

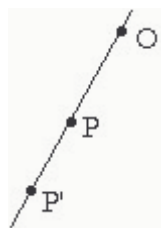
12. tétel:**Hasonlóság és alkalmazásai háromszögekre vonatkozó tételekben****Középpontos hasonlósági transzformáció:**

Adott a síkon egy O középpont és egy $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ arány.

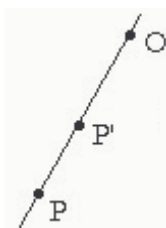
A sík tetszőleges P pontjának legyen képe az a P' síkbeli pont, melyre

- ha $P = O$, akkor $P' = P (= O)$, azaz a középpont képe önmaga,
- ha $P \neq O$, akkor P' az a pont OP egyenesén, melyre $\frac{OP'}{OP} = |\lambda|$,

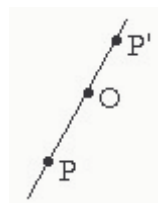
és ha $\lambda < 0$, akkor O elválasztja P -t és P' -t, ha $\lambda > 0$, akkor nem.



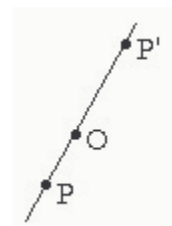
$$\lambda > 1$$



$$0 < \lambda < 1$$



$$-1 < \lambda < 0$$



$$\lambda < -1$$

A középpontos hasonlósági transzformáció tulajdonságai:

- egyenestartó (sőt, egyenes és képe párhuzamos)
- szögtartó
- körüljárástartó
- nem távolságtartó (csak $\lambda = 1$ vagy $\lambda = -1$ esetben)
- fix pontja a középpont, fix egyenesei a középponton áthaladó egyenesek ($\lambda \neq 1$)
- inverze egy ugyanolyan középpontú $1/\lambda$ arányú középpontos hasonlóság

Hasonlósági transzformáció:

Egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági (azaz távolságtartó) transzformáció egymás utáni végrehajtásával kapott transzformáció.

Alakzatok hasonlósága:

Két alakzat *hasonló*, ha létezik olyan hasonlósági transzformáció, mely egyik alakzatot a másikba viszi át.

A háromszögek hasonlóságainak alapesetei:

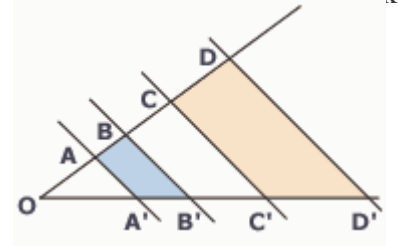
Két háromszög akkor és csak akkor hasonló, ha a következő feltételek egyike teljesül:

- (1) megfelelő oldalaiuk hosszának aránya egyenlő;
- (2) két-két oldalhosszuk aránya és az ezek által közrefogott szögek nagysága egyenlő;
- (3) két-két szögük páronként egyenlő nagyságú; (vagyis tehát mindhárom)
- (4) két-két oldalhosszuk aránya megegyezik és a nagyobbikkal szemközt levő szögek nagysága egyenlő;

Párhuzamos szelők tétele: (PSZT)

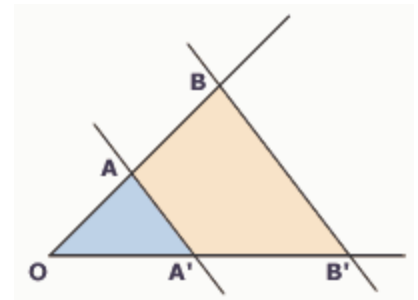
Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya egyenlő a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával.

$$\text{Azaz: } AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ vagy } \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

**Párhuzamos szelők tételének megfordítása: (TZSP)**

Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyeknek aránya mindkét száron egyenlő, akkor a két egyenes párhuzamos.

$$\text{Azaz: } \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \Rightarrow AA' \parallel BB'$$

**Párhuzamos szelőszakaszok tétele: (PSSZT)**

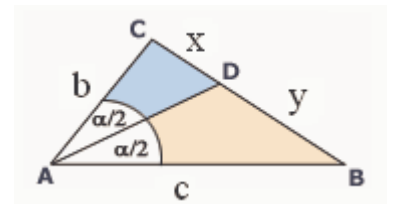
Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor a párhuzamosokból a szárak által kimetszett szakaszok aránya megegyezik a párhuzamosok által az egyik szárból kimetszett szakaszok arányával.

$$\text{Azaz: } AA' \parallel BB' \Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB}$$

Hasonlósági tételek:**Szögfelezőtétel:**

Egy háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.

$$\text{Azaz: } \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}, \text{ vagyis } \frac{x}{y} = \frac{b}{c}$$

**Bizonyítás:**

Húzzunk párhuzamost C-n keresztül a szögfelezővel, a párhuzamos messe AB-oldalegyenest C'-ben.

