} + t)$*
- *Henger: $T_{\text{alap}} \cdot m$*
- *Kúp: $T_{\text{alap}} \cdot m/3$*
- *Csonkakúp: $\pi m/3 \cdot (R^2 + Rr + r^2)$*
- *Gömb: $(4/3)r^3 \pi$*

Forgástestek térfogata: $\pi \int_a^b f^2(x) dx$

23. A mérés (szög, hosszúság, terület, térfogat)

Szög:

A szög a síknak az a része, amelyet egy pontból kiinduló két félsík határol. A szöget alkotó félegyenesek a szög szárai, közös pontjuk a szög csúcsa. A szög szárai általában két szöget határoznak meg, ezek a szögtartományok. Közülük a szöbe jövő szöget körívvel, vagy görög kisbetűvel (pl. α , β , γ ...) jelöljük meg. Megadhatjuk a szöget a szárainak egy-egy pontjával és a csúccsal, ahol középen a csúcsonál lévő szöget említjük (pl. $AOB\angle$).

A szöget származtathatjuk forgásból is úgy, hogy közös kezdőpontú, egymást fedő félegyenesek közül az egyiket a félegyenesek közös kezdőpontja körül elforgatjuk. Ha a mozgó szár elforgatása az óramutató járásával ellenkező irányú, akkor a szöget pozitívnak, ha pedig egyező irányú, akkor negatívnak mondjuk. A szög nagyságát az elforgatás nagyságával mérjük, a forgási irány figyelmen kívül hagyásával. Két szöget akkor mondunk egyenlőnek, ha száraik fedésbe hozhatóak (eltolás és pont körüli forgatás segítségével).

Ha a CB szárból kiindulva, egy teljes körülforgást tesz meg a CA szár, akkor teljes-, ha félkörforgást tesz meg, akkor egyenes, ha pedig negyed körforgást végez, akkor derékszöget kapunk. A derékszögnél kisebb, de az egymást fedő félegyenesek által bezárt nullszögnél nagyobb szöget hegyesszögnek; a derékszögnél nagyobb, de az egyenesszögnél kisebb szöget tompaszögnek nevezzük. Ezek együttesen a domborúszögek. Az egyenesszögnél nagyobbakat pedig homorúszögnek mondjuk.

A szög egyik mértékegysége a fok. Jele 1° . Ez a teljesszög 360-ad része. A fok 60-ad része a perc ($'$),

a perc 60-ad része a másodperc ($''$). Pl. $25^{\circ}36'18'' = (25 + 36/60 + 18/3600)^{\circ} = 25,605^{\circ}$. A teljesség 360°, az egyenesség 180°, a derékszög 90°. Ha a szöget fokban mérjük és a mérőszám tizedes tört, akkor azt a 60-as számrendszerben felírt tizedes törtek értelmezésének segítségével váltjuk át percbé ill. másodpercbé: $36,421^{\circ} = 36^{\circ} + 4 \cdot 6' + 2 \cdot 36'' + 1 \cdot 3,6'' = 36^{\circ}25'15,6''$.

A szög másik mértékegysége a radián. Jele: 1 rad. Egy radián nagyságú az a szög, amelyhez az egységkörben egységnyi hosszúságú ív tartozik. A teljesség tehát annyi radián, ahány egységnyi hosszúságú ív az egységkör kerületére rámerhető. $1 \text{ rad} \approx 57,2958^{\circ}$. A kör kerületének és átmérőjének hányadosát π -vel jelöljük. (A görög periféria szó kezdőbetűje.) A π számértéke kb. 3,1415926... A π irracionális szám. Ma már több mint 5,1 milliárd tizedesjegye ismert. Tehát $1^{\circ} = d\pi/360^{\circ} = 2r\pi/360^{\circ} = \pi/180^{\circ}$ hiszen a sugár egységnyi (itt d a kör átmérője). $\pi/180 \text{ rad} \approx 3,141592654/180 \text{ rad} \approx 0,017453293 \text{ rad}$.

Hosszúság:

Egy egyenes két adott pontjából és az egyenesnek a két pont közötti pontjaiból álló halmazt szakasznak nevezzük. Hossza szakasznak van. A szakasz hosszát a végpontjai távolságának is hívjuk. A szakasz hossza nemnegatív valós szám. Csak akkor nulla, ha a két végpont egybeesik, azaz megegyezik. Ilyenkor elfajuló szakaszcól beszélünk.

