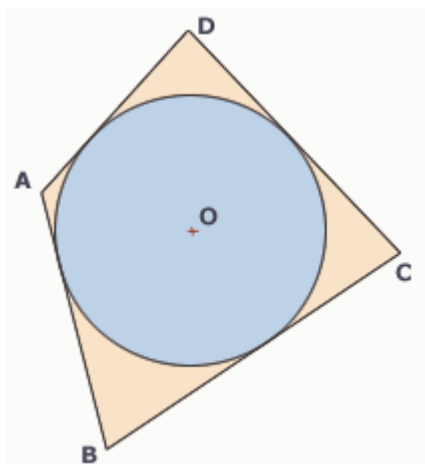


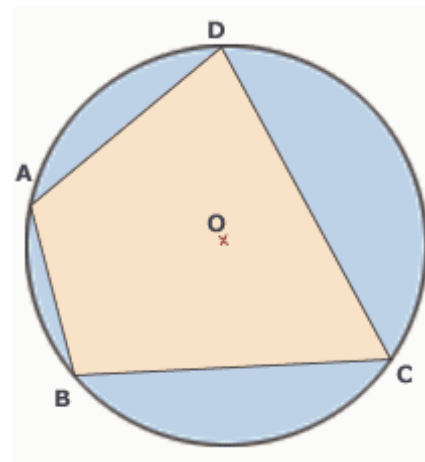
16. tétel:
Húrnégyszög, érintőnégyszög és szimmetrikus négyszögek

Sokszög: A sík egy önmagát át nem metsző zárt töröttvonal által határolt véges része.

Húrnégyszög: Olyan konvex négyszög, melynek minden oldala ugyanazon kör egy-egy húrja. Oldalfelelező merőlegesei a kör középpontjában metszik egymást. Pl.: négyzet, téglalap, szimmetrikus trapéz, derékszögű deltoid.



Érintőnégyszög: Olyan konvex négyszög, melynek oldalai ugyanazon kör érintői. Belső szögfelezői a kör középpontjában metszik egymást. Pl.: négyzet, rombusz, deltoid, szimmetrikus trapéz abban az esetben, ha magassága mértani közepe a párhuzamos oldalai hosszának.



Húrnégyszögek tétele: Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor szemközti szögeinek összege 180° .

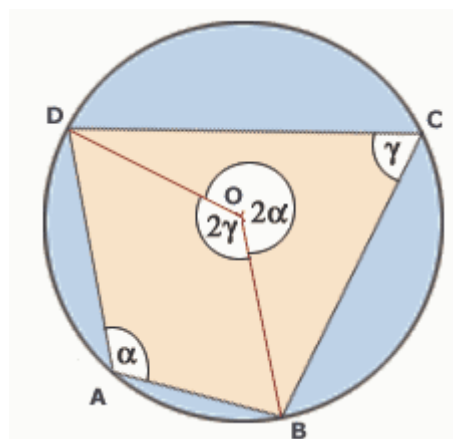
Bizonyítás:

Kössük össze a négyszög két szemközti csúcsát a kör középpontjával. Az ábrán a B és D csúcsokat.

A **kerületi és középponti szögek tétele** értelmében a BAD kerületi szöghöz (α) tartozó BOD középponti szög ennek kétszerese (2α). Ugyanígy, a BCD kerületi szöghöz (γ) tartozó BOD középponti szög ennek kétszerese (2γ).

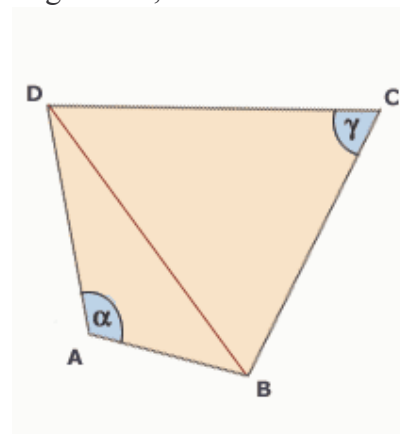
Mivel $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$, ezért $\alpha + \gamma = 180^\circ$

Ezt kellett bizonyítani.



