

3. tétel: Nevezetes ponthalmazok síkban és térben

Ponthalmazok:

Sík vagy tér részhalmazai, általában utasításokkal adjuk meg:

$$A = \{ P(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1 \} \quad \text{vagy} \quad B = \{ P \in \mathbb{R}^3 \mid PO = r, r > 0 \}$$

Nevezetes ponthalmazok:

1. Két pont szakaszfelező merőlegese (a síkon)

Olyan egyenes, mely merőlegesen felezi a két pontot összekötő szakaszt.

Tétel:

A szakaszfelező merőleges azon pontok halmaza a síkon, melyek a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak.

Biz.:

Ez két állítást jelent:

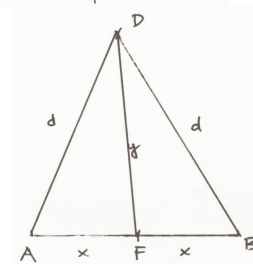
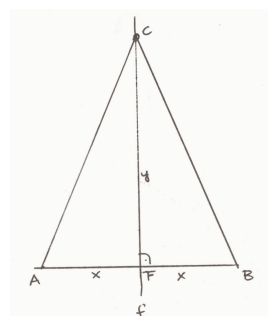
1. A szakaszfelező merőleges minden pontja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Legyen a szakaszfelező merőleges tetszőleges pontja C.

Ekkor $AF = BF$ (F felezőpont), $\angle AFC = \angle BFC = 90^\circ$ és CF közös oldala $\triangle AFC$ -nek illetve $\triangle BFC$ -nek, így a két

háromszög egybevágó. Tehát $CA = CB$.

2. Minden ilyen tulajd-ú pont a szakaszfelező merőlegesen van.
Legyen egy D pont olyan tulajdonságú a síkon, hogy $DA = DB$.
Kössük össze D pontot AB szakasz F felezőpontjával. Ekkor az $\triangle AFD$ és a $\triangle BFD$ egybevágó, mert minden oldaluk megegyezik. Így $\angle AFD = \angle BFD$ és együtt egyenesszöveget alkotnak, tehát mindkettő 90° és így DF merőleges AB-re.



2. Szögfelező(k)

Olyan egyenes, melyek egy adott szög nagyságát felezi.

Egy szögnek külső és belső szögfelezője is van.

Tétel:

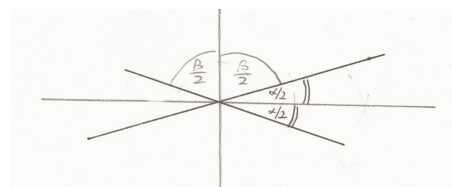
A külső és belső szögfelezők merőlegesek egymásra.

Biz.: mivel $\alpha + \beta = 180^\circ$, ezért $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$.

Tétel:

A szögfelező egyenes(ek) azon pontok halmaza a síkon, melyek a szög két szárától egyenlő távolságra vannak.

Biz.: egybevágósági alapesetekkel, mint a szakaszfelező merőlegesnél.



3. Kör

Azon pontok halmaza a síkon, melyek egy adott ponttól (középpont), adott egyenlő távolságra (sugár) vannak.

$$\text{kör} = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid PO = r; r > 0 \}$$

$$\text{zárt körlap} = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid PO \leq r; r > 0 \} \quad \text{nyílt körlap} = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid PO < r; r > 0 \}$$

4. Ellipszis

Azon pontok halmaza a síkon, melyeknek két adott ponttól (fókuszpontok) mért távolságösszege (a két fókuszpont távolságánál nagyobb) állandó.

$$\text{ellipszis} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid PF_1 + PF_2 = d; d > F_1F_2\}$$

Szerkeszteni csak pontjait lehet (rajzolni célnával és két rajzszöggel):

fölvéve d -t, tetszőleges módon két részre bontva, és a két résszel a fókuszpontokból körívezve a körívek metszéspontjaiként az ellipszis pontjait kapjuk

Az ellipszis középpontja (O) a szimmetriacentrum.

