

**4. tétel:****Hatványozás, a hatványfogalom kiterjesztése, azonosságok****Hatványozás értelmezése pozitív egész kitevőkre:****Definíció:**

$a \in \mathbb{R}$  és  $n \in \mathbb{N}^+$  esetén  $a^n$  olyan  $n$  tényezős szorzat, amelynek minden tényezője  $a$ .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ tényezős szorzat}}$$

$a$  : *hatványalap*,  $n$  : *kitevő*,  $a^n$  a hatványmennyiség, vagy röviden *hatvány*.

Legyen továbbá:  $a^1 = a$

**Tételek: A hatványozás azonosságai**

1. Azonos alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{ahol } a \in \mathbb{R} \text{ és } n, m \in \mathbb{N}^+$$

Bizonyítás:  $a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ db tényező}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ db tényező}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n+m \text{ db tényező}} = a^{n+m}$

↑  
hatvány definíciója                      szorzás asszociativitása                      hatvány definíciója

2. Azonos alapú hatványokat úgy osztunk, hogy az alapot a kitevők különbségére emeljük.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{ahol } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad n, m \in \mathbb{N}^+ \quad n > m$$

Bizonyítás:  $\frac{a^n}{a^m} = \frac{\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ db tényező}}}{\underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ db tényező}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n-m \text{ db tényező}} = a^{n-m}$

↑  
hatvány definíciója                      egyszerűsítés                      hatvány definíciója

3. Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad \text{ahol } a \in \mathbb{R} \text{ és } n, m \in \mathbb{N}^+$$

Bizonyítás:  $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}_{m \text{ db tényező}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ db tényező}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ db tényező}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ db tényező}} = a^{n \cdot m}$

↑  
hatvány definíciója                      hatvány def.                      szorzás asszociativitása                      hatvány def.

4. Szorzatot úgy hatványozunk, hogy a tényezők hatványait összeszorozzuk.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \text{ahol } a, b \in \mathbb{R} \text{ és } n \in \mathbb{N}^+$$

Bizonyítás:  $(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ db tényező}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ db tényező}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{n \text{ db tényező}} = a^n \cdot b^n$

↑  
hatvány definíciója                      szorzás asszociativitása és kommutativitása                      hatvány definíciója

5. Törtet úgy hatványozunk, hogy a számláló hatványát osztjuk a nevező hatványával.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{ahol } a, b \in \mathbb{R} \text{ és } n \in \mathbb{N}^+ \quad b \neq 0$$

Bizonyítás:  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ db tényező}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ db tényező}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ db tényező}}} = \frac{a^n}{b^n}$

$\uparrow$  hatvány definíciója       $\uparrow$  törtek szorzása       $\uparrow$  hatvány definíciója

### A hatványozás értelmezésének kiterjesztése egész illetve racionális kitevőkre:

A hatványozás értelmezését úgy terjesztjük ki a pozitív egész kitevőkről újabb kitevőkre, hogy a hatványozás addig érvényben lévő azonosságai a kiterjesztés után is igazak legyenek. (Ezt a nevezik *permanencia-elvnek*.)

#### Definíció:

Minden szám (kivéve a 0) 0-dik hatványa 1. Azaz:  $a^0 = 1 \quad a \neq 0$ ,  $0^0$  nincs értelmezve!

A permanencia elv alapján ugyanis például:  $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$ .

#### Definíció: Negatív egész kitevőjű hatvány értelmezése:

Egy nemnulla valós szám negatív egész kitevőjű hatványa a szám ellentett kitevőjű hatványának reciproka.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0$$

A permanencia elv alapján ugyanis:  $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$

Bebizonyítható, hogy a hatványozás azonosságai az így definiált nulla és negatív egész kitevőkre is érvényben maradnak.

#### Definíció: Racionális kitevőjű hatvány értelmezése:

Egy pozitív valós szám  $\frac{n}{m}$ -edik hatványa ( $n, m \in \mathbb{Z}$  és  $m > 0$ ) a szám  $n$ -edik

hatványának  $m$ -edik gyöke. Azaz:  $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ .

A permanencia elv alapján ugyanis:  $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^{\frac{n}{m} \cdot m} = a^n = \left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m$

Az  $a > 0$  feltétel szükséges az egyértelmű művelethez, azaz: így  $a^{\frac{nk}{mk}} = a^{\frac{n}{m}}$  ( $n, m, k \in \mathbb{Z}$  és  $k > 0$  esetén).

Bebizonyítható, hogy ezzel az értelmezéssel a hatványozás azonosságai érvényben maradnak racionális kitevőkre is.

**A hatványozás értelmezésének kiterjesztése irracionális kitevőkre:**

**Definíció:** Irracionális kitevőjű hatvány értelmezése kétoldali közelítéssel.

Minden irracionális szám közelíthető alulról és felülről egy-egy racionális számokat tartalmazó monoton sorozattal:

$$0 < b_n < q < c_n \quad \text{ahol } b_n, c_n \in \mathbb{Q} \text{ és } b_n \rightarrow q \text{ és } c_n \rightarrow q$$

Ekkor szeretnénk, ha  $a^{b_n} < a^q < a^{c_n}$  is teljesülne.  $a > 0$

(Így majd az exponenciális függvény monoton marad.)

Mivel  $b_n$  és  $c_n$  sorozatok monotonak, ezért  $a^{b_n}$  és  $a^{c_n}$  is monoton. Így  $[a^{b_n}; a^{c_n}]$  által meghatározott zárt intervallumok egymásba skatulyázottak, így a Cantor-axióma miatt van ezeknek metszete, ami szükségképpen egyelemű,  $a^q$  pedig legyen ez a közös elem. Ezzel a definícióval biztosítottuk az exponenciális függvény monotonitását.

Bebizonyítható, hogy ezzel az értelmezéssel a hatványozás azonosságai érvényben maradnak irracionális kitevőkre is.

Az így kapott  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = a^x$  függvény a monotonitás mellett még folytonos is.

**Megjegyzés:** a hatványozás kiterjeszthető komplex kitevőkre is.

**Alkalmazások:**

- egyenletmegoldások (grafikus, algebrai)
- polinomokkal végzett műveletek
- számok normálalakja
- számrendszerek
- nevezetes azonosságok, binomiális tétel
- terület és térfogatképletek
- ismétléses variáció képlete
- binomiális eloszlás
- mértani sorozatok, kamatos kamat számítás
- függvénytábla használata (logaritmussal való számítások)
- mértékegységek közötti átváltás
- Euler sírján:  $e^{i\pi} = -1$  (a hatványozás kiterjesztése komplex számokra)
- biológia: osztódással szaporodó egyedek számának meghatározása