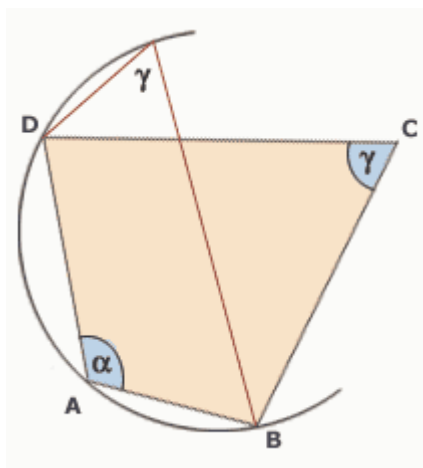
A tétel megfordítása: Ha egy négyszög szemközti szögeinek összege 180° , akkor az a négyszög húrnégyszög.

Bizonyítás: Tekintsük az ABCD négyszöget, amelynek szemközti szögeinek összege 180° . Vegyük a mellékelt ábrát, $\alpha + \gamma = 180^\circ$.



Kössük össze az B és D csúcsokat, az α és a γ szögekkel szemközti átlót.

Húzzuk meg az ABD háromszög köréírt körét. Ilyen mindig van. Azt még nem bizonyítottuk, hogy ez átmegy-e a negyedik C csúcson.



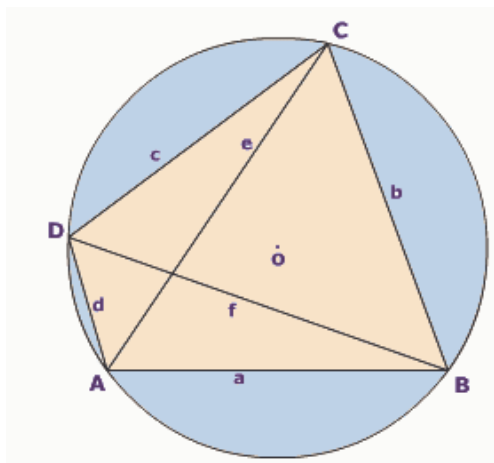
Jelöljük ki ennek a körívnek tetszőleges C' pontját a B és D pontok között (A BD átló azon oldalán, ahol a C pont van). Az ABC'D négyszög húrnégyszög, ezért a C' csúcsnál lévő szög az α szög kiegészítő szöge, tehát a BC'D szög = γ .

Mivel az összes olyan pont, amelyből a BD átló γ szög alatt látszik, a BD átlóhoz tartozó szimmetrikus látóköríveken van, ezért a C pontnak szintén ugyanezen köríveken valamelyikén kell lenni. Csak az a körív jöhet szóba, amelyik a BD átlónak az A csúccsal ellentétes oldalán van. A másik látóköríven nem lehet, mert akkor az ABCD négyszög nem konvex, hanem konkáv lenne.

Ptolemiosz tétele:

A körbe írt négyszög átlóinak szorzata egyenlő a szemközti oldalak szorzatának összegével.

Jelöléssel: $AB \cdot DC + BC \cdot AD = AC \cdot BD$, azaz
 $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$



Érintőnéyszögek tétele:

Ha egy négyszög érintőnéyszög, akkor szemközti oldalainak összege egyenlő.

Bizonyítás:

Tudjuk, hogy egy körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő.

Ezért a mellékelt ábra jelöléseit használva:

$AE = AH = a$; $BE = BF = b$; $CF = CG = c$; $DH = DG = d$.

