6. tétel:
A logaritmus, az exponenciális és logaritmusfüggvény és tulajdonságaik

A hatványozás kiterjesztése:

a) Törtkitevőjű hatványok

Egy pozitív valós szám $\frac{n}{k}$-adik hatványa ahol $n \in Z, k \in N^+$ a szám *n*-edik hatványának *k*-adik gyöke. Azaz: $a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}$ kikötés: $a > 0$

Ezzel a definícióval az összes egész kitevőjű hatványra vonatkozó tétel igaz marad törtkitevőjű hatványokra is. (Azaz működik a permanencia elv.)

b) Irracionális kitevőre (kétoldali közelítéssel)

Minden irracionális szám közelíthető alulról és felülről egy-egy racionális számokat tartalmazó monoton sorozattal:

$$0 < b_n < q < c_n \qquad \text{ahol } b_n, c_n \in Q \text{ és } b_n \to q \text{ és } c_n \to q$$

Ekkor szeretnénk, ha $a^{b_n} < a^q < a^{c_n}$ is teljesülne. (Így majd az exponenciális függvény monoton marad.)

Mivel a b_n és c_n monotonak, ezért a^{b_n} és a^{c_n} is monoton. Így $\left[a^{b_n}\ ;\ a^{c_n}\right]$ által meghatározott zárt intervallumok egymásba skatulyázottak, így a Cantor-axióma miatt van ezeknek metszete, ami szükségképpen egyelemű, a^q pedig legyen ez a közös elem. Ezzel a definícióval biztosítottuk az exponenciális függvény monotonitását.

Tétel: az így kapott $f: R \to R \quad f(x) = a^x \quad a > 0$ függvény a monotonitás mellett még folytonos is. (Dejó!)

Definíció: *a* alapú *logaritmus b* az a kitevő, melyre *a*-t emelve *b*-t kapunk.

Jele: $\log_a b$ Kikötések: $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$ (Így létezik $\log_a b$.)

Azaz: $\log_a b = x \iff a^x = b$, illetve röviden: $a^{\log_a b} = b$

Különleges alapok: $\log_{10} x = \lg x$ illetve $\log_e x = \ln x$

A logaritmus azonosságai:

a) Szorzat logaritmusa

Szorzat logaritmusa egyenlő a tényezők logaritmusainak összegével.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ x, y > 0$$

Biz.:

$x = a^{\log_a x} \qquad y = a^{\log_a y} \qquad x \cdot y = a^{\log_a(x \cdot y)}$ a definíció alapján

$a^{\log_a(x \cdot y)} = x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$

azonos alapú hatványok szorzata miatt

mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton $(a \neq 1)$, ezért

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

b) Tört logaritmusa

Tört logaritmusa egyenlő a számláló és nevező logaritmusának különbségével.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ x, y > 0$$

Biz.:

$$x = a^{\log_a x} \qquad y = a^{\log_a y} \qquad \frac{x}{y} = a^{\log_a \frac{x}{y}} \qquad \text{a definíció alapján}$$

$$a^{\log_a \frac{x}{y}} = \frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$$

azonos alapú hatványok hányadosa miatt

mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton $(a \neq 1)$, ezért

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

c) Hatvány logaritmusa

Hatvány logaritmusa egyenlő a hatványalap logaritmusa és a kitevő szorzatával.

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0 \quad \text{és } k \in R$$

Biz.:

$$x = a^{\log_a x} \qquad x^k = a^{\log_a \left(x^k\right)} \qquad \text{a definíció alapján}$$

$$a^{\log_a \left(x^k\right)} = x^k = \left(a^{\log_a x}\right)^k = a^{k \cdot \log_a x} \qquad \text{hatvány hatványa miatt}$$

mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton $(a \neq 1)$, ezért

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

d) Gyök logaritmusa

Gyök logaritmusa egyenlő a gyökalap logaritmusának és a gyökkitevőnek a hányadosával.

$$\log_a \sqrt[k]{x} = \frac{\log_a x}{k} \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0 \quad \text{és} \quad k \in Z^+ \quad k > 1$$

Biz.: hatvány logaritmusa alapján:

$$\log_a \sqrt[k]{x} = \log_a x^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \cdot \log_a x = \frac{\log_a x}{k}$$

e) Áttérés más alapra:

Egy szám új alapú logaritmusát megkapjuk, ha a szám régi alapú logaritmusát elosztjuk az új alap régi alapú logaritmusával.