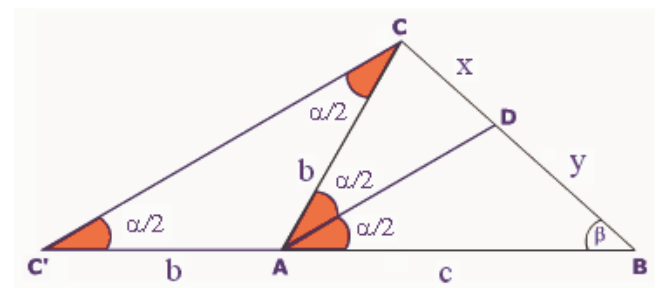
$\angle CAD = \angle C'CA$ mert váltószögek

$\angle CC'A = \angle DAB$ mert egyállású szögek

Tehát: $\triangle CC'A \triangleq \triangle DAB$ egyenlőszárú,

$$AC' = AC = b$$

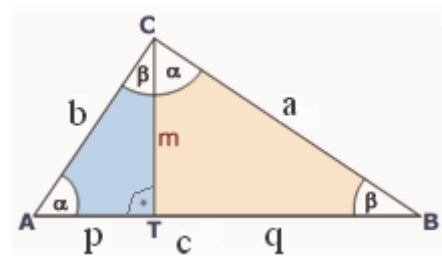
$$\text{Alkalmazva a párhuzamos szelők tételét: } \frac{CD}{DB} = \frac{C'A}{AB} \stackrel{C'A=AC}{=} \frac{AC}{AB}$$



Magasságtétel:

Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek mértani közepe.

Azaz: $CT = \sqrt{AT \cdot TB}$, tehát $m = \sqrt{p \cdot q}$

**Bizonyítás:**

$\angle ACT = \angle CBT = \beta$ és $\angle BCT = \angle CAT = \alpha$, mivel páronként merőleges szárú szögek
Így tehát $\triangle ACT \sim \triangle CBT$, mivel minden szögük páronként megegyezik.

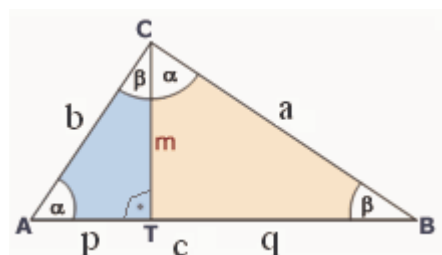
A megfelelő oldalak arányát felírva a két háromszögben:

$$\frac{m}{p} = \frac{q}{m} \text{ amiből adódik: } m = \sqrt{p \cdot q}$$

Befogótétel:

Egy derékszögű háromszög befogója az átfogó és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének mértani közepe.

Azaz: $CA = \sqrt{AT \cdot AB}$, tehát $b = \sqrt{p \cdot c}$

**Bizonyítás:**

$\angle ACT = \angle CBT = \beta$ mivel merőleges szárú szögek

Így tehát $\triangle ACT \sim \triangle ACB$, mivel minden szögük páronként megegyezik.

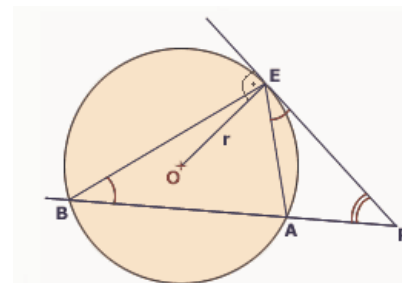
A megfelelő oldalak arányát felírva a két háromszögben:

$$\frac{b}{p} = \frac{c}{b} \text{ amiből adódik: } b = \sqrt{p \cdot c}$$

Körhöz húzott szelőszakaszok tétele:

A körhöz külső pontból húzott szelőszakaszok szorzata állandó, mégpedig a külső pontból húzható érintőszakasz négyzete. Ezt nevezzük egy külső pont körre vonatkozó hatványának.

