

15. tétel: Összefüggések a háromszög oldalai és szögei közt

Definíciók:

Háromszög csúcsai: három nem kollineáris pont. Jelölésük: A, B, C

Háromszög oldalai: a csúcsokat összekötő szakaszok. Jelölésük: a, b, c (a megfelelő csúcscsal szemközti betűvel)

Háromszög belső szöge: valamely két oldal, mint félegyenes által bezárt szög. Jelölésük: α, β, γ

Háromszög külső szöge: az egyik belső szög mellékszöge.

Hegyesszögű háromszög: minden szöge hegyesszög ($0^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$)

Derékszögű háromszög: egyik belső szöge derékszög.

Tompaszögű háromszög: egyik szöge tompaszög ($90^\circ < \gamma < 180^\circ$, de $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$)

Egyenlőszárú háromszög: két oldala egyenlő hosszúságú, ezeket *sárak*nak nevezzük, a harmadik oldal az *alap*.

Egyenlő oldalú háromszög: minden oldala egyenlő.

Tétel (axióma is lehetne): háromszög-egyenlőtlenség:

Egy háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál: $a + b > c$

Tétel:

Egy háromszög belső szögeinek összege 180° .

Bizonyítás:

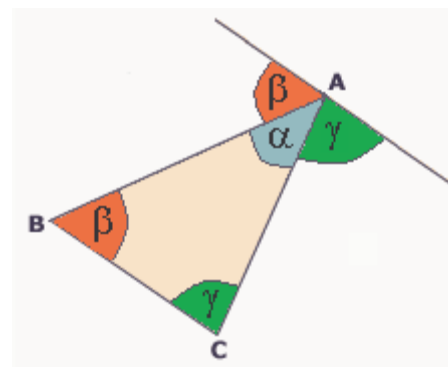
Húzzunk párhuzamost A-n keresztül BC oldallal!

Ekkor A csúcsnál is γ és β szögek keletkeznek (váltószögek).

Így $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

(A Bolyai-geometriában $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$,

a gömbi-geometriában pedig $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$.)



Tétel:

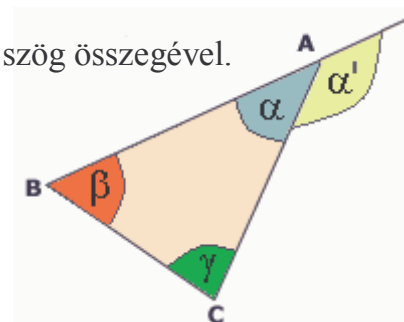
A háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.

Bizonyítás:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (\text{belső szögek összege})$$

$$\alpha + \alpha' = 180^\circ \quad (\text{szög és mellékszög összege})$$

$$\Rightarrow \alpha' = 180^\circ - \alpha$$



Tétel:

A háromszög külső szögeinek összege 360° .

Bizonyítás:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 540^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ$$

↑
mellékszög

↑
összevonás

↑
belső szögek összege

Tétel:

Egy háromszögben két oldal akkor és csak akkor egyenlő, ha a velük szemkötti szögek is. Azaz : $a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$

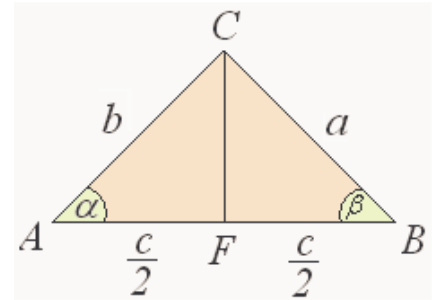
Bizonyítás:

1. $a = b \Rightarrow \alpha = \beta$

Kössük össze a harmadik oldal felezőpontját a két oldal közös csúcsával! Ekkor két egybevágó háromszög keletkezik, $\triangle AFC \cong \triangle BFC$, mert oldalaik páronként megegyeznek. Ebből következik, hogy az azonos oldalak által közbezárt szögek is egyenlők ($\alpha = \beta$).