Egy adott szakasz hosszát mérésel, azaz a hosszúságegységgel való összehasonlítással állapítjuk meg. A hosszúság egysége a méter. 1 méter megközelítőleg a Föld egyenlítőjének 40 milliommód része. Kisebb távolságok mérésére a decimétert ($1 \text{ dm} = 0,1 \text{ m}$), a centimétert ($1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$), a millimétert ($1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$), nagyobb távolságok mérésére pedig a kilométert használjuk ($1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$).

Adott szakasz hosszúságának mérési eljárása a következő:

Tekintsük a szakasz egyik végpontját kezdőpontnak, legyen ez A , a másikat pedig a szakasz végpontjának, legyen ez B . A -ból mérjük fel a szakaszra a hosszúságegységet annyszor, ahányszor ráfér. Ennek mérőszáma lesz a szakasz hosszúságának egészrész. Az utolsó, az A -tól valahány egységnyi távolságra lévő, még a szakaszhoz tartozó pont legyen P_1 . A P_1B szakaszra mérjük fel a hosszúságegység tizedrészét annyszor, ahányszor ráfér. Az így kapott szám lesz a szakasz hosszúságának első tizedesjegye. Az így kapott utolsó, még a szakaszon lévő tizedszakasz-végpont legyen P_2 . Mérjük fel a P_2B szakaszra a hosszúságegység századrészét annyszor, ahányszor ráfér. És így tovább ... Folytassuk az eljárást az n . lépésig. Így megkaphatjuk a szakasz hosszát n tizedesjegy pontossággal. Ha az eljárás során valamikor a P_i pont B -re esne, akkor a szakasz hosszúsága nem több mint n tizedesjegyű véges tizedestört. Ez az eljárás n lépésben a szakasz hosszának n tizedesjegyből álló legnagyobb alsó korlátját adja.

Terület:

Először sokszögek területével foglalkozunk.

A terület egy egyértelmű hozzárendelés a sokszögek és a valós számok halmaza között. A hozzárendelés az alábbi négy tulajdonsággal rendelkezik:

1. Minden sokszög területe pozitív szám.
2. Egybevágó sokszögek területe egyenlő.
3. Ha egy sokszöget két sokszögre bontunk, akkor e kettő területének összeg az eredeti sokszög területével egyenlő.

4. Az egységnégyzet területe 1.

Most nevezetes sokszögek területével foglalkozunk. Az alábbi állításokban egy szakaszon annak hosszát értjük.

A téglalap területe két szomszédos oldal szorzatával egyenlő.

A paralelogramma területe az alap és a hozzá tartozó magasság szorzatával egyenlő.

A háromszög területe az alap és a hozzá tartozó magasság szorzatának felével egyenlő.

Háromszög területe két oldalának (a és b) és közbezárt szögük (γ) ismeretében is kiszámítható: $t = (absin\gamma)/2$.

Háromszög területe pusztán az oldalhosszak ismeretében is kiszámítható:

$$t = \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}; \text{ ahol } s \text{ az } a, b \text{ és } c \text{ oldalak összegének fele.}$$

A háromszög területe kiszámítható az alábbi módon is: $t = abc/(4R)$ ahol a, b és c a három oldal, R pedig a körülírt kör sugara.

A trapéz területe a középvonal s a magasság szorzatával egyenlő.

A deltoid területe átlói szorzatának felével egyenlő.

Egy kör köré írt sokszög területe feleakkora, mint a sokszög kerületének és a kör sugarának a szorzata.

Szabályos n -szög területe a „szinuszos területképlet” alkalmazásával számítható ki a legegyszerűbben.

Legyen két szomszédos csúcshoz a sokszög körülírt köréből húzott sugarak hajlásszöge ω . Ekkor a terület: $T = (nr^2 \sin \omega)/2$. Ugyanez a terület az oldalszám és az oldalhossz segítségével is kifejezhető, felhasználva a derékszögű háromszög hegyesszögének kotangensének definícióját és az, hogy egyenlőszárú háromszög alaphoz tartozó magassága felezi a szárszöget. $T = [na^2 \text{ctg}(\omega/2)]/4$, itt a az oldalhossz. Ezt a területet a beírt kör sugara (ρ) segítségével is kifejezhető: $T = (na\rho)/2$.

Hasonló sokszögek területének aránya hasonlóságuk arányának négyzetével egyenlő.

