

10. tétel

Számsorozatok és tulajdonságaik

Sorozat:

Olyan függvény, melynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza.

Számsorozat képhalmaza a valós számok halmaza. $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$f(n) = a_n$ jelöli a sorozat n -edik tagját.

Sorozat megadása:

- képlettel

1) explicit képlet, pl: $a_n = 2 \cdot n$

2) rekurzív képlettel: $a_n = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ a_{n-1} + 2 & n > 1 \end{cases}$

- szöveggel

a_n = az n -edik pozitív páros szám

Sorozatok ábrázolása:

derékszögű koordináta-rendszerben (de csak pontokat).

Sorozatok jellemzése:

monotonitás:

$\{a_n\}$ sorozat *monoton növekvő*, ha $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ (szigorúan, ha $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$)

$\{a_n\}$ sorozat *monoton csökkenő*, ha $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ (szigorúan, ha $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$)

$\{a_n\}$ sorozat *monoton*, ha a négy valamelyikét kielégíti.

korlátosság:

$\{a_n\}$ sorozat *felülről korlátos*, ha van felső korlátja, azaz $\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq K$.

$\{a_n\}$ sorozat *alulról korlátos*, ha van alsó korlátja, azaz $\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq L$

$\{a_n\}$ sorozat *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos.

megjegyzés:

- ha egy sorozat alulról korlátos, akkor létezik legnagyobb alsó korlátja (*infimuma*)

- ha egy sorozat felülről korlátos, akkor létezik legkisebb felső korlátja (*szuprémuma*)

határérték:

Az $\{a_n\}$ sorozat az A számhoz *konvergál*, ha

$\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists n_0$ küszöbindex, hogy $n > n_0$ esetén $a_n \in (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$, azaz $|a_n - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $a_n \rightarrow A$, vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Például: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Az $\{a_n\}$ sorozat *végtelenhez tart*, ha $\forall K$ -hoz $\exists n_0$, hogy $\forall n > n_0$ esetén $a_n > K$.

Jelölés: $a_n \rightarrow \infty$, vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Például: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

Az $\{a_n\}$ sorozat *mínusz végtelenhez tart*, ha $\forall L$ -hez $\exists n_0$, hogy $\forall n > n_0$ esetén $a_n < L$.

Jelölés: $a_n \rightarrow -\infty$, vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Például: $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$

$\{a_n\}$ *konvergens*, ha $\exists A \in \mathbb{R}$, hogy $a_n \rightarrow A$, azaz ha létezik véges határértéke.

$\{a_n\}$ *divergens*, ha nem létezik határértéke, vagy ha a határértéke $\pm \infty$.

Például $a_n = (-1)^n$ divergens.

Tétel: Minden konvergens sorozat korlátos.

Tétel: Korlátos és monoton sorozat konvergens.

Tétel: Monoton sorozatnak mindig van határértéke.

- Ha korlátos, akkor konvergens (van véges határértéke).
- Ha nem korlátos, akkor $+\infty$ vagy $-\infty$, a monotonitásától függően.

Határértékek meghatározási módszerei

- definícióval, becsléssel
- rendőr-elv
- ismert határértékekre való visszavezetéssel
- műveleti szabályok alapján (a kritikus határértékek átalakítása)
- gyöktelenítés, a nevező legnagyobb tagjával való egyszerűsítés

Számtani sorozat:

Definíció: a_n sorozat számtani sorozat, ha a szomszédos tagjainak különbsége állandó, azaz: $\forall n > 1$ -re $a_{n+1} - a_n = \text{állandó} = d$ (differencia).

azaz: $a_{n+1} = a_n + d$ (rekurzív képlet)

ha $d > 0$: szigorúan monoton nő, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots$

ha $d = 0$: konstans, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dots$

ha $d < 0$: szigorúan monoton csökken, $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$

Állítás: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Bizonyítás: teljes indukcióval

1. $n=1$ -re $a_1 = a_1 + (1-1) \cdot d$ ✓

$n=2$ -re $a_2 = a_1 + (2-1) \cdot d$ ✓ (def)

2. Tegyük fel, hogy: $n=k$ -ra igaz azaz: $a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$

kell, hogy $k+1$ -re is igaz legyen, azaz: $a_{k+1} = a_1 + k \cdot d$

$a_{k+1} \stackrel{?}{=} a_k + d \stackrel{?}{=} a_1 + (k-1) \cdot d + d = a_1 + k \cdot d$ ✓

$\uparrow$ $\uparrow$
 definíció indukciós feltétel

Állítás: $a_n = a_k + (n - k) \cdot d$, vagyis $a_n - a_k = (n - k) \cdot d$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot d \\ - a_k &= a_1 + (k - 1) \cdot d \end{aligned}$$

$$a_n - a_k = (n - 1) \cdot d - (k - 1) \cdot d = (n - k) \cdot d$$

Állítás: Egy számtani sorozat három szomszédos tagja közül a középső a két szélső

számtani közepe, azaz: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ ($\forall n > 1$ esetén)

