

17. tétel: Egybevágósági transzformációk. Szimmetrikus sokszögek.

Geometriai transzformáció:

Olyan függvény, melynek értelmezési tartománya és értékkészlete is egy-egy ponthalmaz (vagyis pontokhoz rendel pontokat). Egy adott pont képét vesszővel jelöljük.

Identitás:

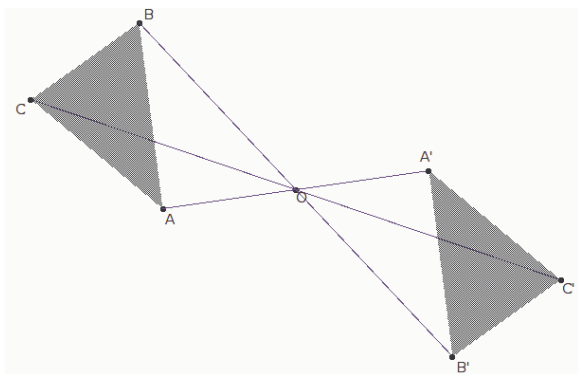
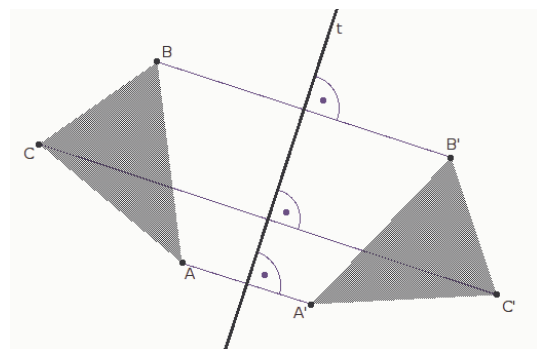
Minden pont képe önmaga. $P' = P$.

Tengelyes tükrözés:

Adott egy t egyenes (a tengely) a síkon.

Egy adott síkbeli P pont képe az a P' , melyre

- ha $P \in t$, akkor $P' = P$, azaz a tengely pontjainak képe önmaga;
- ha $P \notin t$, akkor PP' szakasz felezőmerőlegese épp t tengely.



Középpontos tükrözés:

Adott egy O pont (középpont) a síkon.

Egy adott síkbeli P pont képe az a P' , melyre

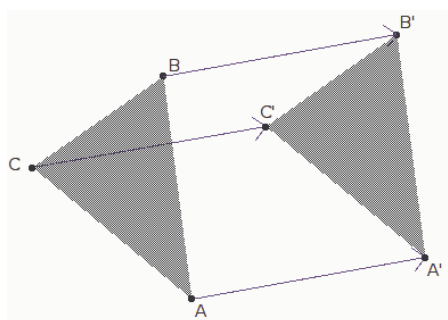
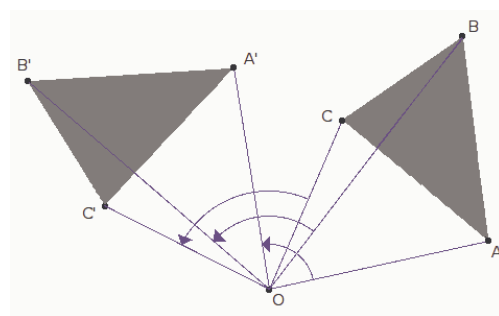
- ha $P = O$, akkor $P' = P = O$, azaz a középpont képe önmaga;
- ha $P \neq O$, akkor PP' szakasz felezőpontja épp O középpont.

Pont körüli forgatás:

Adott egy O pont (középpont) a síkon és egy α irányított szög.

Egy adott síkbeli P pont képe az a P' , melyre

- ha $P = O$, akkor $P' = P = O$, azaz a középpont képe önmaga;
- ha $P \neq O$, akkor $PO = P'O$ és $\angle POP' = \alpha$.



Párhuzamos eltolás:

Adott egy $\underline{v}$ vektor a síkon. Egy adott síkbeli P pont képe az a P' , melyre $\overrightarrow{PP'} = \underline{v}$.

Középpontos hasonlóság:

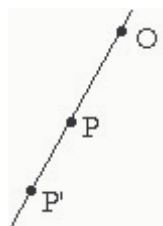
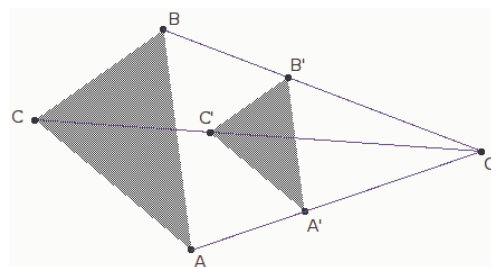
Adott a síkon egy O középpont és egy $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ arány.

