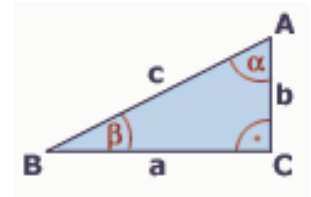


13. tétel: Derékszögű háromszög

Derékszögű háromszög:

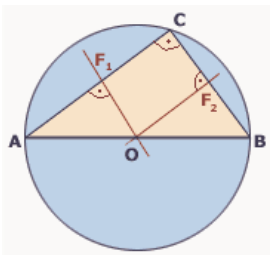
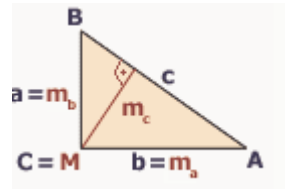
Olyan háromszög, melynek egyik szöge derékszög (90°).

A másik két szög egymás pótszöge, összegük $\alpha + \beta = 90^\circ$.



A derékszöget bezáró oldalak a *befogók*, a derékszöggel szemben fekvő oldal az *átfogó* (ez szükségképpen a legnagyobb oldala a háromszögnek).

A derékszögű háromszög egyik befogójához tartozó magassága a másik befogó, így a magasságpontja a derékszögű csúcs.



A derékszögű háromszög oldalfelező merőlegesei az átfogó felezőpontjában metszik egymást, ez a körülírható kör középpontja (Thalész-tétel).

A derékszögű háromszög beírt körének sugarára:

A beírt kör érintési pontjait jelöljük T, R, Q-val.

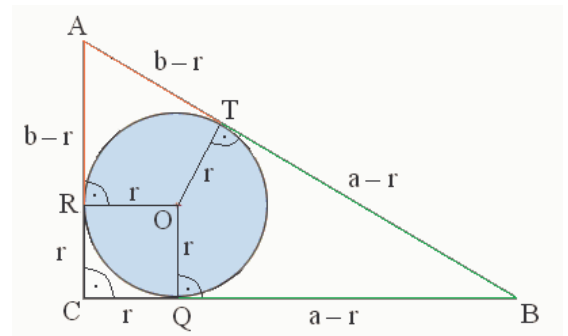
ROQC négyszög négyzet (mivel minden szöge derékszög, és két szomszédos oldala egyenlő is).

Így QB = a - r és AR = b - r.

A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak:

$$BQ = BT = a - r \text{ és } AR = AT = b - r$$

Tehát az átfogó $c = a - r + b - r \Rightarrow c + 2r = a + b$



Pitagorasz-tétel:

Egy derékszögű háromszög két befogójának négyzetösszege az átfogó négyzete. Azaz:

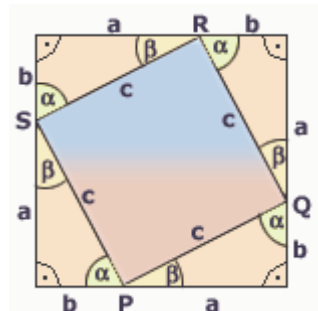
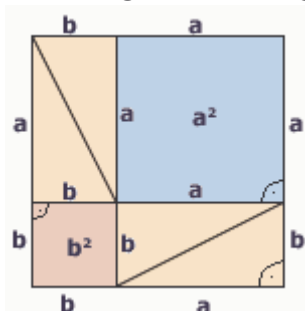
$$\gamma = 90^\circ \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Bizonyítás:

A tétel bizonyításában felhasználjuk azt az euklideszi axiómát, hogy „Ha egyenlő területekből egyenlő területeket veszünk el, akkor a maradék területek is egyenlők.”

Készítsünk két darab $(b + a)$ oldalú négyzetet az alábbi módon:

ahol a és b a derékszögű háromszög befogói.



A $(b + a)$ oldalú négyzetek területe nyilvánvalóan egyenlő (2. axióma, területszámítás).

A baloldali négyzetben kaptunk 4 darab, az eredeti háromszöggel egybevágó derékszögű háromszöget (hiszen befogói és a derékszög megegyezik), és egy a illetve b oldalú négyzetet. Ezek területe a^2 és b^2 területegység.

