

9. tétel:**Első- és másodfokú egyenlőtlenségek, pozitív számok nevezetes közepei, és ezek felhasználása szélsőérték-feladatok megoldásában****Egyenlőtlenség:**

Két relációsjellel összekapcsolt kifejezés vagy függvény.

Az egyenlőtlenséget szokás olyan speciális nyitott mondatnak (változó(k)tól függő állítás) is nevezni, amelynek alaphalmaza számhalmaz.

Az egyenlőtlenség megoldása:

Megkeressük a két kifejezés/függvény közös értelmezési tartományának – alaphalmazának – azon elemeit, amelyekre a két kifejezés/függvény helyettesítési értékei a megadott relációban vannak. Ezeknek halmaza az egyenlőtlenség *megoldáshalmaza* vagy más néven *igazsághalmaza*.

Ha az egyenlőtlenség az alaphalmaz minden elemére teljesül, akkor a megoldáshalmaz egyezik az alaphalmazzal, az egyenlőtlenség ilyenkor *azonosság*.

Ha a relációs jel két oldalán a változóknak csak algebrai egész kifejezései vannak, akkor *algebrai egyenlőtlenségnek* nevezzük. Ennek *fokszáma* a benne szereplő legmagasabb fokszámú tag fokszámával egyenlő.

Nem algebraiak például az abszolút értékes, a törtes, a gyökös, az exponenciális, a logaritmikus, a trigonometrikus egyenlőtlenségek.

Egyenlőtlenség megoldásánál a negatív számmal való szorzás/osztás megfordítja a relációs jelet. Ezért például ismeretlennel (előjelvizsgálat nélkül) nem lehet beszorozni.

Elsőfokú egyenlőtlenség:

Redukált alakja: $mx + b > 0$, $m; b \in \mathbb{R}$ $m \neq 0$.

Megoldása m előjelétől függ: $m > 0$, akkor $x > -\frac{b}{m}$, ha $m < 0$, akkor $x < -\frac{b}{m}$

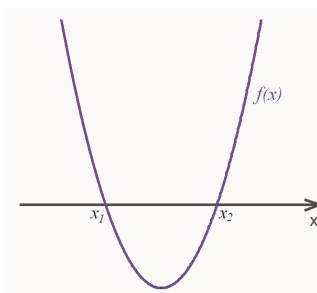
Másodfokú egyenlőtlenségek:

Redukált alakja: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$, ahol $a; b; c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

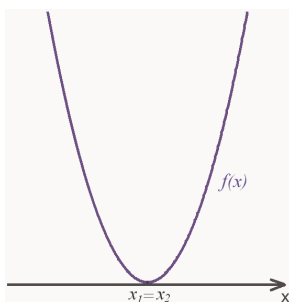
1. megoldás: a függvénygrafikon értékeinek leolvasása alapján:

A másodfokú függvény képe egy parabola.

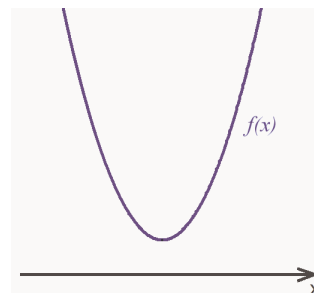
A függvénynek D-től függően 0, 1, vagy 2 metszéspontja van az x tengellyel, amelyeket az egyenlet megoldásával megkaphatunk. A függvény 0-nál kisebb vagy nagyobb $f(x)$ értékeihez tartozó x-eket leolvashatjuk a függvény grafikonjáról.

