

5. tétel: Gyökvonás, gyökfüggvények és tulajdonságaik

Az n-edik gyök:

A valós számok n -edik gyökét, ahol $n \geq 1$ és $n \in \mathbb{Z}$, páros és páratlan „ n ” esetén külön értelmezzük:

Páros gyökkitevő – n páros:

Egy nemnegatív szám n -edik gyöke az a nemnegatív szám, melynek n -edik hatványa az eredeti szám: Tehát: $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ahol $a \geq 0$ és $\sqrt[n]{a} \geq 0$

Páratlan gyökkitevő – n páratlan:

Egy valós szám n -edik gyöke az a valós szám, melynek n -edik hatványa az eredeti szám. Tehát: $(\sqrt[n]{a})^n = a$ a -ra és $\sqrt[n]{a}$ -ra megkötés nincs

Tételek:

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$ közvetlenül a definícióból

2. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ |a| & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$

3. Szorzat n -edik gyöke a tényezők n -edik gyökeinek szorzata.

Azaz: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ahol $a, b \geq 0$

Bizonyítás: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad /(\dots)^n$

$$\begin{array}{lll} n\text{-edik gyök def.} \downarrow & (\sqrt[n]{ab})^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n & \downarrow \text{szorzat hatványa} \\ & (\sqrt[n]{ab})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n & \downarrow n\text{-edik gyök def.} \\ & a \cdot b = a \cdot b & \end{array}$$

A kikötések miatt ekvivalens átalakításokat végeztünk.

4. Tört n -edik gyöke a számláló és a nevező n -edik gyökének hányadosa.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{ahol } a \geq 0 \text{ és } b > 0$$

Bizonyítás: ugyanúgy, mint a szorzatnál.

5. Hatvány n -edik gyöke az alap n -edik gyökének megfelelő hatványával egyenlő.

$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k \quad \text{ahol } a > 0; n, k \in \mathbb{Z}, n \geq 2$$

Bizonyítás:

$$\begin{array}{ccccccc} 1. \text{ eset: } k > 0 & \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot \dots \cdot a} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{a})^k \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{hatványozás} & & \text{szorzat } n\text{-edik} & & \text{hatványozás} & \\ & \text{def.} & & \text{gyöke} & & \text{def. (k tényező)} & \end{array}$$

$$2. \text{ eset: } k = 0 \quad \sqrt[n]{a^0} = \sqrt[n]{1} = 1 = (\sqrt[n]{a})^0$$

3. eset: $k < 0$ legyen ekkor $k = -j$, így $j > 0$

$$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^{-j}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^j}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^j}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^j} = (\sqrt[n]{a})^{-j} = (\sqrt[n]{a})^k$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 neg. tört 1. eset neg.
 kitevő gyöke kitevő

6. Egy szám n -edik gyökének k -adik gyöke egyenlő a szám $n \cdot k$ -adik gyökével.

Tehát: $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$ ahol $n, k \geq 2$; $n, k \in \mathbb{N}$ $a \geq 0$

Bizonyítás: $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a} \quad /(\dots)^k$

k -adik gyök def. $\downarrow \quad \left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^k = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$

$\sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k \quad /(\dots)^n$

n -edik gyök def. $\downarrow \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right]^n \quad \downarrow \text{hatvány hatványa}$

$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk} \quad \downarrow n \cdot k \text{-adik gyök def.}$

$a = a$

A kikötések miatt ekvivalens átalakításokat végeztünk.

7. Az előző tétel alapján: $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n \cdot m]{a^{nk}}$ a gyökkitevő bővíthető/egyszerűsíthető.
(kikötések persze vannak: $a > 0$; $k \in \mathbb{Z}$; $n, m \in \mathbb{N}$)

Műveletek: - kivitel / behozatal: $\sqrt[5]{2^8 \cdot 3^6} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \cdot 3} = 6 \cdot \sqrt[5]{2^3 \cdot 3} = 6 \cdot \sqrt[5]{24}$

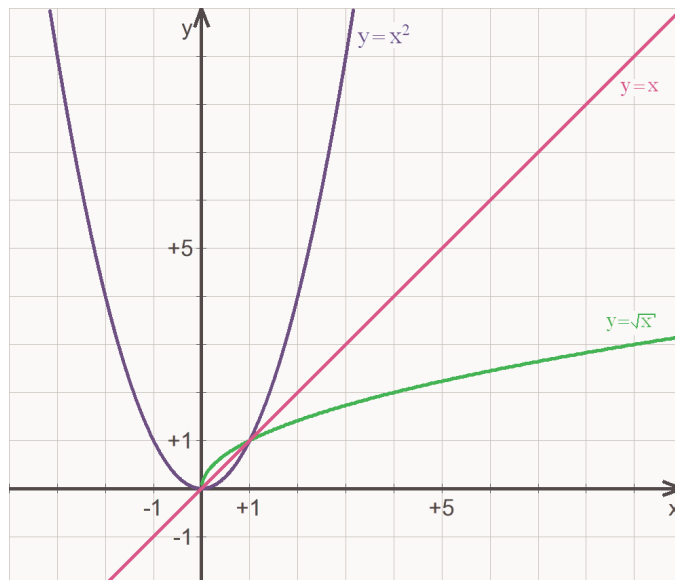
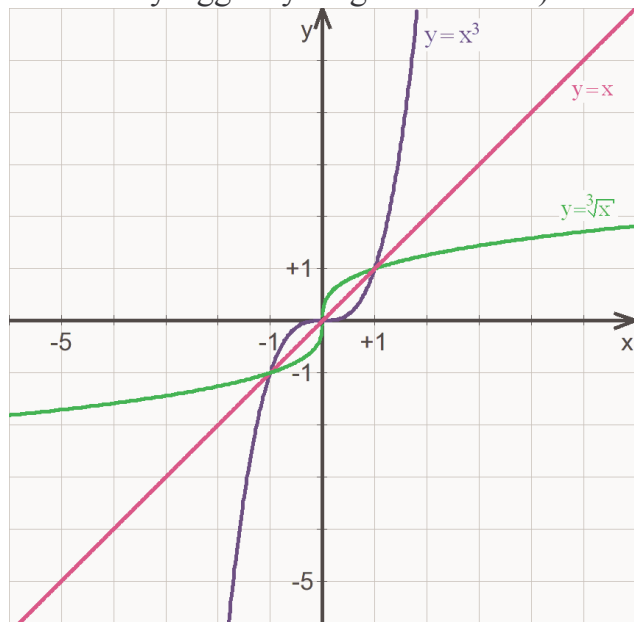
- közös gyökkitevő: $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{3^2 \cdot 2^3} = \sqrt[6]{72}$

