

1. tétel: Halmazok, halmazműveletek

A) Halmazok

Halmaz, halmazhoz tartozás: alapfogalom (bizonyos tulajdonságok, pontok összessége)

Egy halmazt akkor tekintünk adottnak, ha minden dologról egyértelműen eldönthető, hogy eleme ennek a halmaznak vagy nem.

Jelölés: $A, B, H, \dots$ (nagybetűk)

Elemei: $a, b, c, \dots$ (kisbetűk)

$a \in A$: a az A halmaz eleme, $a \notin A$ a az A halmaznak nem eleme

Megadás:

- felsorolással: $A = \{1; 2; 3; 4\}$
- tulajdonsággal: $B = \{\text{négyszögek}\}$, $C = \{\text{pozitív egész számok 100-ig}\}$
- utasítással $S = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ és } x < 1000\}$
- speciális halmazoknak külön betűjel ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \emptyset$)
- ábrázolással (Venn-diagram)

Számosság: Egy halmaz *számossága* az elemeinek száma. Jele: $|A|$.

Egy halmaz számossága lehet véges, megszámlálhatóan végtelen és nem megszámlálhatóan végtelen.

Két halmaz számossága egyenlő, ha létezik a két halmaz közt bijektív függvény.

Részhalmaz:

A halmaz *részhalmaza* B halmaznak, ha A halmaz minden eleme eleme a B halmaznak is. Jele: $A \subseteq B$

A *valódi részhalmaza* B -nek, ha B -nek van A -n kívüli eleme is, jele: $A \subset B$

Egyenlőség:

Két halmaz *egyenlő*, ha elemeik megegyeznek. ($A \subseteq B$ és $B \subseteq A$)

Üreshalmaz: $\emptyset = \{ \}$, olyan halmaz, melynek nincs eleme.

Tétel: Minden halmaznak részhalmaza az üreshalmaz, és önmaga.

B) Halmazműveletek

Unió: Két halmaz uniója azon elemek halmaza, melyek legalább az egyik halmaznak elemei. Jele: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$

Metszet: Két halmaz metszete azon elemek halmaza, melyek mindkét halmaz elemei. Jele: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$.

Két halmaz diszjunkt, ha metszetük üres, azaz $A \cap B = \emptyset$.

Különbség: A és B halmaz különbsége azon elemek halmaza, melyek elemei A-nak, de nem elemei B-nek. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$

Direkt szorzat: (avagy másnéven Descartes-szorzat)

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ és } y \in B\} \text{ (Rendezett párok halmaza, pl. } \mathbb{R}^2)$$

Komplementer: Egy A halmaz komplementerhalmaza az alaphalmaz (H) azon elemeiből áll, amelyek az A halmaznak nem elemei. Jele: $\overline{A} = H \setminus A$

Szimmetrikus differencia: Két halmaz szimmetrikus differenciája azon elemek halmaza, melyek csak az egyik halmaznak elemei. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Műveleti tulajdonságok:

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ kommutatív (felcserélhető)
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ asszociatív (csoportosítható)
3. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
4. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
disztributív (szétagolható)
5. $A \setminus A = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$
6. $A \cup \overline{A} = H$
7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ illetve $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ De Morgan-azonosságok
8. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ szita formula
 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Ezeket Venn-diagram alapján lehet bizonyítani.

Tétel: Bármely n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Bizonyítás: Teljes indukcióval:

0-ra, 1-re, 2-re igaz a tétel:

n=0	$\{\}$	$1=2^0$
n=1	$\{\}, \{a\}$	$2=2^1$
n=2	$\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a;b\}$	$4=2^2$

Indukciós lépés:

Tfh: $n=k$ -ra igaz az állítás: azaz egy k elemű halmaznak 2^k db részhalmaza van.

Bizonyítani kell, hogy az $k+1$ elemű halmaznak 2^{k+1} db részhalmaza van.

A $k+1$ elemből vegyünk ki egy elemet, ekkor egy k elemű halmazt hozunk létre. Ennek az indukciós feltétel szerint 2^k részhalmaza van. Ha minden részhalmazba beletesszük a kivett elemet, újabb 2^k részhalmazt kapunk. Ekkor az $k+1$ elemű halmaz összes részhalmazát összeszámoltuk, mivel két eset lehetséges: a kivett elem szerepel egy részhalmazban, vagy nem. Tehát az $k+1$ elemű halmaznak összesen $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ db részhalmaza van.

További lehetséges bizonyítások:

1. Minden elemről szabadon eldönthetjük, hogy beletartozik-e a részhalmazba, vagy sem. Összesen annyi részhalmaza lesz, ahányféleképp ezt a választást létrehozhatjuk. Mivel mind az n elemnél kétféleképp dönthetünk, összesen 2^n lehetőség, így részhalmaz van.
2. Binomiális tétel alapján, a két tag helyére egyet helyettesítve.

C) Ponthalmazok (lásd harmadik tétel)

Szokásos megadási módja: utasítással, pl. $A = \{(x; y) \mid x + y < 1 \text{ és } x; y \in \mathbb{R}\}$

D) Természetes számokkal kapcsolatos problémák:

Leginkább a halmazműveletekhez van köze.

Például:

- a) Hány olyan 100-nál nem nagyobb természetes szám van, amely osztható 3- mal vagy 5-tel?
- b) Hány olyan 100-nál nem nagyobb természetes szám van, amely nem osztható 2-vel és 7-tel?
- c) Milyen számok azok, amelyek oszthatóak 2-vel és 3-mal?
- d) Milyen számok azok, amelyek oszthatóak 6-tal és 15-tel?
- e) Mi az oszthatósági szabály a 24-gyel való oszthatóságra?

E) Alkalmazások

Matematikai:

- számhalmazok, egyenletek alap- és megoldáshalmaza, intervallumok
- É.T., É.K. a függvényeknél
- pontthalmazok (+tételeik), négyszögek csoportosítása
- mértékekkel kapcsolatos problémák (terület, térfogat vagy valószínűség számolás)
- kombinatorika: permutáció, kombináció, variáció
- (egy halmaz elemeinek kiválasztása, sorbarendeze)
- kedvező események halmaza, összes esemény halmaza, eseményalgebra
- egy halmaz elemeinek átlaga, módusza, mediánja, szórása
- logikai fogalmak és műveleteik párbaállíthatóak a halmazokkal

Gyakorlati élet:

Informatika: minden adattárolás halmazokkal dolgozik (pl. emberek halmaza, adathalmazok)

Kereskedelem: áruhalmaz-árhalmaz, leltározás, vonalkódos rendszer figyeli az áruhalmaz elemszámát

Iskola: osztályok, csoportok különféle tulajdonság alapján

Biológia: rendszertan