I. eset: $a > 0$ $D > 0$ 

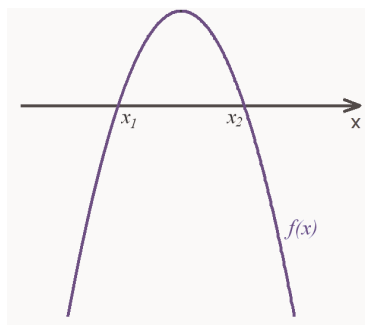
$$x < x_1 \text{ vagy } x > x_2$$

 $D = 0$ 

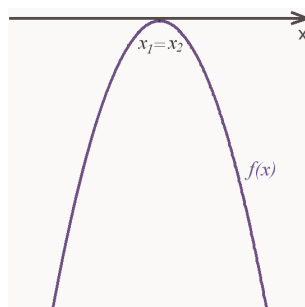
$$x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$$

 $D < 0$ 

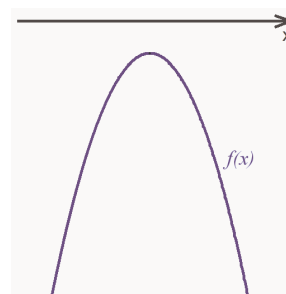
$$x \in \mathbb{R}$$

II. eset: $a < 0$ $D > 0$ 

$$x_1 < x < x_2$$

 $D = 0$ 

$$x = x_2$$

 $D < 0$ 

$$\emptyset$$

II. megoldás: algebrai úton

Az egyenlet gyökeinek meghatározása után felírható gyöktényezős alakba: $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) > 0$ alakban. Ezután a szorzat tényezőinek előjelét vizsgálva megkaphatjuk a megoldáshalmazt.

Természetesen az $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0$ egyenlőtlenséget is hasonlóan oldjuk meg.

Pozitív számok nevezetes közepei:

Harmonikus közép:

n db pozitív valós szám harmonikus közepét megkapjuk, ha n -et elosztjuk a számok reciprokösszegével.

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad x_1, x_2, \dots, x_n > 0$$

Geometriai (mértani) közép:

n db pozitív valós szám mértani közepe a számok szorzatának n -edik gyöke.

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Számtani (aritmetikai) közép:

n db valós szám számtani közepe a számok összegének n -ed része..

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Négyzetes (kvadratus) közép:

n db pozitív szám négyzetes közepe a számok négyzetösszege n -ed részének négyzetgyöke.

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

k -adik hatványközep:

n db pozitív szám k -adik hatványközepe a számok k -adik hatványösszege n -ed részének k -adik gyöke.

$$Q_k = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}} \quad k \in \mathbb{N} \text{ és } k > 2 \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Tétel:

Pozitív számok közepei nagyságrendi sorba állíthatók, ha $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ és $k > 2$, akkor:

$$\min\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq Q_k \leq \max\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$$

Bármely kettő között az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Tétel:

Két pozitív szám harmonikus közepe kisebb vagy egyenlő, mint geometriai közepük. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a két szám egyenlő.

$$\begin{aligned} \text{Bizonyítás:} \quad & \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \\ & \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \quad / : \sqrt{ab} > 0 \\ & \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1 \quad / \cdot (a+b) > 0 \\ & 2\sqrt{ab} \leq a+b \quad / - 2\sqrt{ab} \\ & 0 \leq a+b-2\sqrt{ab} \\ & 0 \leq (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \end{aligned}$$

Ez pedig azonosan igaz, az egyenlőség pedig valóban $a=b$ esetén áll fenn. Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

Tétel:

Két pozitív szám geometriai közepe kisebb vagy egyenlő, mint a számtani közepük. Egyenlőség akkor, és csak akkor áll fenn, ha a két szám egyenlő.

$$\text{Bizonyítás: } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2\sqrt{ab} \leq a+b$$

$$0 \leq a - 2\sqrt{ab} + b$$

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

Ez pedig azonosan igaz, az egyenlőség pedig valóban $a=b$ esetén áll fenn.