Most áttérünk a kör és részei területének kiszámítására.

Az r sugarú kör területe: $r^2\pi$.

Egy kör köríkjének területe feleakkora, mint a sugár és a határoló körív hosszának szorzata. (A háromszög területképletére hasonlít.) Köríkk területe mint a kör arányos részének területe is számítható: $\alpha/360^\circ = t_{\text{köríkk}}/(r^2\pi) \Rightarrow t_{\text{köríkk}} = r^2\pi \cdot \alpha/360^\circ$.

Tétel: Körszelet területe: $T = [ri - h(r - m)]/2 = r^2(\alpha - \sin\alpha)$

Bizonyítás: A körszeletet a következőképpen értelmezzük: Egy r sugarú körben egy szelőjének h hosszúságú szakasza – a kör egy szelője – halad. Ez a szelő a síkot két félsokra osztja. Az egyik félsíknak és a zárt kör lapnak a metszete az adott kör adott húrjához tartozó egyik körszelete. A kör egy húrja a kört két körszeletre bontja. Legyenek jelöléseink összhangban a Nemzeti Tankönyvkiadó régi Függvénytáblázatának 66. Oldalán található ábrával.

A keresett terület mindkét formuláját – adott körben – a köríkk sugarai és a körszeletet meghatározó húr által kijelölt háromszög területének különbségeként számítjuk ki.

Az első területképlet bizonyítása: A tétel előtt közvetlenül említettük, hogy a köríkk területe $T = ri/2$. A körszeletünket kijelölő húr és a köríkk sugarai által kijelölt háromszög területe pedig az alapjának (azaz a húrnak) és a hozzá tartozó magasság szorzatának feleként számítható. Itt az alaphoz tartozó magasságot úgy kapjuk, hogy a köríkk sugarából kivonjuk a körszelet m magasságát. A köríkk területének és a háromszög területének különbségéből éppen a keresett formula adódik.

A második területképlet bizonyítása: Most a köríkk területének azt az ismervét használjuk fel, hogy a terület úgy aránylik a teljes kör területéhez, mint a középponti szöge a teljes szöghöz. Azaz: $T_{\text{köríkk}} = r^2\alpha/2$. Itt a középponti szöget radiánban mérjük. A köríkk adott húrja és a köríkk sugarai által meghatározott háromszög területét most a „szinuszos területformula” segítségével számíthatjuk ki, ahol a szomszédos oldalak a kör sugarai, közbezárt szögük pedig a húr végpontjaihoz húzott sugarak által bezárt középponti szög. Ha a köríkk területéből kivonjuk a háromszög területét, akkor éppen a keresett összefüggést kapjuk.

Térfogat:

Először ún. poliéderek térfogatával foglalkozunk. Poliédernek nevezzük az olyan térrészt, amelyet véges sok sokszögtartomány határol, s amely teljes egyenest nem tartalmaz. Úgy is definiálható, mint olyan véges sok sokszögtartomány által határolt térrész, amely egy alkalmas sugarú gömbbe befér.

A térfogat fogalma hasonló állításokkal definiálható, mint a terület:

Minden poliéderhez hozzárendelhetünk egy számot, amelyet térfogatnak nevezünk, s amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. Minden poliéder térfogata pozitív szám.
2. Egybevágó poliéderek térfogata egyenlő.
3. Ha egy poliédert két poliéderre bontunk, akkor e kettő térfogatának összege az eredeti poliéder térfogatával egyenlő.
4. Az egységkocka térfogata 1.

Nevezetes poliéderek térfogata:

Itt, mindig először definiáljuk az adott testet, ha azt korábban még nem tettük volna meg.

A téglatest térfogata három egy csúcsban találkozó él szorzatával egyenlő.

Ha egy sokszög vonal pontjain át párhuzamosokat húzunk egy olyan egyenessel, amely a sokszög síkjával nem párhuzamos, akkor egy végtelenbe nyúló felületet (ún. végtelen hasábfelületet) kapunk. Ha ezt a végtelen hasábfelületet, a sokszög síkjával és egy ezzel párhuzamos síkkal elmetsszük, akkor poliéderhez jutunk, amelyet hasábnak nevezünk.

A hasáb térfogata az alapterület és a magasság szorzata.