A jobb oldali négyzetben is megtalálható ez a 4 darab, az eredeti háromszöggel egybevágó derékszögű háromszög (hiszen befogói és a derékszög mind a 4 háromszögben megegyezik), ezeknek átfogója c .

Így tehát a középső PQRS síkidom minden oldala c .

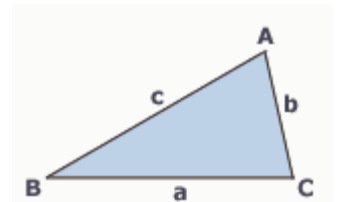
Az eredeti háromszögben $\alpha + \beta = 90^\circ$, ezért PQRS a síkidomnak minden szöge $180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$.

Tehát a PQRS síkidom egy c oldalú négyzet, területe pedig c^2 .

Ha mindkét négyzetből elvesszük a 4 darab derékszögű háromszöget, a maradékok területe is egyenlő, azaz: $a^2 + b^2 = c^2$

Pitagorasz-tétel megfordítása:

Ha egy háromszögben két oldal négyzetének összege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a harmadik oldallal szemben derékszög van. Azaz: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$.



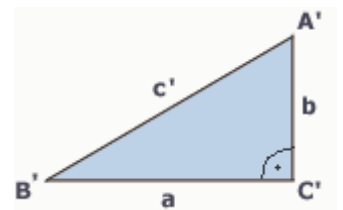
Bizonyítás:

Vegyünk fel egy $A'B'C'$ háromszöget, amely a és b befogójú és derékszögű. Ennek átfogóját jelöljük c' -vel.

Erre a háromszögre teljesül a Pitagorasz-tétel, tehát: $a^2 + b^2 = (c')^2$

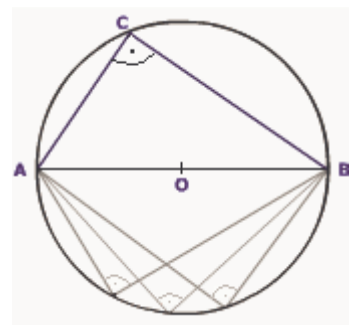
Viszont: $a^2 + b^2 = c^2$, így $c^2 = (c')^2 \Rightarrow c = c'$

Ez viszont azt jelenti, hogy a két háromszög egybevágó, mivel minden oldala megegyezik, tehát az eredeti ABC háromszög is derékszögű.



Thalész-tétel:

Ha egy kör egyik átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk, ahol a derékszög az átmérővel szemben van.



Bizonyítás:

Kössük össze a kör AB átmérőjének két végpontját a körvonal egy tetszőleges C pontjával.

Ekkor az OC szakasz két háromszögre bontja ABC $\triangle$ -et.

Mivel $OA = OB = OC$ a kör sugara, ezért

$AOC\triangle$ és $COB\triangle$ egyenlő szárúak.

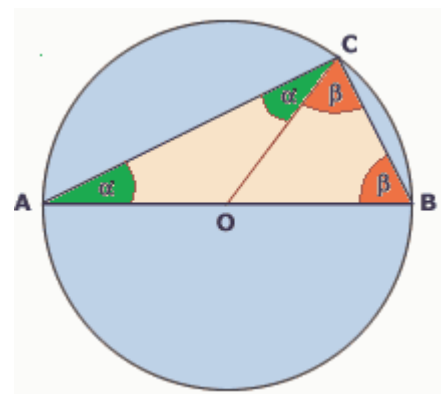
Így: $\angle CAO = \angle ACO = \alpha$ és

$\angle CBO = \angle BCO = \beta$.

Mivel ABC háromszög belső szögeinek összege:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ, \text{ így}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \text{ ami épp } \angle ACB.$$



Thalész-tétel megfordítása:

Ha egy AB szakasz egy C pontból derékszög alatt látszik, akkor C pont rajta van az AB átmérőjű körön. Ez másnéven AB szakasz *Thalész-köre*. Vagyis derékszögű háromszög köréírható körének középpontja az átfogójának felezőpontja.