A háromszögek egybevágóságából az is következik, hogy

$\angle AFC = \angle BFC = 90^\circ$, vagyis az alaphoz tartozó súlyvonal magasság is.



2. $\alpha = \beta \Rightarrow a = b$

Indirekt, tfh $\alpha = \beta$ de $a \neq b$, feltehető, hogy $a < b$.

Ilyenkor létezik $AC=b$ oldalnak egy olyan D belső pontja, melyre $AD = a$.

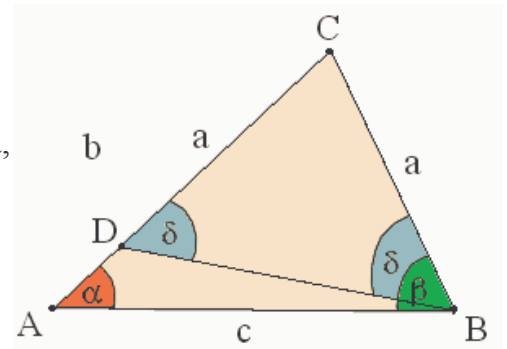
$\triangle CDB$ tehát így egyenlőszárú, így az előző rész miatt:

$$\angle CDB = \angle CBD = \delta,$$

és $\alpha < \delta$ ($\triangle ADB$ belső és külső szöge)

ill. $\delta < \beta$ (mivel benne van)

Ebből: $\alpha < \beta$, ami ellentmondás.

**Tétel:**

Egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van és fordítva:

Azaz : $a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta$

Bizonyítás:

1. $a < b \Rightarrow \alpha < \beta$

Ilyenkor létezik $AC=b$ oldalnak egy olyan D belső pontja, melyre $AD = a$.

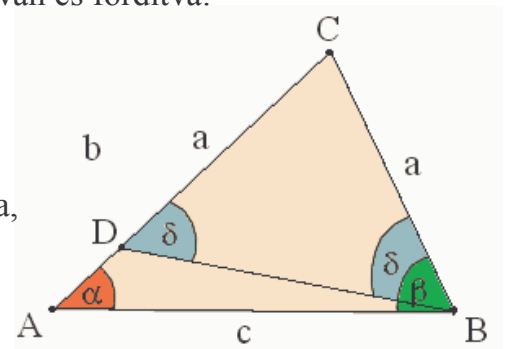
$\triangle CDB$ tehát így egyenlőszárú, és az előző tétel miatt:

$$\angle CDB = \angle CBD = \delta,$$

és $\alpha < \delta$ ($\triangle ADB$ belső és külső szöge)

ill. $\delta < \beta$ (mivel benne van)

Ebből: $\alpha < \beta$, amit bizonyítani szerettünk volna.



2. $\alpha < \beta \Rightarrow a < b$

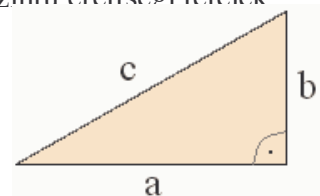
Indirekt, tegyük fel, hogy $\alpha < \beta$, de $a \geq b$.

ha $a = b$, akkor $\alpha = \beta$ az előző tétel miatt. Ez ellentmondás.

ha pedig $a > b$, akkor $\alpha > \beta$ az előző rész miatt. Ez is ellentmondás.

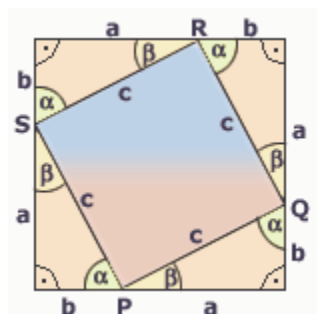
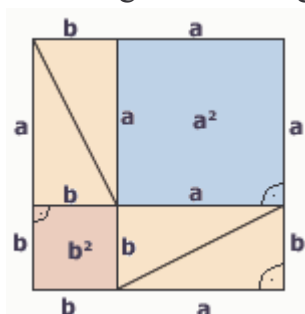
Pitagorasz-tétel:

Egy derékszögű háromszög két befogójának négyzetösszege az átfogó négyzete. Azaz: $\gamma = 90^\circ \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

**Bizonyítás:**

A tétel bizonyításában felhasználjuk azt az euklideszi axiómát, hogy „Ha egyenlő területekből egyenlő területeket veszünk el, akkor a maradék területek is egyenlők.”