Az ellipszis tengelyesen szimmetrikus alakzat,

- egyik szimmetriatengelye a fókuszpontokon átmenő egyenes (ennek az ellipszisbe eső része az ellipszis nagytengelye $2a$, ez épp a d szakasz)
- a másik szimmetriatengelye a fókuszpontok felezőmerőlegese (ennek az ellipszisbe eső része az ellipszis kistengelye $2b$)

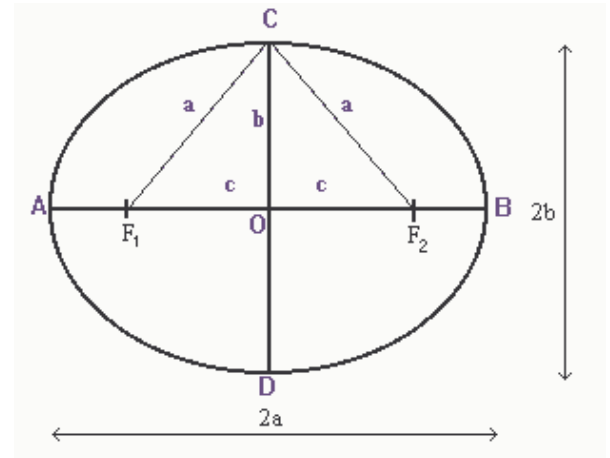
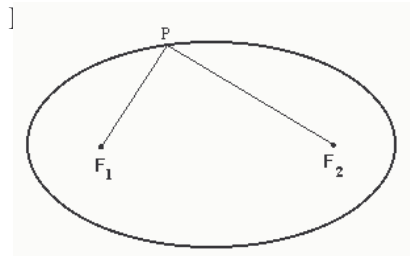
A fókuszpontok távolsága a lineáris excentricitás, ezt $2c$ -vel jelöljük.

Ezen három szakasz közt érvényes:

$$c^2 + b^2 = a^2$$

Az ellipszis egyenlete, ha adott középpontja $O(u; v)$, kis- ($2b$) és nagytengelye ($2a$)

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{és persze a tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel})$$



5. Hiperbola

Azon pontok halmaza a síkon, melyeknek két adott ponttól (fókuszpontok) mért távolságkülönbsége (a két fókuszpont távolságánál kisebb) állandó.

$$\text{hiperbola} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |PF_1 - PF_2| = d; d < F_1F_2\}$$

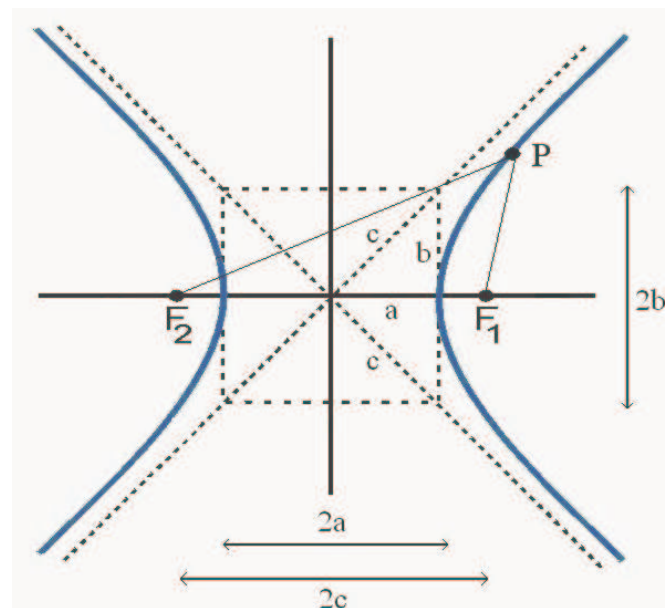
Szerkeszteni csak pontjait lehet:

fölvéve d -t és tetszőleges módon meghosszabbítva, és a ráért, illetve a teljes résszel körívezve a fókuszpontokból a körívek metszéspontjaiként a hiperbola pontjait kapjuk.

