

14. tétel: A háromszög nevezetes vonalai, pontjai és körei

Háromszög:

A háromszög az a síkbeli alakzat, amelyet a sík három pontja, és az azokat összekötő szakaszok határolnak, ha a három pont nem kollineáris.

A háromszög csúcsait nyomtatott nagy betűkkel (A, B, C), oldalait kisbetűkkel (a, b, c) - mindig az azonos betűjelű oldallal szemben az azonos betűvel ellátott csúcs - , belső szögeit pedig rendre: α, β, γ görög betűkkel jelöljük.

Egy háromszögben a belső szögek összege mindig 180° .

Egy háromszöget egyértelműen meghatároz:

(Ezek persze az egybevágósági alapesetek is.)

- három oldala
- két oldala és a közbezárt szöge
- egy oldala és a rajta fekvő két szöge
- két oldala és a hosszabb oldallal szemközti szöge

Háromszögek nevezetes vonalai:

Belső szögfelező:

A belső szöget felező egyenes. Mellesleg azon pontok halmaza a síkban, amelyek egyenlő távolságra vannak a szög két szárát alkotó oldalaktól.

Külső szögfelező:

A külső szöget felező egyenes. Merőleges a belső szögfelezőre.

Oldalfelező merőleges:

A háromszög egy oldalfelező merőlegese egy oldalszakasz felezőmerőlegese, vagyis egy oldalszakasz felezőpontjába állított merőleges egyenes. Mellesleg azon pontok halmaza a síkon, melyek a háromszög két csúcsától egyenlő távolságra vannak.

Magasságvonal:

a háromszög egyik csúcsából a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges egyenes.

Magasság: a magasságvonal talppontig tartó szakasza.

Súlyvonal:

A háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.

Középvonal: A háromszög két oldalfelezőpontját összekötő szakasz.

A háromszög nevezetes vonalai, pontjai:

Tétel:

A háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás:

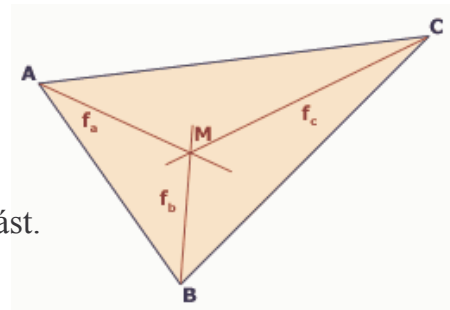
Húzzuk meg az A csúcsból induló f_a és a B csúcsból induló f_b belső szögfelezőket.

A szögfelező tulajdonsága alapján:

az f_a szögfelező minden pontja egyenlő távol van a $\triangle AC$ és AB oldalaitól

az f_b szögfelező minden pontja egyenlő távol van a $\triangle AB$ és BC oldalaitól

A két szögfelező metszi egymást egy M pontban. (Nem lehetnek párhuzamosak.)

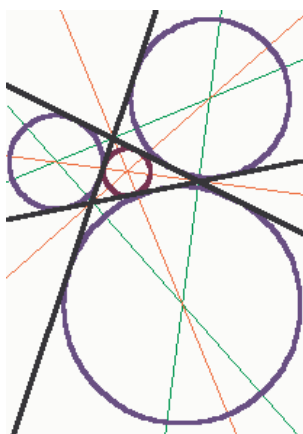
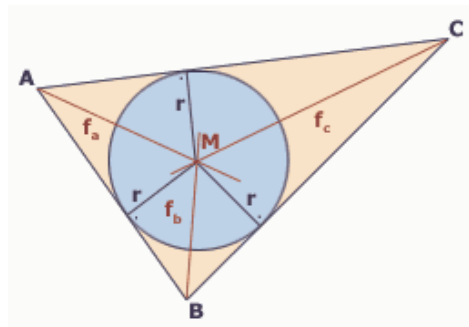


Mivel M pont rajta van mindkét szögfelezőn, ezért egyenlő távol van AC és AB illetve AB és BC oldalaktól is, ezért az AC és BC oldalaktól is.

Ebből pedig következik, hogy M pont f_c szögfelezőn is rajta van.

Így beláttuk, hogy a háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást.

Ez a pont a háromszög oldalait érintő *beírt kör középpontja*. A beírt kör sugarát megkapjuk, ha a szögfelezők metszéspontjából merőlegest bocsátunk a háromszög oldalaira.