Bizonyítás:

Indirekt: tfh, hogy $\angle ACB < 90^\circ$, de C csúcs nincs rajta az AB átmérőjű köríven.

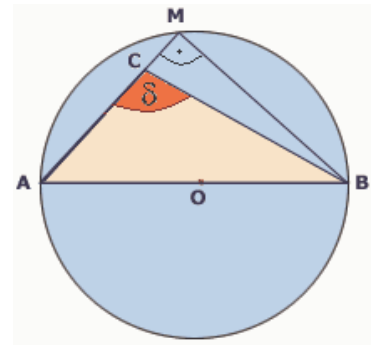
1. eset: C a köríven belül helyezkedik el.

Hosszabbítsuk meg az AC vagy BC egyenesét, hogy messe a körívet M pontban.

A Thalész-tétel miatt $\angle AMB = 90^\circ$.

$\angle ACB < \delta$ külső szöge $\triangle MCB$ -nek, így

$\angle ACB < \delta > 90^\circ$. Ez ellentmondás.



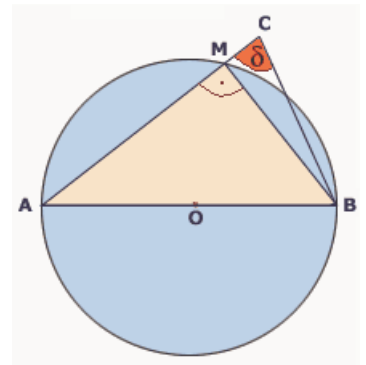
2. eset: C a köríven kívül helyezkedik el.

AC vagy BC egyenese közül valamelyik metszi a körívet M pontban.

A Thalész-tétel miatt $\angle AMB = 90^\circ$.

$\angle ACB < \delta$ belső szöge $\triangle MCB$ -nek, $\angle AMB$ pedig külső, így

$\angle ACB < \delta < 90^\circ$. Ez ellentmondás.

**Összefoglalva:**

Egy adott pontból akkor és csak akkor látszódik 90° alatt egy adott AB szakasz, ha az adott pont rajta van az AB-re mint átmérőre emelt köríven (A és B pontok kivételével). Azaz azon pontok halmaza a síkon, melyekből egy adott szakasz derékszög alatt látszik, az adott szakaszra, mint átmérőre emelt körív a szakasz végpontjainak kivételével (90° -os látószögekörív).

Magasságtétel:

Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek mértani közepe.

Azaz: $CT = \sqrt{AT \cdot TB}$, tehát $m = \sqrt{p \cdot q}$

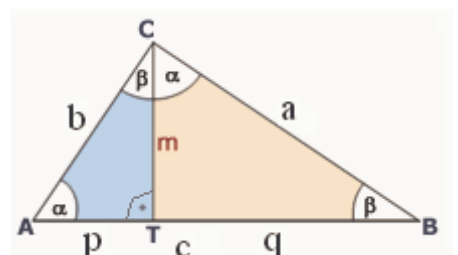
Bizonyítás:

$\angle ACT = \angle CBT = \beta$ és $\angle BCT = \angle CAT = \alpha$, mivel páronként merőleges szárú szögek.

Így tehát $\triangle ATC \sim \triangle CTA$, mivel minden szögük páronként megegyezik.

A megfelelő oldalak arányát felírva a két háromszögben:

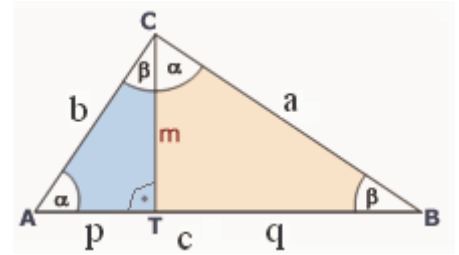
$$\frac{m}{p} = \frac{q}{m} \text{ amiből adódik: } m = \sqrt{p \cdot q}$$



Befogótétel:

Egy derékszögű háromszög befogója az átfogó és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének mértani közepe.

Azaz: $CA = \sqrt{AT \cdot AB}$, tehát $b = \sqrt{p \cdot c}$

**Bizonyítás:**

$\angle ACT = \angle CBT = \beta$ mivel merőleges szárú szögek

Így tehát $\triangle ATC \sim \triangle ACB$, mivel minden szögük páronként megegyezik.