Ha egy pontból egy sokszög vonal pontjaihoz félegyeneseket indítunk, és a pont nincs a sokszög síkjában, akkor egy végtelenbe nyúló felületet, ún. végtelen gúlafelületet kapunk. Ezt a felület egy testet, ún. végtelen gúlát határol. Ha ezt a testet a sokszög síkjával elmetsszük, akkor egy poliédert, ún. gúlát kapunk. A háromszög alapú gúla neve tetraéder. Ha a sokszög szabályos, akkor szabályos gúláról beszélünk.

A gúla (és így speciálisan a tetraéder) térfogata az alapterület és a magasság szorzatának harmada.

Csonkakúlát kapunk akkor, ha egy gúlából egy, az alaplapjának síkjával párhuzamos síkkal egy kisebb gúlát levágunk.

Csonkakúla térfogata: $V = m(T + \sqrt{(Tt) + t})/3$, ahol T és t a két alaplap területe, m a két alaplap távolsága.

A továbbiakban nem pusztán síkok által határolt testek térfogatával foglalkozunk.

Ha egy síkbeli vonal pontjain át párhuzamosokat húzunk egy olyan egyenessel, amely a síkkal nem párhuzamos, akkor egy végtelenbe nyúló alakzatot, hengerfelületet kapunk. Ha ezt a hengerfelületet az eredeti vonal síkjával és egy azzal párhuzamos síkkal elmetsszük, akkor egy testet, mégpedig hengert kapunk. A henger származtatásánál szereplő egyeneseket alkotó egyeneseknek, azoknak a két párhuzamos sík közé eső szakaszát alkotóknak hívjuk. Ha az alkotók merőlegesek a származtatásnál említett vonalra, akkor egyenes hengerről beszélünk. Ha a kiindulásul szolgáló síkbeli vonal kör, akkor körhengerről beszélünk.

Henger térfogata az alaplap területének és magasságának a szorzata.

Ha egy síkbeli vonal pontjain és egy a síkon kívül elhelyezkedő ponton át egyeneseket fektetünk, akkor kúpfelülethez jutunk. A síkbeli vonalon kívül elhelyezkedő pont a kúp csúcsa. A csúcsot a vonal pontjaival összekötő szakaszok a kúp alkotói. A síkgörbe és az alkotók által határolt test a kúp. Ha a származtatás elején említett görbe kör, akkor körkúpokról beszélünk. Ha a csúcsnak a körkúp származtatásánál említett síkgörbéje általa határolt síkidomra (a kúp alapjára) bocsátott merőleges vetülete a alapkör középpontja, akkor egyenes körkúpokról beszélünk.

Kúp térfogata az alapterület és a magasság szorzatának a harmada.

A csonkakúpot a következőképpen értelmezzük. Ha egy kútból egy, az alapjával párhuzamos síkkal elmetsszük. Ekkor egy kisebb kúpot és egy másik testet kapunk. Ez a másik test a csonkakúp.

A köralapú csonkakúp térfogata $V = \pi m(R^2 + Rr + r^2)/3$, ahol R és r az alapkörök sugara, m pedig a csonkakúp magassága.

A tér egy adott pontjától adott távolságnál nem nagyobb távolságra lévő pontok halmazát gömbtestnek (röviden gömbnek) nevezzük.

Az r sugarú gömb térfogata $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Feladat: Egy gúla alaplapja olyan húrtrapéz, amelynek párhuzamos oldalai 8 cm és 6 cm hosszúak, egyik szöge 60° . A gúla oldalélei egyenlő hosszúak, és az alaplap síkjával 45° -os szöget zárnak be. Mekkora a gúla térfogata?

Megoldás: Részletesen Csátár Katalin – Széplaki Györgyné: Matematika 16-18 éveseknek (Műszaki könyvkiadó) 207-209. Oldal.

Vázlat: Alapok különbsége ($AD' = 1$ cm) $\Rightarrow$ Alap magassága félbevágott szabályos háromszög magassága segítségével ($m_a = \sqrt{3}$) $\Rightarrow$ Trapéz területe ($T = 7 \cdot \sqrt{3}$ cm²) $\Rightarrow K$ legyen a trapéz köré írt kör középpontja, a kör sugara r . K vetületi pontja a trapéz hosszabbik (AB) alapjára Q , rövidebbik (CD) alapjára P . Pitagorasz-tétel az $AQK\Delta$ és $DPK\Delta$ -ekre. Innen a KQ távolság: $x = KQ = -2/\sqrt{3}$. A negatív előjel a paraméterezésből adódik, K ui. a trapézon kívül helyezkedik el. $\Rightarrow r = AK = m = \sqrt{(52/3)} \Rightarrow V = Tm/3 \approx 16,826$ cm³.