A hiperbola tengelyesen szimmetrikus alakzat:

- egyik szimmetriatengelye a fókuszpontokon átmenő egyenes (ennek a hiperbolába eső része a hiperbola valós tengelye: $2a$)
- a másik szimmetriatengelye a fókuszpontok felezőmerőlegese (ennek az ábrán jelölt része a képzetes tengely: $2b$)

A fókuszpontok távolságát $2c$ -vel jelöljük.



A képzetes tengely felét, b -t megkaphatjuk az alábbi összefüggésből:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

A hiperbola görbéje egyenesekhez simul, ezek az aszimptoták.

A hiperbola egyenlete, ha adott kp-ja $O(u; v)$, valós $(2a)$ és képzetes tengelye $(2b)$

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1, \text{ az aszimptoták meredeksége pedig } m = \pm \frac{b}{a}$$

(természetesen ha a hiperbola valós tengelye párhuzamos az x tengellyel)

6. A parabola

Azon pontok halmaza a síkon, melyek egy adott egyenestől (vezéregyenes) és egy adott, rajta nem lévő ponttól (fókuszpont) egyenlő távolságra vannak.

$$\text{parabola} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P; F) = d(P; v)\}$$

Szerkeszteni csak pontjait lehet:

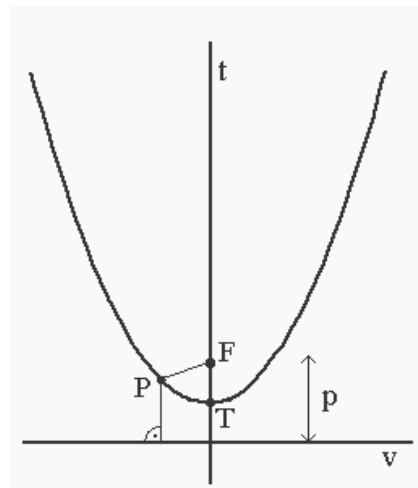
a tetszőleges távolságban a vezéregyenessel húzott párhuzamos és a fókuszpontból ugyanekkora távolsággal húzott körív metszéspontjaiként a parabola pontjait kapjuk.

A fókuszpont és a vezéregyenes távolsága a parabola paramétere (p).

A parabola tengelyesen szimmetrikus alakzat, tengelye a fókuszponton áthaladó, vezéregyenesre merőleges egyenes. Ennek metszéspontja a parabolával a parabola tengelypontja (T).