A megfelelő oldalak arányát felírva a két háromszögben:

$$\frac{b}{p} = \frac{c}{b} \quad \text{amiből adódik: } b = \sqrt{p \cdot c}$$

Hegyesszögek szögfüggvényei:

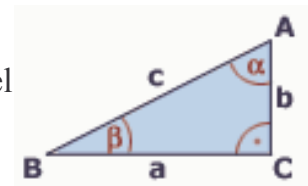
Egy hegyesszög **szinusza** egy derékszögű háromszögben a szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosa. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

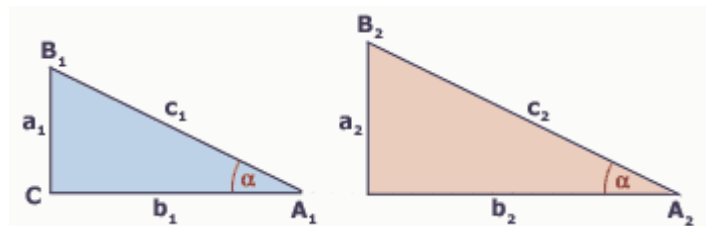
Egy hegyesszög **koszinusa** egy derékszögű háromszögben a szög melletti befogó és az átfogó hányadosa. Azaz az ábra jelöléseit használva: $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

Egy hegyesszög **tangense** egy derékszögű háromszögben a szöggel szemközti és a szög melletti befogó hányadosa. Azaz az ábra jelöléseit használva: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$

Egy hegyesszög **kotangense** egy derékszögű háromszögben a szög melletti befogó és a szöggel szemközti befogó hányadosa. Az ábra jelöléseit használva: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$



A definíció nem függ a háromszög választásától, mert az ilyen háromszögek hasonlóak (két szög megegyezik), az oldalak aránya állandó.



Szögfüggvények tulajdonságai: (hegyesszögek esetén)

1. $0 < \sin \alpha < 1$

2. $0 < \cos \alpha < 1$

3. $0 < \operatorname{tg} \alpha$

4. $0 < \operatorname{ctg} \alpha$

5. $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$

6. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

7. Visszakeresés:

$\sin \alpha = 0,6$ számológép: $\alpha = \sin^{-1} 0,6$ avagy $\alpha = \arcsin 0,6$

8. Négyzetes összefüggés:

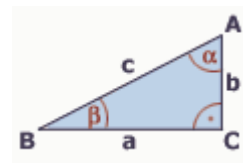
mellékmegjegyzés: $\sin(\alpha^2) \neq (\sin \alpha)^2$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{\text{Pitagorasz-tétel}}{c^2} \rightarrow \frac{c^2}{c^2} = 1$$

9. Pótszöges összefüggés: $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha$

$$\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$



10. Nevezetes szögek szögfüggvényei:

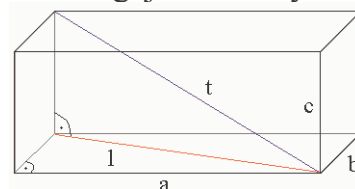
	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Alkalmazások:

Matematika:

- szabályos háromszög magasságának és oldalának aránya $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának és befogójának aránya $\sqrt{2}$
- téglatest testátlójának meghatározása:

$$l^2 = a^2 + b^2, \quad t^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
- geometriai számítások
- térgeometriai számítások
- területszámítás
- külső pontból körhöz húzott érintő szerkesztése (Thalész-kör) és hossza
- két szakasz mértani közepének szerkesztése (Thalész-kör)
- egyiptomi derékszög „szerkesztés” a 3, 4 és 5 pitagoraszai számhármassal és csomózott kötéllel
- hegyesszög szögfüggvényeinek definíciója



Egyéb:

- vektorok felbontása komponensekre (erők összegzése)
- építészet
- földmérés, térképészet (távolság és szögmeghatározás)
- szegélyléc, derékszög
- táblavonalzó
- lejtő, emelő, ék