Alkalmazások:

Tartálykocsi térfogata, mint egy hengerből és két gömbszeletből felépített test térfogata számítható ki.

Egy lakótelep parkosításának mértéke a lakótelep zöldterületének és teljes területének hányadosa. Mind a zöld területet alkotó egyes földdarabok területe, mind a teljes lakótelep területe szabályos, speciális síkidomokból (háromszögekből, téglalapokból, körcikkek, stb.) építhető fel.

Csonkakúp alakú konyhai űrmérték oldalán található skálabeosztás rovátkáinak elhelyezése egymáson lévő, egyenlő térfogatú csonka kúpok magasságainak kiszámításával oldható meg.

A brüsszeli Atomium homlokzatrekonstrukciós munkálatainak anyagköltsége, mint gömbökből, hiányzó gömbsüvegekből és hengerekből felépíthető felszínű test felszíne számítható ki.

24. tétel: Kombinatorika, valószínűségszámítás

Kombinatorika

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n; 1! = 1; 0! = 1$$

Permutáció: hányféle sorrend lehetséges n elem esetén

$$P = n!$$

Bizonyítás teljes indukcióval:

$n=1$: $1! = 1$ lehetőség: a

$n=2$: $2! = 2$ lehetőség: ab, ba

$n=3$: $3! = 6$ lehetőség: abc, acb, cab, bac, bca, cba

Tegyük fel, hogy n elem esetén $P = n!$ igaz.

Bizonyítsuk, hogy ha n -re igaz, akkor $n+1$ -re is igaz:

Vegyünk n elemet. Ekkor $n!$ sorrend van. A maradék 1 elem minden lehetséges sorrendnél $n+1$ helyen szerepelhet, ezért összesen $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$ sorrend van.

Ismétléses permutáció: hányféle sorrend lehetséges n elem esetén, ha vannak egyforma elemek is (pl. k ill. l db.)

$P_i = n!/(k! \cdot i!)$ n elem esetén n! lehetőség van, de ezekben a k elemek felcserélhetőek, ezért k!-szor szerepelt minden egyforma eset. Ezért osztani kell k!-al. De 1 egyforma elem miatt azok is felcserélhetőek, 1!-szor szerepelt minden lehetőség, osztunk 1!-al ...

Variáció: n elemből k kiválasztása, a sorrend számít

Ha egy elem ismétlődhet, minden választásnál n lehetőség van, k alkalommal, ezért ekkor $V_n^k = n^k$

Ha nem lehet ismétlődés, minden alkalommal eggyel kevesebb elemből választhatunk, 1. alkalommal n, 2. alkalommal n-1, 3. alkalommal n-2, k. alkalommal n-(k-1) lehetőség van.

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$$

Kombináció: n elemből k kiválasztása, nem tehetőek vissza, sorrend nem számít

K elemből $n!/(n-k)!$ variáció van, de mivel a sorrend nem számít, minden eset k!-szor szerepel, ezért ezzel még osztani kell.

$$C_n^k = n! / ((n-k)! \cdot k!) = \binom{n}{k}$$

Kombinatorikai tételek:

$$\text{Áll.: } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\text{Biz.: } n! / ((n-k)! \cdot k!) = n! / (k! \cdot (n-k)!)$$

$$\text{Áll.: } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Biz.: } & n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) / k! + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k) / (k+1)! = \\ & = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) / k! \cdot (1 + (n-k)/(k+1)) = \\ & = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) / k! \cdot (k+1+n-k)/(k+1) = \\ & = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) / (k! \cdot (k+1)) = \\ & = (n+1)! / ((k+1)! \cdot (n+1-(k+1))) = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Binomiális együtthatókkal kapcsolatos tételek:

1	n=0	együtthatók összege:	1
1 1	n=1		2
1 2 1	n=2		4
1 3 3 1	n=3		8
1 4 6 4 1	n=4		16

n. sor együtthatói:

$$(\binom{n}{0}) + (\binom{n}{1}) + (\binom{n}{2}) + \dots + (\binom{n}{n})$$

$$\text{Áll.: } (\binom{n}{0}) + (\binom{n}{1}) + (\binom{n}{2}) + \dots + (\binom{n}{n}) = 2^n$$

$$\begin{aligned} \text{Biz.: } (1+1)^n &= (\binom{n}{0}) \cdot 1^n + (\binom{n}{1}) \cdot 1^{n-1} \cdot 1 + (\binom{n}{2}) \cdot 1^{n-2} \cdot 1^2 + \dots + (\binom{n}{n}) \cdot 1^n \cdot 1^0 \\ &= 2^n = (\binom{n}{0}) + (\binom{n}{1}) + (\binom{n}{2}) + \dots + (\binom{n}{n}) \end{aligned}$$

$$\text{Áll.: } (0^n) - (1^n) + (2^n) - \dots + / - (n^n) = 0$$

$$\text{Biz.: } (1-1)^n = (0^n) * 1^n - (1^n) * 1^{n-1} * 1 + (2^n) * 1^{n-2} * 1^2 - \dots + / - (n^n) 1^{n-n} * 1^n$$

$$0 = (0^n) - (1^n) + (2^n) - \dots + / - (n^n)$$

Valószínűségszámítás

Fogalmak:

Esemény: egyértelmű a bekövetkezése, olyan állítás, amiről a kísérlet során egyértelműen eldönthető, hogy igaz-e. Jele: pl. A, B...

Elemi esemény: amiről egyértelműen eldönthető, hogy igaz-e (pl. fej dobása pénzzel).

Összetett esemény: ami több módon bekövetkezhet pl. kockával páros szám dobása (2; 4; 6).

Kísérlet: egy eseményt végrehajtunk, és megállapítjuk, hogy mi történt.

Eseménytér: a lehetséges események összessége (pl. 6 oldalú dobókockánál: 1; 2; 3; 4; 5; 6)

Relatív gyakoriság: kedvező kísérletek száma/összes kísérlet száma

Valószínűség: a relatív gyakoriság határértéke, $P(A) = k/n$ (kedvező lehetséges eset/összes lehetséges eset; kifejezheti szakaszok hosszának az aránya, területek aránya, stb. is)

Műveletek eseményekkel: (szemléltetés történhet kapcsolási rajzokkal)

—
A: akkor igaz, ha A nem igaz

0: lehetetlen esemény

I: biztos esemény

$A+B=C$ C akkor következik be, ha A vagy B következik

$A*B=C$ C akkor következik be, ha egyszerre A és B is következik

$A \setminus B = C$ C akkor következik be, ha csak A következik be

$A+B=B+A$

$A+(B+C)=(A+B)+C$

$A+0=A$

$A+A=A$

$A+I=I$

$A*B=B*A$

$A*(B*C)=A*B*C$

$A*A=A$

$A*I=A$

$A*0=0$

$A*C+B*C=C*(A+B)$

$A+B*C=(A+B)*(A+C)$

—
 $A+A=I$

—
 $A*A=0$

— — —
 $A+B=A*B$

Valószínűségszámítás axiómái:

- I. $0 \leq P(A) \leq 1$
- II. $P(\emptyset) = 0$
 $P(I) = 1$
- III. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Várható érték: $n = \sum_{i=1}^n P(X_i) \cdot X_i$

pl. ha n lehetőségből k db megfelelő, és a kiválasztás véletlenszerű, akkor a kiválasztott megfelelő esetek várható értéke, ha az összesen 1 megfelelő kiválasztásának az esélye $P(1)$, 2-é $P(2)$, ..., akkor $n = P(1) \cdot 1 + P(2) \cdot 2 + P(3) \cdot 3 \dots$

Felhasználás:

Fizikában (statisztikus fizika, atomfizika - pszi függvény), időjárásjelentés készítésében, tervezőmunkáknál (létesítmények szükséges kapacitása, közlekedési eszközök elhelyezése a várható forgalom alapján), gazdaságban (biztosítók-kockázat, bankok-kamatmeghatározás, tőzsdén-várható alakulás), játékokban (pl. kártya, szerepjátékok, szerencsejátékok)

25. Bizonyítási módszerek bemutatása számelméleti problémák megoldásában

1. „Direkt” Bizonyítások

- Ezen bizonyítások során általában ekvivalens átalakításokat alkalmazunk
- Definíció: Ekvivalens átalakításnak nevezünk egy átalakítást, ha az átalakítandó és az átalakított egyenletek alaphalmazai megegyeznek, valamint egyenlet esetén a gyökök ugyanazok.
- Axióma: olyan állítás, amelynek igazságát nem bizonyítjuk.
- Azonosság: Olyan egyenlet, melynek az értelmezési tartományában bármilyen számot helyettesítve az ismeretlen(ek) helyére, az egyenlőség mindig fennáll.
- Ellentmondás: Olyan egyenlet, melynek az értelmezési tartományában bármilyen számot helyettesítve az ismeretlen(ek) helyére, az egyenlőség sosem áll fenn.
- Tétel: Egy természetes szám, akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha a szám utolsó két számjegyből alkotott szám osztható 4-gyel.