Tétel:

A háromszög egy belső, és nem mellette fekvő két külső szögfelezője is egy pontban metszi egymást.

Ez a pont a háromszög (egyik) hozzáírt körének középpontja.

Így egy háromszöghöz három hozzáírt kör szerkeszthető.

Tétel:

A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás:

Húzzuk meg az $ABC\triangle$ AB illetve BC oldalainak felezőmerőlegeseit.

Az AB oldal felezőmerőlegese (e) és a BC oldal felezőmerőlegese (f) metszi egymást egy pontban (M), hiszen AB és BC nem párhuzamosak, ezért felezőmerőlegeseik sem azok.

A szakaszfelező merőleges tulajdonsága miatt:

Az e egyenes minden pontja, így M is egyenlő távol van A és B csúcsoktól.

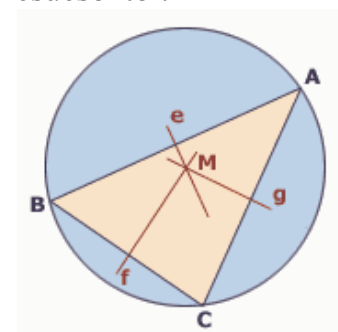
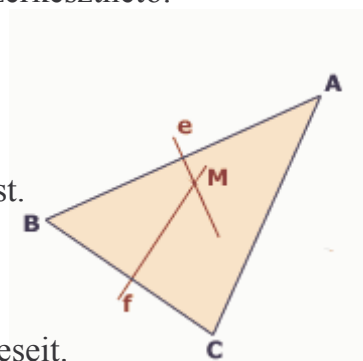
Az f egyenes minden pontja, így M is, egyenlő távol van B és C csúcsoktól.

Így az M pont egyenlő távol van A , B és C csúcsoktól is.

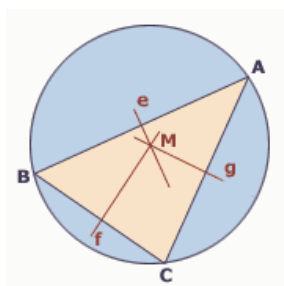
Tehát M illeszkedik AC felezőmerőlegesére (g) is.

Így beláttuk, hogy a háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást.

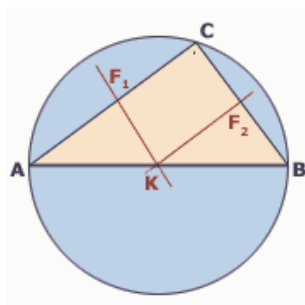
Ha M pont körül $AM = BM = CM = R$ sugárral kört húzunk, akkor az a háromszög mindhárom csúcsát tartalmazni fogja, M tehát a *körülírható kör* középpontja.



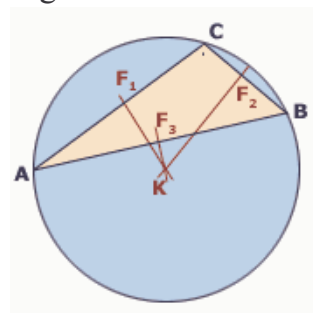
A körülírható kör középpontjának helyzete különböző háromszögeknél:



hegyesszögű $\triangle$
a háromszögön belül



derékszögű $\triangle$
az átfogó felezőpontja

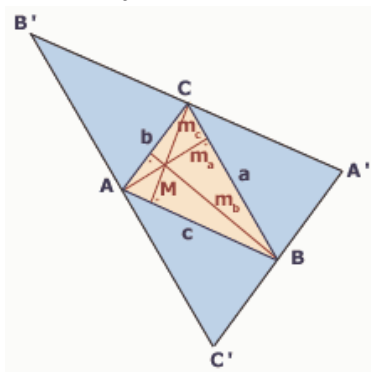


tompaszögű $\triangle$
a háromszögön kívül

Tétel:

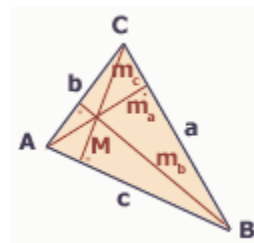
A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás:

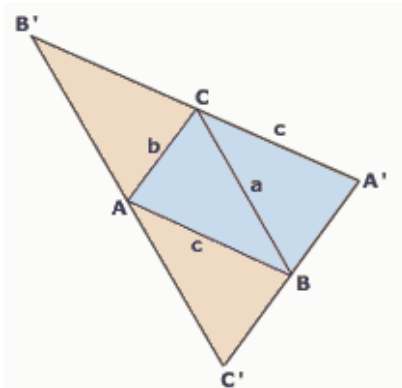


A csel:

Húzzunk az ABC háromszög minden csúcsán át párhuzamost a szemben lévő oldalakkal. Így megkapjuk az A'B'C' háromszöget.