Készítsünk két darab $(b + a)$ oldalú négyzetet az alábbi módon: ahol a és b a derékszögű háromszög befogói.



A $(b + a)$ oldalú négyzetek területe nyilvánvalóan egyenlő (2. axióma, területszámítás).

A baloldali négyzetben kaptunk 4 darab, az eredeti háromszöggel egybevágó derékszögű háromszöget (hiszen befogói és a derékszög megegyezik), és egy a illetve b oldalú négyzetet. Ezek területe a^2 és b^2 területegység.

A jobb oldali négyzetben is megtalálható ez a 4 darab, az eredeti háromszöggel egybevágó derékszögű háromszög (hiszen befogói és a derékszög mind a 4 háromszögben megegyezik), ezeknek átfogója c .

Így tehát a középső PQRS síkidom minden oldala c .

Az eredeti háromszögben $\alpha + \beta = 90^\circ$, ezért PQRS a síkidomnak minden szöge $180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$.

Tehát a PQRS síkidom egy c oldalú négyzet, területe pedig c^2 .

Ha mindkét négyzetből elvesszük a 4 darab derékszögű háromszöget, a maradékok területe is egyenlő, azaz: $a^2 + b^2 = c^2$

Pitagorasz-tétel megfordítása:

Ha egy háromszögben két oldal négyzetének összege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a harmadik oldallal szemben derékszög van. Azaz: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$.

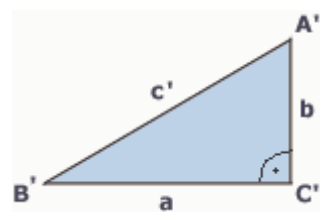
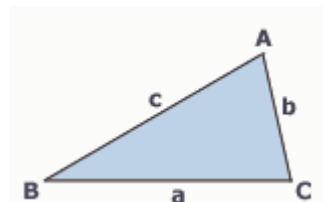
Bizonyítás:

Vegyünk fel egy a és b befogójú derékszögű háromszöget. Ennek átfogóját jelöljük c' -vel.

Erre a háromszögre teljesül a Pitagorasz-tétel, tehát: $a^2 + b^2 = (c')^2$

Viszont: $a^2 + b^2 = c^2$, így $c^2 = (c')^2 \Rightarrow c = c'$

Ez viszont azt jelenti, hogy a két háromszög egybevágó, mivel minden oldala megegyezik, tehát az eredeti ABC háromszög is derékszögű.

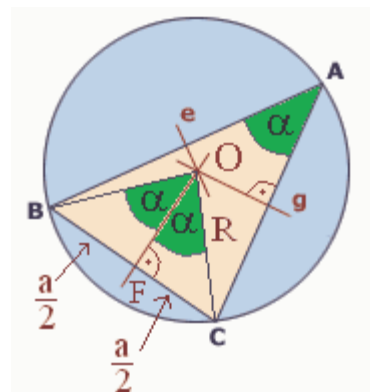


Összefüggés a háromszög oldalai és köréírt körének sugara közt:

Megrajzolva a háromszög köréírt körét (oldalfélező merőlegesek), a $\angle BAC = \alpha$ a kör A-t nem tartalmazó BC ívének kerületi szöge. Így $\angle BOC = 2\alpha$ a kerületi és középponti szögek tétele miatt. Ezért $\angle BOF = \angle COF = \alpha$.

Fölírva egy szögfüggvényt: $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$

Tompaszögű és derékszögű háromszög esetében is igaz.