Bizonyítás: Legyen $A = 100a + b$, ahol $b < 100$. Ekkor $100a$ osztható 4-gyel. Vagyis, ha b osztható 4-gyel, akkor A is osztható 4-gyel, mivel ha 2 szám osztható 4-gyel, akkor összegük is az. Ha viszont b nem osztható 4-gyel, akkor A sem osztható. A tétel megfordítása: ha osztható 4-gyel, akkor az utolsó 2 számjegyből alkotott szám is osztható. Ha egy 100-nál nagyobb szám osztható 4-gyel, akkor az ennél a számnál $4n$ -nel kisebb szám is osztható 4-gyel, vagyis b is.

Hasonlóan bizonyítható, hogy egy szám akkor

- Tétel: Egy természetes szám, akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha a szám számjegyeinek összege is osztható 3-mal.

Bizonyítás:

Legyen $A = a + 10b + 100c + 1000d + \dots$

$A = a + b + c + d + \dots + 9b + 99c + 999d + \dots$

Ebből $9b+99c+999d+\dots$ biztosan osztható 3-mal. Vagyis A akkor, és csak akkor osztható 3-mal, ha $a+b+c+d+\dots$ is osztható 3-mal. Ha tehát $a+b+c+d+\dots$ osztható 3-mal, és ehhez hozzáadunk egy 3-mal osztható számot, akkor a kapott A szám is 3-mal osztható lesz.

Hasonlóan bizonyítható, hogy egy szám 9-cel akkor és csak akkor osztható, ha a számjegyeinek összege is osztható 9-cel.

2. Indirekt bizonyítások

- Definíció: Indirekt bizonyításnak nevezzük azt a bizonyítási módszert, amelynek során feltesszük, hogy a bizonyítandó állítás ellentéte nem lehet igaz, vagyis a bizonyítandó állításnak igaznak kell lenni.
- Tétel: a gyök 2 irracionális szám.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy racionális. Ekkor felírható p/q alakban, ahol p és q egész, és p és q

relatív prímek.

Nézzük meg, hogy milyen hatványkitevőkön szerepel a 2, mint prímtényező az egyes oldalakon. Mivel a jobb oldalon négyzetszám van, ezért a jobb oldalon a 2-es biztosan

páros kitevőn szerepel. A bal oldalon q^2 -ben is páros hatványon szerepel, ezt

megszorozva kettővel viszont páratlan hatványon fog szerepelni. Vagyis a bal oldalon lévő szám prímfelbontásában a kettő páratlanszor fordul elő, a jobb oldali szám prímfelbontásában párosszor. Ezért a gyök kettő nem írható fel p/q alakban, vagyis nem lehet racionális, tehát irracionális.

3. Teljes indukció

- Definíció: Teljes indukciónak nevezzük azt a bizonyítási módszert, melynek során bizonyítjuk, hogy az állítás igaz abban az esetben, amennyiben n értéke az első néhány pozitív egész szám, majd fölteszük, hogy tetszőleges n -re is igaz, és belátjuk, hogy ekkor $n+1$ -re is igaz az állítás.

- Tétel: Az első n pozitív egész szám összege $n(n+1)/2$

$n=1$ -re: $1=1*2/2$ igaz

$n=2$ -re: $1+2=3$ és $2*3/2=3 \Rightarrow$ igaz

$n=3$ -ra: $1+2+3=6$ és $3*4/2=6 \Rightarrow$ igaz

Áll.: n -re is igaz, vagyis $S_n=n(n+1)/2$

Bizonyítandó: $S_{n+1}=(n+1)(n+2)/2$

$S_{n+1}=S_n+n+1$

És ezt kellett bizonyítani, vagyis az első n pozitív egész szám összege valóban $n(n+1)/2$.