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad a > 0,\ a \neq 1, b > 0,\ b \neq 1 \quad \text{ééés } x > 0$$

Biz.: $x = a^{\log_a x}$ vegyük mindkét oldal b alapú logaritmusát

$\log_b x = \log_b a^{\log_a x}$ (hiszen mindkét oldal pozitív)

$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$ használva a hatvány logaritmusa tételét

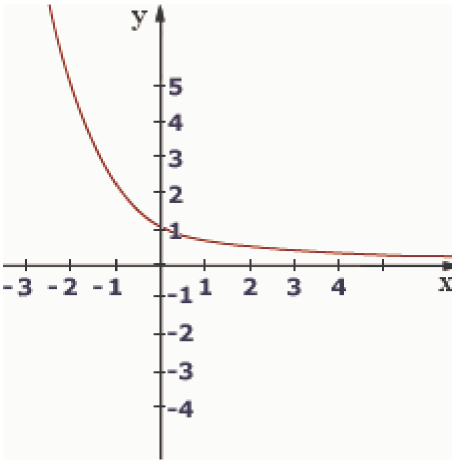
$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ elosztva $\log_b a$ -val ($\log_b a \neq 0$ mert $a \neq 1$)

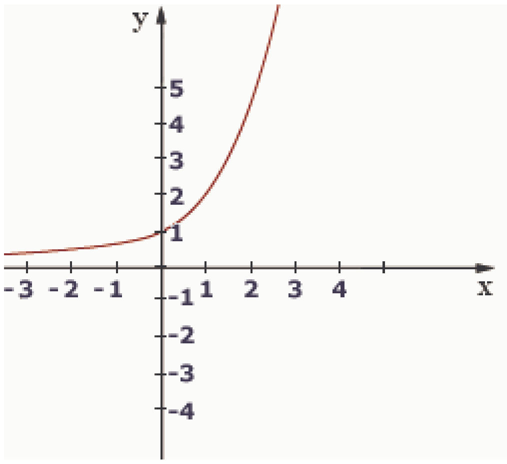
Az exponenciális függvény:

$f: R \to R \quad f(x) = a^x$ ahol $a > 0, \ a \neq 1$ valós szám (exponens = kitevő)

két alapvetően különböző exponenciális függvényt különböztethetünk meg

$0 < a < 1$ $a > 1$





$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$D_f = R$

$R_f = (0;\infty) = R^+$

szigorúan monoton csökkenő
szélsőértéke nincs
zérushelye nincs
szigorúan konvex
inflexiós pontja nincs
nem páros, nem páratlan
alsó korlátja a 0
határértékei:

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$ és $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$

$g(x) = 2^x$

$D_g = R$

$R_g = (0;\infty) = R^+$

szigorúan monoton növekedő
szélsőértéke nincs
zérushelye nincs
szigorúan konvex
inflexiós pontja nincs
nem páros, nem páratlan
alsó korlátja a 0
határértékei:

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ és $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$

$f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ és $g(x) = a^x$

függvények grafikonjai az y-tengelyre szimmetrikus grafikonok

A logaritmusfüggvény:

$f: R \to R \quad f(x) = \log_a x$ ahol $a > 0, \ a \neq 1$ valós szám

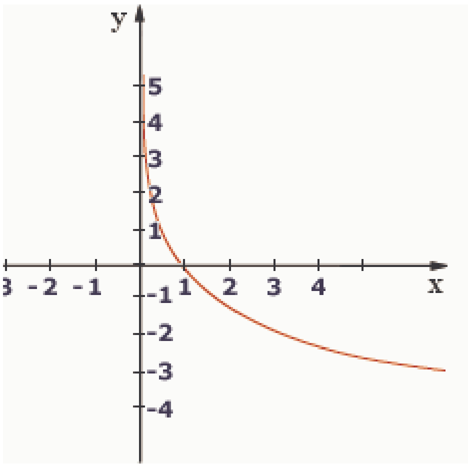
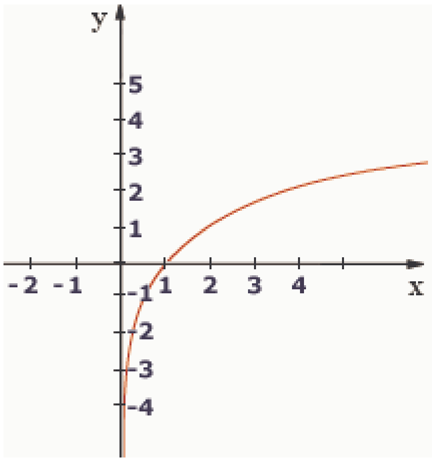
Az azonos alapú logaritmusfüggvény és exponenciális függvény egymás inverzfüggvényei, mert $\log_a x \circ a^x = \log_a a^x = x$ és

$a^x \circ \log_a x = a^{\log_a x} = x \qquad (x > 0)$

Így grafikonjaikat megkaphatjuk a másik grafikonjának y = x egyenesre való tükrözésével.