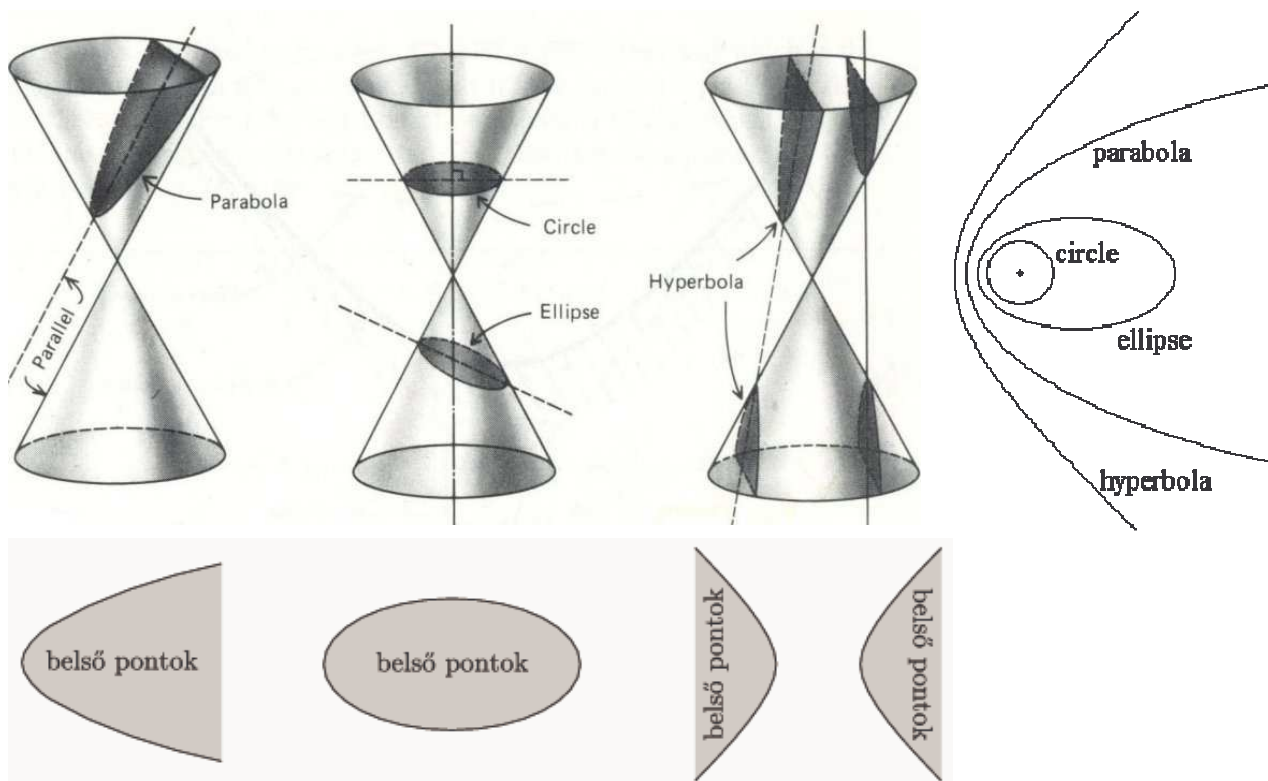
A koordinátasíkon egy függőleges tengelyű, $T(u; v)$ tengelypontú, p paraméterű parabola egyenlete:

$$\text{fókuszpont: } F\left(u; v + \frac{p}{2}\right), \text{ vezéregyenes: } v: y = v - \frac{p}{2}, \text{ parabola: } y - v = \frac{1}{2p} \cdot (x - u)^2$$



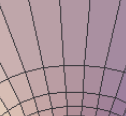
7. Kúpszeletek:

Az előbbi három síkgörbe megkapható a forgáskúp megfelelő síkmetszeteiként is:



-

A dome-shaped structure, likely a dome antenna, composed of many small, colored segments arranged in a grid pattern. The segments are colored in shades of blue, purple, and orange, suggesting a color gradient or different material properties. The dome is shown from a perspective view, highlighting its curved surface and the grid of segments.



9. **Gömb**
Azon pontok halmaza a térben, melyek egy adott ponttól (középpont), adott egyenlő távolságra (sugár) vannak.
$$\text{gömb} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid PO = r; r > 0\}$$
$$\text{zárt gömbtest} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid PO \leq r; r > 0\} \quad \text{nyílt gömbtest} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid PO < r; r > 0\}$$
10. **Henger**
Azon pontok halmaza a térben, melyek egy adott szakasztól adott egyenlő távolságra vannak. Tehát: $\text{henger} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid d(P; t) = r; r > 0\}$
11. **Szakaszfelező sík:**
Két adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben.
12. **Szögfelező sík(ok)**
Két adott, metsző síktól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben.
13. **Alkalmazások:**
 - parabolatükör, antenna
 - hajítás pályája parabola
 - Kepler-törvények
 - műhold és rakéta pályák (ellipszis, hiperbola)
 - hangrobbanást a talaj szintjén hiperbola alakban lehet észlelni (kúpszelet)
 - forgó folyadékfelszín alakja forgásparaboloid
 - sík- és téreometriai feladatokban alkalmazhatóak
 - függvények ábrázolása (egy- és kétváltozós)

- hulláminterferencia erősítési és gyengítési pontjai hiperbolát alkotnak