Tétel: Az első n pozitív egész szám négyzetének összege $n(n+1)(2n+1)/6$

Biz.:

$$n=1 \quad 1=1*2*3/6 - \text{igaz}$$

$$n=2 \quad 1+4=2*3*5/6 - \text{igaz}$$

$$n=3 \quad 1+4+9=3*4*7/6 - \text{igaz}$$

Tegyük fel, hogy $S_n=n(n+1)(2n+1)/6$ igaz

$$\text{Állítás: } S_{n+1}=(n+1)(n+2)(2n+3)/6$$

Vagyis az állítás valóban igaz.

4. Skatulya elv: Ezen elv alkalmazása során létrehozunk néhány „skatulyát” (pl. a 3-as oszthatóság

maradékainak skatulyáit), majd bebizonyítjuk, hogy mivel a skatulyák számánál több elem van, ezért lesz olyan skatulya, amelybe egynél több elem kerül. Pl.: 4 természetes szám közül legalább 2-nek azonos a 3-as maradéka.

5. Diophantoszi egyenletek: Azon egyenletek, amelyekben az ismeretlenek csak egész számokat jelenthetnek.

6. Legnagyobb közös osztó: Két (v. több) pozitív egész szám legnagyobb közös osztóján azt a legnagyobb egész számot értjük, amellyel mindegyik szám osztható.

7. Legkisebb közös többszörös: Két (v. több) pozitív egész szám legkisebb közös többszörösén azt a legkisebb pozitív egész számot értjük, amelynek mindegyik szám osztója.

8. Definíció: Prímszámoknak nevezzük azokat a természetes számokat, amelyeknek két osztója van.

9. A számelmélet alaptétele: Bármely egynél nagyobb n természetes szám – a tényezők sorrendjétől eltekintve – egyértelműen felbontható prímtényezők szorzatára.

Bizonyítás: legyen n természetes szám.

Ha n prím, készen vagyunk.

Ha n nem prím, létezik p_1 prímosztója, amelyre $n=p_1 \cdot n_1$

Hasonlóan n_1 prím vagy nem prím. Ha nem prím, akkor létezik p_2 prímosztója, hogy $n_1=p_2 \cdot n_2$.

Ezt a módszert tovább folytatva maximum n lépéssel prímszámhoz jutunk. Így n -et előállítottuk prímszámok szorzataként.

Bizonyítandó még, hogy a felbontás egyértelmű. Tegyük fel, hogy létezik n -nek két, különböző prímfelbontása: $n=p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$. Ekkor amennyiben az indirekt állítás fennáll, az egyenlet baloldalán szereplő prímek egyike sem szerepel az egyenlet jobb oldalán. Ekkor p_1 osztja a bal oldalt és a jobb oldalt is, amiből a jobb oldal valamely tényezője osztható p_1 -gyel, ami csak $p_1=q_1$ esetén teljesülhet, így azonban ellentmondáshoz jutottunk, vagyis a két felbontás megegyezik, azaz a felbontás egyértelmű.

9. $n=p_1^a \cdot p_2^b \cdot \dots \cdot p_n^z$ osztóinak száma $(a+1) \cdot (b+1) \cdot \dots \cdot (z+1)$, ahol $a, b, \dots, z$ természetes számok, n

természetes szám, $p_1, p_2, \dots, p_n$ pedig prímek. Ez az állítás kombinatorikai módszerekkel bizonyítható.

IV. Gyakorlati alkalmazások

Gy.1.1. Szakaszok összemérhetősége

- a.) Két szakasz akkor és csak akkor összemérhető, ha a hosszaik aránya racionális szám.
- b.) A maradékos osztás szakaszokra is értelmezhető. Az erre épülő euklideszi algoritmus akkor és csak akkor fejeződik be véges sok lépésben, ha a két kiindulási szakasz összemérhető.
- c.) Összemérhető szakaszok esetén létezik a közös mértékeik között legnagyobb, és erre az összes közös mérték egész számszor fölmérhető (maradék nélkül).

Gy.2.1. Titkosírás. A titkos üzenetek rejtjelezésével foglalkozó kriptográfia az 1970-es években számelméleti eszközök felhasználásával ért el ugrásszerű fejlődést. Az eljárás alapja a „kis” Fermat-tétel egy következménye. (Ha egy tetszőleges p prímszám nem osztója az a egész számnak, akkor az a szám $(p-1)$ -edik hatványát p -vel osztva a maradék 1.)