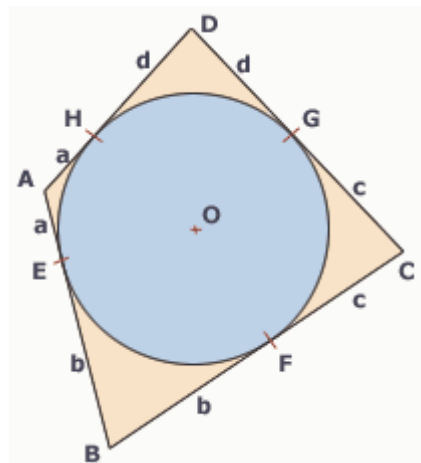
Így:

$$AD + BC = (a + d) + (b + c),$$

$$AB + CD = (a + b) + (c + d)$$

Tehát:

$$AD + BC = AB + CD$$



Az érintőnégystétel megfordítása:

Ha egy négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, akkor az a négyszög érintőnégyszög.

Szimmetrikus négyszögek:

Tengelyesen szimmetrikus négyszögek:

Egy alakzat tengelyesen szimmetrikus, ha van olyan egyenes, melyre tükrözve az alakzat invariáns, azaz a képe önmaga.

Szimmetrikus trapéz: Olyan konvex négyszög, melynek van párhuzamos oldalpárja (alapok), az egy száron fekvő szögek összege 180° , és az egy alapon fekvő szögek egyenlők. A trapéz az alapok felezőpontjai által meghatározott tengelyre szimmetrikus.

Deltoid: Olyan négyszög, melynek két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú. Az átlók merőlegesen felezik egymást. Legalább egyik átlója egyben szimmetriatengely is.

Középpontosan szimmetrikus négyszögek:

Egy alakzat középpontosan szimmetrikus, ha van olyan pont, melyre tükrözve az alakzat invariáns, azaz a képe önmaga.

Paralelogramma: Olyan konvex négyszög, melynek szemközti oldalai párhuzamosak. Szemközti oldalai és szögei egyenlők, átlói felezik egymást. Az egy oldalon fekvő szögek egymást 180° -ra egészítik ki. Speciális trapéz. Középpontosan szimmetrikus, szimmetriaközéppontja az átlók metszéspontja.

Tengelyesen és középpontosan szimmetrikus:

Rombusz: Olyan konvex négyszög, melynek oldalai egyenlők. Mindkét átlója szimmetriatengely. Speciális deltoid és paralelogramma. Tengelyesen és középpontosan szimmetrikus.

Téglalap: Olyan konvex négyszög, melynek minden szöge derékszög, átlói egyenlők. Speciális trapéz és paralelogramma. Középvonalai szimmetriatengelyek, az átlók metszéspontja szimmetria középpont.

Négyzet: Olyan konvex négyszög, melynek minden szöge, oldala egyenlő. Speciális trapéz, paralelogramma, téglalap, deltoid és rombusz. Átlói, középvonalai szimmetriatengelyek, az átlók metszéspontja szimmetria középpont.

Forgásszimmetrikus négyszögek:

Egy alakzat forgásszimmetrikus, ha van olyan pont és szög ($\alpha \neq 360^\circ \cdot k$), amelyre a pont körül az adott szöggel elforgatva az alakzat invariáns, azaz a képe önmaga.

Forgásszimmetrikus négyszögek a középpontosan szimmetrikus négyszögek.

A nevezetes négyszögek közül húrnégyszög a szimmetrikus trapéz, a derékszögű deltoid, a téglalap és a négyzet.

A nevezetes négyszögek közül érintőnégyszög a deltoid, a rombusz, a négyzet és az érintőnégyszög tételnek eleget tevő trapéz.

Alkalmazások:

Matematika:

- területképlet: $T_{\text{érintőnégyszög}} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ illetve

$$T_{\text{húrnégyszög}} = r \cdot s$$

- koordinátageometriai alkalmazások
- kocka

Egyéb:

- építészetben használatos szimmetrikus formák
- papírsárkány ☺
- fizika: súlypont meghatározása