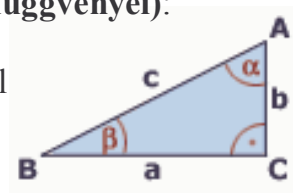
**Trigonometria derékszögű háromszögekben (hegyesszögek szögfüggvényei):**

Egy hegyesszög **szinusza** egy derékszögű háromszögben a szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosa. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

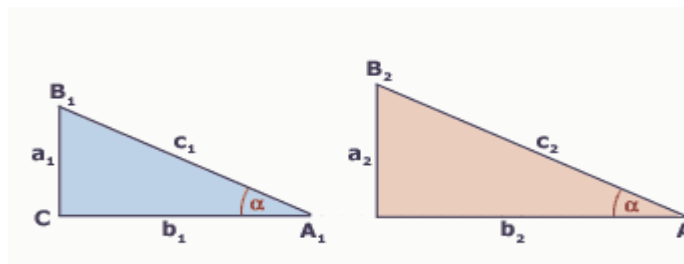
Egy hegyesszög **koszinusa** egy derékszögű háromszögben a szög melletti befogó és az átfogó hányadosa. Azaz az ábra jelöléseit használva: $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

Egy hegyesszög **tangense** egy derékszögű háromszögben a szöggel szemközti és a szög melletti befogó hányadosa. Azaz az ábra jelöléseit használva: $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

Egy hegyesszög **kotangense** egy derékszögű háromszögben a szög melletti befogó és a szöggel szemközti befogó hányadosa. Az ábra jelöléseit használva: $\cot \alpha = \frac{b}{a}$



A definíció nem függ a háromszög választásától, mert az ilyen háromszögek hasonlóak (két szög megegyezik), az oldalak aránya állandó.



Szögfüggvények tulajdonságai: (hegyesszögek esetén)

1. $0 < \sin \alpha < 1$

2. $0 < \cos \alpha < 1$

3. $0 < \tan \alpha$

4. $0 < \cot \alpha$

5. $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \tan \alpha$

6. $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

7. Viisszakeresés:

$\sin \alpha = 0,6$ számológép: $\alpha = \sin^{-1} 0,6$ $\alpha = \arcsin 0,6$

8. Négyzetes összefüggés:

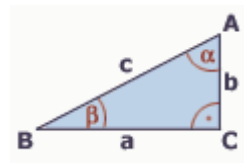
mellékmegjegyzés: $\sin(\alpha^2) \neq (\sin \alpha)^2$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} \xrightarrow{\text{Pitagorasz-tétel}} \frac{c^2}{c^2} = 1$$

9. Pótszöges összefüggés: $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha$

$$\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$



Szinusztétel:

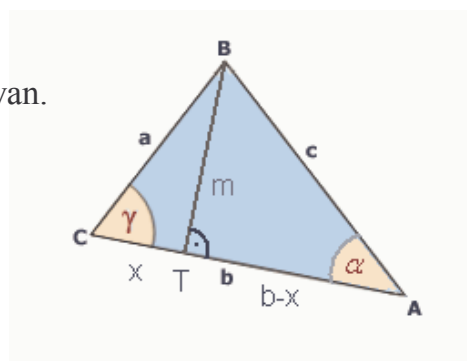
Egy háromszögben két oldal aránya megegyezik a velük szemben levő szögek szinuszaival arányával. Azaz: $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$

1. $0^\circ < \alpha; \gamma < 90^\circ$

A B-ből induló magasság talppontja (T) AC-n belül van.

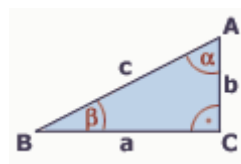
$$\text{BTA} \Delta \Rightarrow \sin \alpha = \frac{m}{c} \quad \text{illetve} \quad \text{CTB} \Delta \Rightarrow \sin \gamma = \frac{m}{a}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\frac{m}{c}}{\frac{m}{a}} = \frac{m}{c} \cdot \frac{a}{m} = \frac{a}{c}$$



2. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ és $\gamma = 90^\circ$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha}{\sin 90^\circ} = \frac{a}{c}$$



3. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ és $\gamma > 90^\circ$

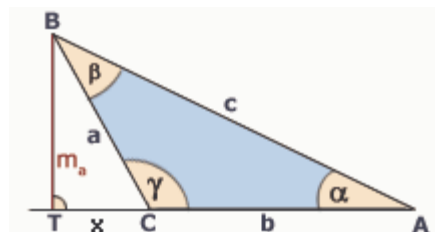
A B-ből induló magasság talppontja (T) AC-n kívül van

$$\text{BTC} \Delta \Rightarrow \angle BCT = 180^\circ - \gamma \quad \text{és} \quad \sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma = \frac{m}{a}$$

$$\text{ATB} \Delta \Rightarrow \sin \alpha = \frac{m}{c}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\frac{m}{c}}{\frac{m}{a}} = \frac{m}{c} \cdot \frac{a}{m} = \frac{a}{c}$$

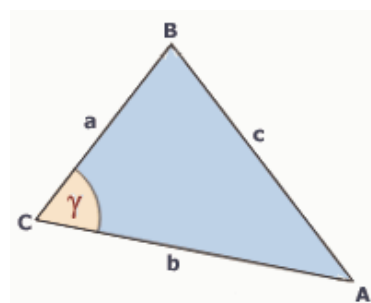
Q. E. D.



Koszinusztétel:

Bármely háromszögben az egyik oldal négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetösszegéből kivonjuk e két oldal és az általuk közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Bizonyítás:

1. $0^\circ < \gamma < 90^\circ$

A B-ből induló magasság talppontja (T) AC- n belül van

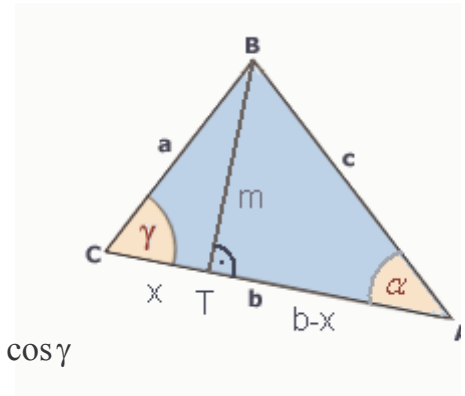
BTCΔ

$$\Rightarrow x^2 + m^2 = a^2 \Rightarrow m^2 = a^2 - x^2$$

$$\Rightarrow \cos \gamma = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cdot \cos \gamma$$

BTAAΔ

$$c^2 = m^2 + (b - x)^2 = m^2 + b^2 - 2bx + x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

2. $\gamma = 90^\circ$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \xrightarrow{\cos 90^\circ = 0} c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{ami épp a Pitagorasz-tétel}$$

3. $\gamma > 90^\circ$ A B-ből induló magasság talppontja (T) AC- n kívül van
BTC $\angle = 180^\circ - \gamma$

BTCΔ

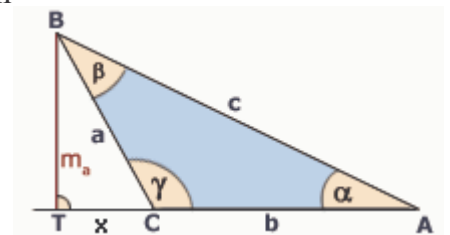
$$\Rightarrow x^2 + m^2 = a^2 \Rightarrow m^2 = a^2 - x^2$$

$$\Rightarrow \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma = \frac{x}{a} \Rightarrow x = -a \cdot \cos \gamma$$

BTAAΔ

$$c^2 = m^2 + (b + x)^2 = m^2 + b^2 + 2bx + x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Q. E. D.



Alkalmazások:

- sokszögek belsőszög-összege
- szabályos háromszög magasságának és oldalának aránya $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának és befogójának aránya $\sqrt{2}$
- nevezetes szögfüggvények értéke (30° , 45° , 60°)
- vektorok felbontása (merőleges) komponensekre (fizikában erők összegzése)
- terület és térfogatképletek
- térgeometriában síkmetszeteknél
- a háromszög oldalainak, szögeinek kiszámítása (koszinusz- ill. szinusztétel)
- területszámítás
- térképészet, csillagászat: távolságok számítása