

11. tétel**Függvények vizsgálata elemi úton és a differenciálszámítás felhasználásával****Függvény:**

Ha egy A halmaz minden eleméhez hozzárendelünk egy B halmaz egy-egy elemét, akkor egy A -ból B -be rendelő függvényt kapunk. Jele: $f : A \rightarrow B$.

$A = D_f$: értelmezési tartomány, B : képhalmaz

$R_f = \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \subset B$: értékkészlet

Jelei: $\left. \begin{array}{l} f(a) = b \\ a \rightarrow f(a) \\ a \rightarrow b \end{array} \right\} \begin{array}{l} a\text{-hoz a függvény } b\text{-t rendeli, } a \text{ képe } b \text{ vagy } b \text{ ősképe } a \end{array}$

Definíció:

f függvény **injektív**, ha különböző elemekhez különbözőt rendel

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

f függvény **szürjektív**, ha minden képhalmazbeli elemnek van ősképe (azaz $B = R_f$)

f függvény **bijektív**, ha injektív és szürjektív is

(azaz minden képhalmazbeli elemnek pontosan egy ősképe van)

Bijektív függvény invertálható (azaz a hozzárendelési szabálya megfordítható)

és ha $f : D_f \rightarrow R_f$ és $f(a) = b$, akkor $f^{-1} : R_f \rightarrow D_f$ és $f^{-1}(b) = a$

Függvény vizsgálatának szempontjai:**Paritás:**

$f(x)$ függvény **páros**, ha $x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$ és $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$ -re.

$f(x)$ függvény **páratlan**, ha $x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$ és $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$ -re

Periodikusság:

$f(x)$ függvény **periodikus**, ha $\exists p > 0 : x \in D_f \Leftrightarrow x + p \in D_f$ és

$$f(x) = f(x + p) \quad \forall x \in D_f.$$

Ha létezik legkisebb ilyen tulajdonságú p , akkor azt nevezzük a függvény **periódusának**.

Monotonitás:

$f(x)$ **monoton növekvő I-n**, ha $x_1, x_2 \in I \subset D_f$ és $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$.

$f(x)$ **szigorúan monoton növekvő I-n**, ha $x_1, x_2 \in I \subset D_f$ és $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$.

$f(x)$ **monoton csökkenő I-n**, ha $x_1, x_2 \in I \subset D_f$ és $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$.

$f(x)$ **szigorúan monoton csökkenő I-n**, ha $x_1, x_2 \in I \subset D_f$ és $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$.

Zérushely:

$f(x)$ függvény zérushelye $x_0 \in D_f$, ha $f(x_0) = 0$.

(Ahol a függvény grafikonja metszi az x tengelyt.)

Szélsőérték:

$f(x)$ -nek a -ban **szigorú lokális maximuma** van, ha

$f(x)$ értelmes a egy környezetében és a egy környezetében a -ban a legnagyobb a függvény.

$\exists \delta_1 > 0$ $(a - \delta_1, a + \delta_1) \subset D(f)$ és $\exists \delta > 0$ $\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ esetén $f(x) < f(a)$

Hasonlóképpen definiálhatjuk a szigorú lokális minimumot (illetve a nem szigorúkat).

$f(x)$ -nek a -ban **abszolút vagy globális szigorú maximuma** van, ha

$f(x)$ értelmezve van a -ban, és a függvény legnagyobb felvett értéke $f(a)$.

$a \in D_f$ és $\forall x \in D_f \setminus \{a\}$ esetén $f(x) < f(a)$

Hasonlóképpen definiálhatjuk a szigorú globális minimumot (illetve a nem szigorúkat).

Korlátosság:

Az f függvény **felülről korlátos**, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \leq K$ $\forall x \in D_f$ -re

ekkor K a függvény egy felső korlátja

Az f függvény **alulról korlátos**, ha $\exists L \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \geq L$ $\forall x \in D_f$ -re

ekkor L a függvény egy alsó korlátja

Az f függvény **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos. $\exists K \in \mathbb{R}$ $|f(x)| < K$ $\forall x \in D_f$ -re

Konvexitás:

Egy f függvény konvex az $I \subset D_f$ intervallumon, ha minden $[x_1; x_2] \subset I$ intervallumon a függvény grafikonja $(x_1; f(x_1))$ és $(x_2; f(x_2))$ pontokat összekötő húr alatt halad.

Egy f függvény konkáv az $I \subset D_f$ intervallumon, ha minden $[x_1; x_2] \subset I$ intervallumon a függvény grafikonja $(x_1; f(x_1))$ és $(x_2; f(x_2))$ pontokat összekötő húr felett halad.

Elemi függvények, függvénytranszformációk**Elemi függvények:**

Elsőfokú azaz lineáris függvény $f(x) = m \cdot x + b$ $m; b \in \mathbb{R}$

Másodfokú függvény $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - u)^2 + v$ $a; b; c; u; v \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

Abszolútértékes függvény $f(x) = a \cdot |x - u| + v$ $a; u; v \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

Hatványfüggvény $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z}$

Gyökfüggvény $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbb{Z}$

Elsőfokú törtfüggvény $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ $a; b; c; d \in \mathbb{R}$ $c \neq 0$

Exponenciális függvény $f(x) = a^x$ $a > 0$ $a \neq 1$

Logaritmusfüggvény $f(x) = \log_a x$ $a > 0$ $a \neq 1$

Trigonometrikus függvények $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$

Függvénytranszformációk:

Függvény transzformációkkal egy-egy függvénytípus valamely függvényéből a hozzárendelési szabály bizonyos megváltoztatásával újabb függvényeket állíthatunk elő.