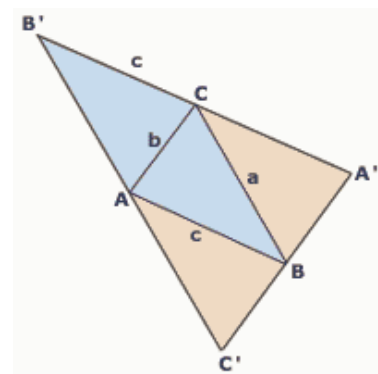


Az ABCB' négyszög paralelogramma, hiszen szemközti oldalai párhuzamosak. Tehát a szemben lévő oldalai egyenlők, azaz $AB = B'C = c$



Az ABA'C négyszög is paralelogramma, hiszen szemközti oldalai párhuzamosak. Tehát a szemben lévő oldalai egyenlők, azaz $AB = A'C = c$

Tehát ezek szerint C felezőpontja B'A' oldalnak.

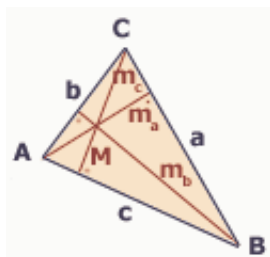


m_c merőleges AB oldalra így a vele párhuzamos B'A'-re is, mivel m_c áthalad C-n, azaz B'A' felezőpontján, ezért m_c egyenese épp B'A' felezőmerőlegese.

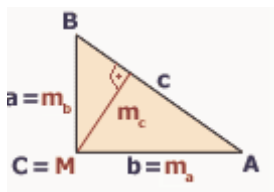
Hasonló módon belátható, hogy a másik két magasságvonal is A'B'C' háromszög megfelelő oldalának felezőmerőlegese. Ebből következik, hogy a ABC háromszög magasságvonalai (azaz a A'B'C' háromszög oldalfelező merőlegesei) egy pontban metszik egymást.

A magasságvonalak metszéspontját *magasságpontnak* nevezzük.

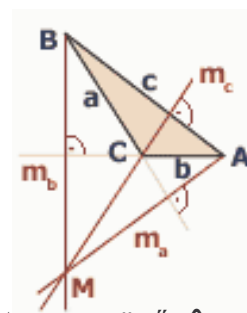
A magasságpont helyzete különböző háromszögeknél:



hegyesszögű $\triangle$
a háromszögön belül



derékszögű $\triangle$
a derékszögű csúcs



tompaszögű $\triangle$
a háromszögön kívül

Tétel:

A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás:

Húzzuk meg AE és BF súlyvonalakat.

Legyen ezek metszéspontja S.

EF szakasz ABC $\triangle$ középvonala, ezért

EF $\parallel$ AB, és $2 \cdot EF = AB$.

Mivel $\angle ASB = \angle FSE$ (csúcsszögek),

és $\angle ABS = \angle SFE$ (váltószögek)

Ezért $\triangle ASB \sim \triangle ESF$, és a hasonlóság aránya 1:2.

Ezért $SF : SB = SE : SA = 1:2$, így a két súlyvonal egymást harmadolja (úgy, hogy a $\frac{2}{3}$ rész esik a csúcs felé)