Azaz: $PE^2 = PA \cdot PB$

**Bizonyítás:**

Mivel $\angle EBA = \angle EAB$ húrhoz tartozó kerületi szög a körben, $\angle EBA = \angle EAB$ pedig ugyanehhez a húrhoz tartozó érintőszárú kerületi szög, ezért $\angle EBA = \angle EAB$

Ezért tehát $\triangle AEP \sim \triangle BEP$, mert szögeik páronként megegyeznek.

A megfelelő oldalak arányát felírva:

$$\frac{PE}{PA} = \frac{PB}{PE} \text{ amiből adódik: } PE^2 = PA \cdot PB$$

Megjegyzés:

$PE^2 = PO^2 - r^2$, ezért definiáljuk így minden pontra a pont körre vonatkozó hatványát.

Következmény: $PO^2 - r^2 > 0 \Leftrightarrow P$ külső pontja a körnek

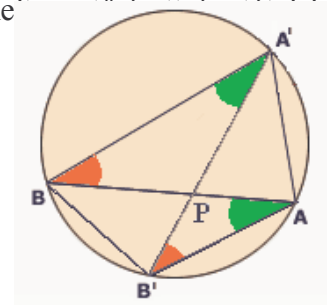
$PO^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow P$ a körív egy pontja

$PO^2 - r^2 < 0 \Leftrightarrow P$ belső pontja a körívnek.

Belső pontra vonatkozó tétel:

Egy a körön belüli adott ponton áthaladó húrok szakaszainak szorzata állandó.

Azaz: $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

**Bizonyítás:**

Mivel $\angle BAB' \sphericalangle$ és $\angle BA'B' \sphericalangle$ BB' húrhoz tartozó kerületi szög a körben, ezért $\angle BAB' \sphericalangle = \angle BA'B' \sphericalangle$.

Továbbá $\angle ABA' \sphericalangle$ és $\angle AB'A' \sphericalangle$ AA' húrhoz tartozó kerületi szög a körben, ezért $\angle ABA' \sphericalangle = \angle AB'A' \sphericalangle$.

Ezért tehát $\triangle PBA \sim \triangle PBA'$, mert szögeik páronként megegyeznek.

A megfelelő oldalak arányát felírva:

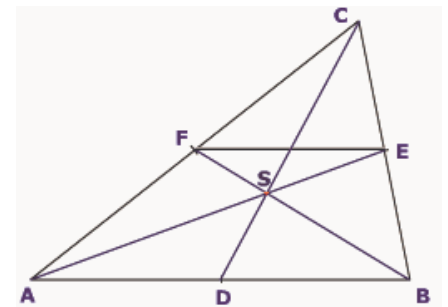
$$\frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB} \text{ amiből adódik: } PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

Megjegyzés:

$PA \cdot PB = r^2 - OP^2$ épp a belső pont körre vonatkozó hatványának abszolútértéke

A háromszög súlyvonalai:

A súlyvonalak a háromszög oldalfelező pontjait kötik össze a csúcsokkal. A súlyvonalak egy pontban metszik és harmadolják egymást. A súlyvonal a háromszög területét felezi.

**A háromszög középvonala:**

A háromszög oldalfelező pontjait összekötő szakasz.

Párhuzamos a háromszög egyik oldalával és feleakkora. A háromszög területét negyed-háromnegyed arányban osztja, magasságát felezi.

Hasonló síkidomok területének és kerületének aránya:

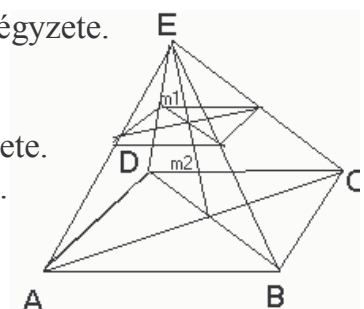
A kerületek aránya megegyezik a hasonlóság arányával.

Hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete.

Hasonló testek felszínének és térfogatának aránya:

Hasonló testek felszínének aránya a hasonlóság arányának négyzete.

Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbe.

**Alkalmazások:**

- szerkesztési feladatok
 - adott szakasz felosztása egyenlő részekre
 - adott szakasz hossz megszerkesztése az egységnyi szakaszból
- térképészet (arányos kicsinyítés, nagyítás) (háromszögelési pontok, Nadapi gránit)
- magasságszámolás terepen (mondjuk árnyékkal)
- tervrajzok, makettek (méretarány)
- rajzok és festmények (kicsinyítés)
- fényképezőgép, fotózás (optika)
- A hangerő a távolság négyzetével fordítottan arányos, de ugyanez például térerőkre is érvényes, pl. mágneses térre, elektromos térre, tömegvonzásra is érvényes.