$f(x) + c$ a függvény grafikonja eltolódik a $(0; c)$ vektorral

$f(x+c)$ a függvény grafikonja eltolódik a $(-c; 0)$ vektorral

$-f(x)$ a függvény grafikonja az x tengelyre tükröződik

$f(-x)$ a függvény grafikonja az y tengelyre tükröződik

$c \cdot f(x)$ a függvény grafikonja a $\lambda = c$ arányú x tengelyű merőleges affinitású képe lesz

$f(c \cdot x)$ a függvény grafikonja a $\lambda = 1/c$ arányú y tengelyű merőleges affinitású képe lesz

Függvényvizsgálat

Az elemi függvények tulajdonságait felhasználva elemi úton vizsgálhatók azok a függvények, amelyek valamely alapfüggvény transzformációjaként előállíthatók.

Definíció:

Az $f(x)$ függvény differenciálható a -ban, ha értelmes a egy környezetében, és
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ határérték létezik és véges.

Ekkor $f(x)$ deriváltja a -ban: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

A $f'(a)$ értéke megadja, hogy az $f(x)$ hez a -ban húzott érintő meredeksége mekkora.

Így az érintő egyenlete: $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a$

Ha egy függvény differenciálható a -ban, akkor a -ban folytonos is.

$f'(x) \geq 0$ egy I intervallum minden pontjára $\Leftrightarrow f(x)$ monoton nő I felett

$f'(x) \leq 0$ egy I intervallum minden pontjára $\Leftrightarrow f(x)$ monoton csökken I felett

$f'(x) > 0$ egy I intervallum minden pontjára $\Rightarrow f(x)$ szig. monoton nő I felett

$f'(x) < 0$ egy I intervallum minden pontjára $\Rightarrow f(x)$ szig. monoton csökken I felett

$f(x)$ -nek szélsőértéke van a -ban $\Rightarrow f'(a) = 0$.

Ez a szélsőértéknek csak szükséges feltétele, de nem elégséges, pl. $f(x) = x^3$.

$f'(a) = 0$, és $f''(a) \neq 0 \Rightarrow f(x)$ -nek szélsőértéke van a -ban. (elégséges feltétel)

és ha $f''(a) > 0$, akkor a -ban a függvénynek szig. lok. minimuma van

ha $f''(a) < 0$, akkor a -ban a függvénynek szig. lok. maximuma van

vagy a monotonitásból is eldönthető, hogy szélsőértéke van-e a függvénynek:

ha $f'(a) = 0$ és előtte egy környezetben a derivált negatív/pozitív és utána pozitív/negatív, akkor a függvénynek szigorú lokális minimuma/maximuma van.

Konvexitás:

$f''(x) \geq 0$ egy intervallum minden pontjára $\Leftrightarrow f(x)$ konvex az intervallum felett

$f''(x) \leq 0$ egy intervallum minden pontjára $\Leftrightarrow f(x)$ konkáv az intervallum felett

ha $f'(a) = 0$, és $f''(a) = 0$ illetve $f'''(a) \neq 0$, akkor a függvénynek a -ban inflexiós pontja van.

Elemi függvények deriváltjai:

$$1. (x^c)' = c \cdot x^{c-1}$$

$$2. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$3. (\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

$$4. (\sin x)' = \cos x$$

$$5. (\cos x)' = -\sin x$$

$$6. (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$7. (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Műveleti szabályok: f, g differenciálható függvényekre

$$1. (c \cdot f)' = c \cdot f'$$

konstans kiemelhető

$$2. (f \pm g)' = f' \pm g'$$

függvények összege tagonként deriválható

$$3. (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

függvények szorzata már nem deriválható tényezőnként

$$4. \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

hányados-függvény deriváltja, pláne nem

$$5. (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

összetett függvények deriválása, láncszabály

másképpen: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

A függvényvizsgálat lépései:

1. Értelmezési tartomány megállapítása (lehetőleg intervallumosan)

2. Zérushelyek, y -tengely metszet, paritás megállapítása

3. A függvény határértékei az értelmezési tartomány „szélein”

4. A függvény első deriváltjából a monotonitás megállapítása

5. A szélsőértékek leolvasása a monotonitásból

6. A függvény második deriváltjából a konvexitás megállapítása

7. Az inflexiós pontok leolvasása a konvexitásból

8. A függvény vázlatos rajza alapján értékkészletének megállapítása

Tétel:

Az $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^+$ függvény deriváltja az $a \in \mathbb{R}$ helyen $f'(a) = n \cdot a^{n-1}$.

Bizonyítás: definíció alapján

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1})}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + x^{n-k}a^{k-1} + \dots + a^{n-1}) = n \cdot a^{n-1}
 \end{aligned}$$

$\nearrow 0$
 $\searrow 0$
 $\searrow a^n$ $\searrow a^n$ $\searrow a^n$ $\searrow a^n$ $\searrow a^n$

Tétel:

Az $f(x) = \sin x$ függvény deriváltja az $a \in \mathbb{R}$ helyen $f'(a) = \cos a$.

Bizonyítás: definíció alapján

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x - a} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} = \cos a \cdot 1 = \cos a
 \end{aligned}$$

$\nearrow 0$
 $\searrow 0$
 $\searrow \cos a$ $\searrow 1$ mivel $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

Alkalmazás:

- szélsőérték-feladatok megoldása
- függvényvizsgálat (fizikában grafikonvizsgálat)
- érintő meghatározása
- fizikai mennyiségek közti törvények (sebesség – út, gyorsulás – sebesség)
- közgazdaságtan (rugalmasság)