Ekvivalens átalakításokat végeztünk,

Tétel:

Két pozitív szám számtani közepe kisebb vagy egyenlő, mint négyzetes közepük. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a két szám egyenlő.

$$\text{Bizonyítás: } \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad / ()^2 \text{ hiszen mindkét old. } \geq 0$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad / \cdot 4$$

$$a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2 \quad / -a^2-2ab-b^2$$

$$0 \leq a^2-2ab-b^2$$

$$0 \leq (a-b)^2$$

Ez pedig azonosan igaz, az egyenlőség pedig valóban $a=b$ esetén áll fenn.

Ekvivalens átalakításokat végeztünk,

Felhasználások:

1. Pozitív szám és reciprokának összege nagyobb vagy egyenlő kettőnél, de csak akkor lehet egyenlő, ha a szám 1. Azaz $x + \frac{1}{x} \geq 2$, ha $x > 0$.

Bizonyítás: használjuk a számtani és mértani közép összefüggését x és $\frac{1}{x}$ -re

$$\text{Tehát: } \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1, \text{ amiből } x + \frac{1}{x} \geq 2$$

És az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $x = \frac{1}{x}$, vagyis $x^2 = 1$, tehát $x=1$.

2. Adott kerületű téglalapok közül a maximális területű a négyzet.

Bizonyítás:

használjuk a számtani és mértani közép közti összefüggést a téglalap oldalaira

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \text{beírhatjuk a helyére a téglalap kerületét és területét}$$

$$\sqrt{T} \leq \frac{K}{4}, \quad \text{vagyis } T \leq \frac{K^2}{16}$$

A terület legnagyobb értéke $\frac{K^2}{16}$ lehet, és ezt a maximumot el is érheti, ha $G=A$, azaz ha $a=b$. Tehát a területe akkor lesz maximális, ha a téglalap négyzet.

3. Keressük meg az $f(x) = x^2 - x$ függvény maximumát $[0;1]$ -en !

Mivel: $f(x) = x \cdot (1-x)$, használjuk a számtani és mértani közép közti összefüggést x -re és $(1-x)$ re (ha $x \in [0;1]$, akkor ezek a számok nemnegatívak)!

$$\sqrt{x \cdot (1-x)} \leq \frac{x+1-x}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{ebből pedig } f(x) = x \cdot (1-x) \leq \frac{1}{4}$$

A függvény minden értéke $[0;1]$ -en tehát kisebb vagy egyenlő $\frac{1}{4}$ -nél, de ezt el is érheti, ha $A=G$, vagyis $x = 1-x$. Ez lehetséges, ha $x = \frac{1}{2}$. Így a függvény maximuma $x = \frac{1}{2}$ -ben van, értéke pedig $\frac{1}{4}$.

4. Keressük meg az $f(x) = x^3 - x$ függvény maximumát $[0;1]$ -en !

Mivel $f(x) = x^2 \cdot (1-x) = x \cdot x \cdot (1-x)$, használjuk a számtani és mértani közép összefüggését x , x , $2(1-x)$ -re (ezek nemnegatívak).

$$\sqrt[3]{x \cdot x \cdot 2(1-x)} \leq \frac{x+x+2(1-x)}{3} = 1 \quad \text{(pont ezért kellett a 2-es szorzó, hogy A konstans legyen)}$$

ebből $f(x) = x \cdot x \cdot (1-x) \leq \frac{1}{2}$, és ezt a maximumot el is érheti, ha $x = x = 2(1-x)$

Ez pedig $x = \frac{2}{3}$ -nál lehetséges.

Alkalmazások:

Matematikán belül:

- egyéb, magasabb fokú, vagy nem algebrai egyenlőtlenségek visszavezethetők a másodfokú egyenlőtlenség megoldására
- kifejezések értelmezési tartományának vizsgálata
- szélsőérték-feladatok elemi úton történő megoldásához (lásd 4 példa)
- statisztikában a minta jellemzése
 - középértékek,
 - szórás mint az eltérések négyzetes közepe
- banki kamat (mértani közép)
- súlyozott számtani közép

Egyéb:

- átlagsebesség egyező úton (harmonikus közép)