Értelmezési tartományaik és értékkészletük felcseréléssel megkapható.

két alapvetően különböző logaritmusfüggvényt különböztethetünk meg

$0 < a < 1$	$a > 1$
	
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	$g(x) = \log_2 x$
$D_f = (0;\infty) = R^+$	$D_g = (0;\infty) = R^+$
$R_f = R$	$R_g = R$
szigorúan monoton csökkenő	szigorúan monoton növekedő
szélsőértéke nincs	szélsőértéke nincs
zérushelye x=1	zérushelye x=1
szigorúan konvex	szigorúan konkáv
inflexiós pontja nincs	inflexiós pontja nincs
nem páros, nem páratlan	nem páros, nem páratlan
nem korlátos	nem korlátos
határértékei:	határértékei:
$\lim\limits_{x\to 0+0} \log_a x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \infty$

Alkalmazások:

- számításoknál logaritmustáblázat használata (szorzás helyett összeadásra)
- nagyságrend-meghatározás

- radioaktív bomlástörvény (exponenciális)
  A radioaktív bomló anyag tömege az idő szerint exponenciálisan változik: $m(t) = m_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ ahol *k* az anyagra jellemző állandó, m_0 a bomló anyag kezdeti tömege, *t* az idő. Például a 14-es tömegszámú szénizotóp radioaktív, és élő szervezetben is megtalálható egy adott jellemző mennyiségben. Megmérve a leletben a ^{14}C izotóp mennyiségét, a bomlási állandó ismeretében kiszámolható, hogy a kezdeti szintről mennyi idő alatt bomlott a mértre, vagyis hogy mikor „halt meg” a lelet.

- fényelnyelés törvénye (Lambert-Beer törvény, logaritmikus)
- bekapcsolási jelenség
- pH számolás az oxónium-ion koncentrációjából: $pH = -\lg[H_3O^+]$
- kémiai reakciók sebességfüggése a hőmérséklettől (exponenciális)
- elektródpotenciál függése a koncentrációtól, logaritmikus (Nernst-egyenlet)

- logaritmikus skálák:

  Richter (rezgések amplitúdóját méri, nyitott végű)

  A Richter-skála a földrengések nagyságát, ún. magnitúdóját határozza meg. Ezt az értéket megkapjuk, ha a földrengés kiindulópontjától 100 km-re lévő szabvány szeizmográfon felvett szeizmogramban megmérjük a műszer által jelzett legnagyobb kitérést mikrométerben, s annak tízes alapú logaritmusát vesszük.

  hangnyomásszint (decibelek)

  csillagfényesség (magnitúdó)

- érzékelés: Weber-Fechner törvény:

  az ingerület észlelt erőssége arányos a fizikai erősségének logaritmusával (ezerszer akkora ingert tehát körülbelül háromszorakkorának érzünk)

- számítási bonyolultság jellemzése:

  Egy halmaz elemei közül kell megkeresni (kiválasztani) néhányat.

  Ha a halmaz n elemből áll, és az adatokból barkochbakérdésekkel kell megkeresni egyet, ezt (ha jól kérdezünk) $\log_2 n$ kérdésből lehet megtenni. (Logaritmikus lépésszám.)

  Ha mindegyik adatot külön-külön meg kell vizsgálni, akkor n lépést kell megtennünk, ha bármely kettőt össze kell hasonlítani, akkor $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ lépésre vagy szükség. (Polinomiális lépésszám.)

  Ha pedig az n db elem bármely részhalmazát meg kell vizsgálnunk, akkor 2^n db lépésre van szükség. (Exponenciális lépésszám.)

  A logaritmikus vagy polinomiális lépésszámot igénylő problémák nagyobb adathalmaz esetén is még lefuttathatóak számítógépen, ám az exponenciális problémák kilátástalanul hosszú időt vesznek igénybe viszonylag kis elemszámú halmaz esetén is.