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= a_n - d \\ + a_{n+1} &= a_n + d \quad (\text{definíciók alapján}) \\ \hline a_{n-1} + a_{n+1} &= 2 \cdot a_n \end{aligned}$$

Megjegyzés: ez szimmetrikus tagokra szintén igaz: $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ ha $n > k$

Állítás: Egy számtani sorozat első n tagjának összege

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$$

Bizonyítás: Gauss-módszere alapján

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ + S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline 2 \cdot S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_k + a_{n-k+1}) + \dots + (a_n + a_1) \end{aligned}$$

viszont: $a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + (k-1) \cdot d + a_n - (k-1) \cdot d = a_1 + a_n \quad \forall k - 1$

Tehát $2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$, amiből adódik a tétel.

Mértani sorozat:

Definíció: a_n sorozat mértani sorozat, ha a szomszédos tagjainak hányadosa állandó,

azaz: $\forall n > 1$ -re $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{állandó} = q$ (kvóciens), ahol $q \neq 0$ és $a_n \neq 0$.

Tehát: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ (rekurzív képlet)

- ha $q > 1$
és $a_1 > 0$, akkor szigorúan monoton nő és így alulról korlátos
és $a_1 < 0$, akkor szigorúan monoton csökken és így felülről korlátos
- ha $q = 1$, akkor konstans (korlátos és monoton)
- ha $0 < q < 1$
és $a_1 > 0$, akkor szigorúan monoton csökken és korlátos
és $a_1 < 0$, akkor szigorúan monoton nő és korlátos
- ha $-1 \leq q < 0$, akkor nem monoton, de korlátos
- ha $q < -1$, akkor nem monoton, és nem is korlátos

Állítás: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Bizonyítás: teljes indukcióval

1. $n=1$ -re $a_1 = a_1 \cdot q^{1-1}$ ✓

$n=2$ -re $a_2 = a_1 \cdot q^{2-1}$ ✓ (def)

2. Tegyük fel, hogy $n=k$ -ra igaz azaz: $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$

kell, hogy $k+1$ -re is igaz legyen, azaz: $a_{k+1} = a_1 \cdot q^k$

$$a_{k+1} = a_k \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = a_1 \cdot q^k \quad \checkmark$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 definíció indukciós feltétel

Állítás: $a_n = a_k \cdot q^{n-k}$, vagyis $\frac{a_n}{a_k} = q^{n-k}$

Bizonyítás: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$\therefore a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ mivel $a_n \neq 0$ ezért eloszthatjuk az egyenleteket

$$\frac{a_n}{a_k} = q^{(n-1)-(k-1)} = q^{n-k}$$

Tétel: Egy mértani sorozat három szomszédos tagja közül a középső abszolút értéke a két szélső mértani közepe, azaz: $|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$, vagy inkább $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$

Bizonyítás:

$$a_{n-1} = a_n / q$$

$$\cdot a_{n+1} = a_n \cdot q \quad (\text{definíciók alapján})$$

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_n^2$$

Megjegyzés: ez szimmetrikus tagokra szintén igaz: $a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$ ha $n > k$

Állítás: Egy mértani sorozat első n tagjának összege

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{persze ha } q \neq 1$$

Bizonyítás:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad / \cdot q$$

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q, \text{ azaz}$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q \quad \text{ebből kivonva } S_n\text{-t}$$

$$q \cdot S_n - S_n = a_n \cdot q - a_1 = a_1 \cdot q^n - a_1 = a_1 \cdot (q^n - 1),$$

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1) \quad \text{így mivel } q \neq 1$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Megjegyzés: $S_n = a_1 \cdot n$, ha $q = 1$

Nevezetes sorozatok:

- 1) Fibonacci-sorozatok: olyan sorozatok, melynél az első két tag adott, és minden azt követő tag az előző kettő összege. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $n > 2$ esetén.

Ha $a_1 = 1$ és $a_2 = 1$, akkor speciel $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ (jaj)

- 2) $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$, határértéke e , illetve $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n} \right)^n = e^c$

Alkalmazások:

- a virágszirmok száma gyakran Fibonacci-szám (liliom 3, vadrózsa 5; vérpipacs 8, körömvirág 13, cikória 21, útilapu 34)
- fenyőtoboz, ananász, karfiol, málna Fibonacci spirálba rendeződik
- baktériumok szaporodása a Fibonacci-sorozat szerint történhet
- kamatszámítás
- összegzési problémák
- pénzügyi számításokban
 - kamatos kamat számításakor
 - törlesztés évi részletének számításában
- népességnövekedés (mértani sorozat)
- határozott integrál közelítőösszegeinél sorozathatárértékkel számolunk
- irracionális kitevőjű hatvány definíciója sorozatokra épül