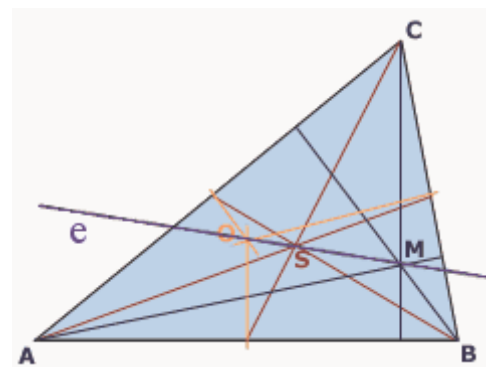
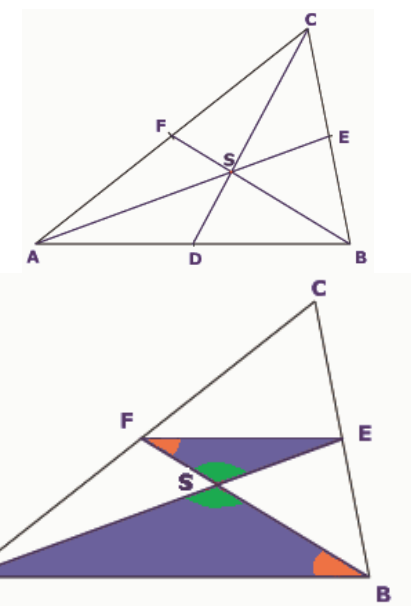
Mivel ez bármely két súlyvonalra hasonlóképp belátható, ezért mindhárom súlyvonal áthalad a közös harmadolóponton.

A súlyvonalak metszéspontját *súlypontnak* nevezzük. A súlypont tehát harmadolja a súlyvonalakat (hogy a csúcs felé esik a hosszabbik rész).

Tétel:

A háromszög körülírt körének középpontja, súlypontja és magasságpontja egy egyenesen fekszik, és a súlypont 1:2 arányban osztja a körülírt kör középpontját és a magasságpontot összekötő szakaszt.

Ez az egyenes az *Euler-egyenes* (e).

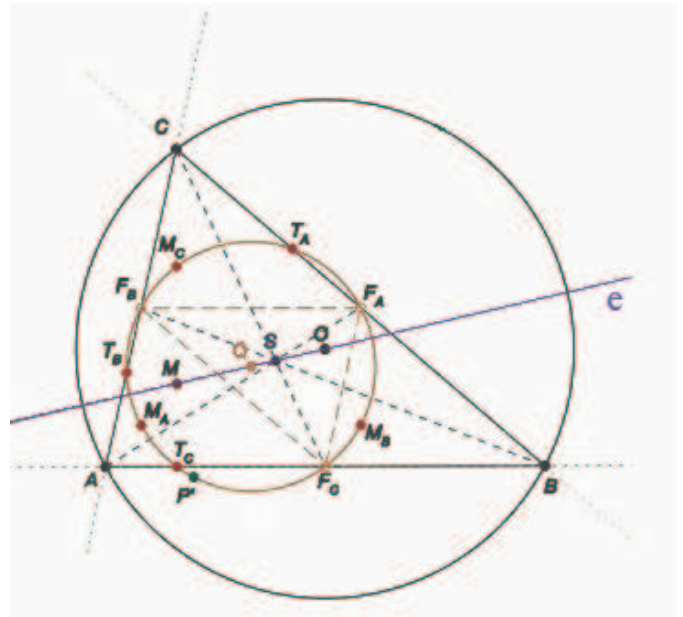


Tétel:

A háromszög oldalfelező pontjai (F_A , F_B , F_C), a magasságainak talppontjai (T_A , T_B , T_C), és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai (M_A , M_B , M_C) egy körön vannak. Ez a *Feuerbach-kör*.

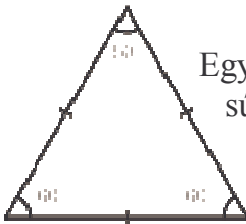
A kör középpontja a háromszög magasságpontja (M) és a körülírható kör középpontja (O) által alkotott szakasz felezőpontja (Q).

A kör a háromszög körülírt körének $\lambda = 1/2$ arányú kicsinyítése a magasságpontból.

**Speciális háromszögek:**

Egy egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szögek egyenlők.

Az alaphoz tartozó magasság, súlyvonal, oldalfelező merőleges és a szárszög szögfelezője megegyezik, így a nevezetes pontjai ezen találhatóak.



Egy egyenlő oldalú háromszög minden oldala és minden szöge egyenlő, súlyvonalai, magasságai, oldalfelező merőlegesei és belső szögfelezői egybeesnek.

Alkalmazások:

Matematika

- szerkesztési feladatok
- rózsablakos feladatok (körülírt körök, hozzáírt körök)
- oldalfelező merőleges (Thalesz-tétel)
- területszámítás (magasság, körös területképletek)
- szögfelező: szögfelezőtétel
- térgeometriai feladatokban (síkmetszeteknél)
- koordináta geometriában súlypont koordinátái a megfelelő koordináták átlaga

Egyéb:

- súlypont meghatározása (alátámasztások)