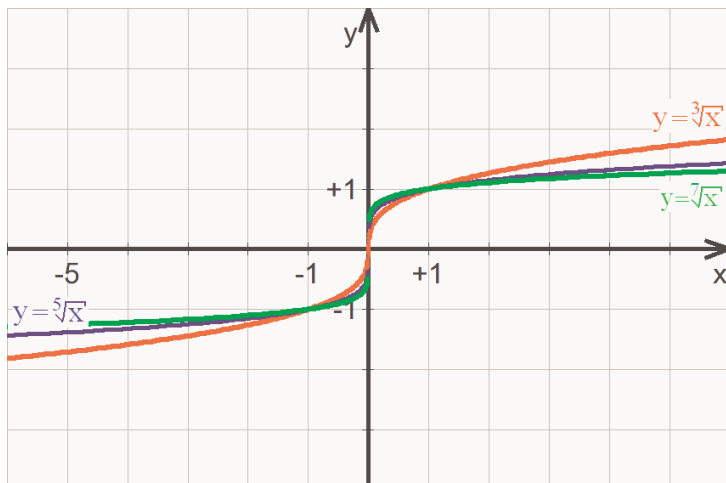
- gyöktelenítés

Gyökfüggvények:

$f(x) = \sqrt[n]{x}$, ahol $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$

A gyökfüggvények a gyökkitevőnek megfelelő hatványfüggvények (páros kitevő esetén a hatványfüggvény megszorításának) az inverzei.





páratlan gyökkitevő

$$f(x) = \sqrt[k]{x} \quad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}^+$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

szig. mon. nő

szélsőértéke nincs

zérushelye $x=0$ -ban

$x \in (-\infty; 0)$ konvex

$x \in (0; \infty)$ konkáv

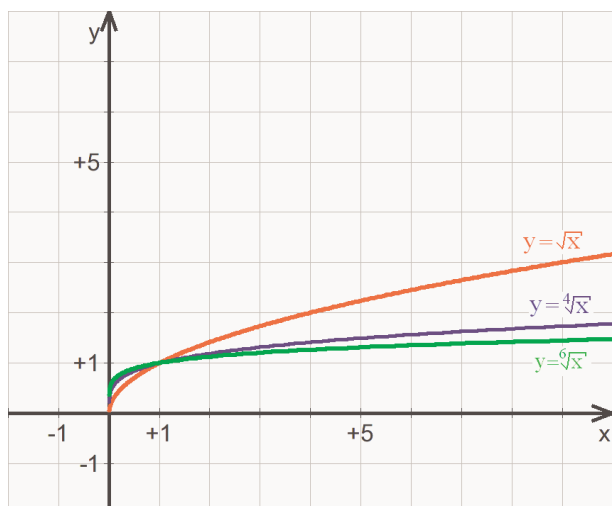
inflexiós pontja $x=0$

páratlan

nem korlátos

határértékei:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[k]{x} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x} = \infty$$



páros gyökkitevő

$$g(x) = \sqrt[k]{x} \quad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}^+$$

$$D_g = [0; \infty) = \mathbb{R}_0^+$$

$$R_g = [0; \infty) = \mathbb{R}_0^+$$

szig. mon. nő

szélsőértéke $x=0$ -ban minimum

zérushelye $x=0$ -ban

konkáv

inflexiós pontja nincs

nem páros, nem páratlan

alsó korlátja a 0

határértékei:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[k]{x} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x} = \infty$$

Alkalmazások:

- Matematikán belül:

- magasabb rendű egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldásához
- mértani közép, és a kapcsolódó tételek: pl. magasságtétel, befogótétel
- másodfokú egyenlet megoldóképlete
- nevező gyöktelenítése
- mértani sorozatok, kamat meghatározása
- szórás kiszámítása (statisztika)

- Matematikán kívül:

- út, idő, gravitációs gyorsulás meghatározásához;
- inga lengésidejének meghatározásához
- zene: kis szekund: egy oktáv 12 egyenlő részre hangközre osztása, frekvencia $\sqrt[12]{2}$ -szeresére változik kis szekundonként