A sík tetszőleges P pontjának legyen képe az a P' síkbeli pont, melyre

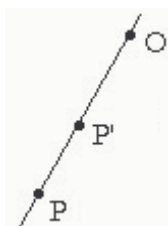
- ha $P = O$, akkor $P' = P = O$, azaz a középpont képe önmaga;
- ha $P \neq O$, akkor P' az a pont OP egyenesén,

melyre $\frac{OP'}{OP} = |\lambda|$, és ha $\lambda < 0$, akkor O

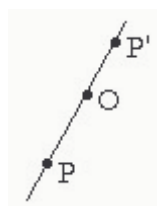
elválasztja P -t és P' -t, ha $\lambda > 0$, akkor nem.



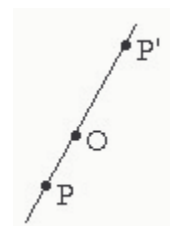
$\lambda > 1$



$0 < \lambda < 1$



$-1 < \lambda < 0$



$\lambda < -1$

Transzformációk szorzata:

Két transzformáció szorzata a két függvény kompozíciója (egymásutánja). Jele: $f \circ g$.

Transzformáció inverze:

Ha egy $f : D_f \rightarrow R_f$ transzformáció bijektív (vagyis kölcsönösen egyértelmű), akkor inverze az a $g : R_f \rightarrow D_f$ transzformáció, melyre $f \circ g = \text{identitás}$. Jele: $f^{-1} = g$.

Transzformáció fix pontja:

Olyan pont, melynek képe a transzformációnál önmaga.

Invariáns alakzat:

Olyan alakzat, melynek képe a transzformációnál önmaga (nem feltétlenül minden pontja fixpont).

Fix alakzat:

Olyan alakzat, melynek minden pontja fixpont. (Természetesen ez invariáns is.)

Egybevágósági (távolságtartó) transzformáció:

Olyan transzformáció, mellynél bármely két pont képeinek távolsága megegyezik az eredeti pontok távolságával, azaz $P'Q' = PQ$ minden P -re és Q -ra.

Tétel:

A sík egybevágósági transzformációi: a tengelyes tükrözés, a pont körüli forgatás és a párhuzamos eltolás, valamint ezek tetszőleges szorzatai.

Minden síkbeli egybevágósági transzformáció alakzat- és szögtartó is, illetve van inverze.

Két alakzat *egybevágó*, ha létezik olyan egybevágósági transzformáció, amelyik az egyik alakzatot a másik alakzatba viszi. (A háromszögekre ennél egyszerűbb feltételeket is mondhatunk, ezek a háromszög-egybevágósági alapesetek.)

	fix pontok	invariáns egyenes	körüljárás	inverz
identitás	minden pont	minden egyenes fix	körüljárástartó	önmaga
tengelyes tükrözés (t tengelyű)	a tengely pontjai	a tengely fix egyenes, a tengelyre merőleges egyenesek invariánsak	körüljárásváltó	önmaga
középpontos tükrözés (O középpontú)	a középpont	középponton áthaladó egyenesek invariánsak	körüljárástartó	önmaga
pont körüli forgatás (O középpontú α szögű)	a középpont	középponton áthaladó egyenesek invariánsak $\alpha=180^\circ$ esetén	körüljárástartó	O középpontú α szögű pont körüli forgatás
eltolás ($\underline{v}$ vektorral)	nincs	a $\underline{v}$ -vel párhuzamos egyenesek	körüljárástartó	$-\underline{v}$ vektorral való eltolás

Háromszög-egybevágóság alapesetei:

Két háromszög akkor és csak akkor egybevágó, ha az alábbi esetek valamelyike teljesül:

- (1) megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlő;
- (2) két-két oldalhosszuk és az ezek által közrefogott szögek nagysága egyenlő;
- (3) egy oldaluk és két-két szögük páronként egyenlő nagyságú
- (4) két-két oldalhosszuk megegyezik és a nagyobbikkal szemközt levő szögek nagysága egyenlő;

Szimmetrikus sokszögek:

Egy (síkbeli vagy térbeli) alakzat *konvex*, ha bármely két pontjával együtt a két pontot összekötő szakasz pontjai is az alakzathoz tartozik.

Egy (síkbeli vagy térbeli) alakzat *konkáv*, ha nem konvex, azaz van olyan az alakzat két pontját összekötő szakasz, amelyik nem tartozik teljes egészében az alakzathoz.

Középpontosan szimmetrikus alakzat:

Egy sokszög középpontosan szimmetrikus, ha van olyan középpontos tükrözés, amelyre nézve az alakzat invariáns, azaz képe önmaga.

Tengelyesen szimmetrikus alakzat:

Egy alakzat tengelyesen szimmetrikus, ha van olyan tengelyes tükrözés, amelyre nézve az alakzat invariáns, azaz képe önmaga.

Forgásszimmetrikus alakzat:

Egy alakzat forgásszimmetrikus, ha van olyan pont és egy szög ($\alpha \neq 360^\circ \cdot k$), amelyre nézve az alakzat invariáns, azaz képe önmaga.

Szimmetrikus négyszögek:

Tengelyesen szimmetrikus négyszögek:

Deltoid: Olyan négyszög, melynek két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú. Az átlóik merőlegesen felezik egymást. Legalább egyik átlója egyben szimmetriatengely is.

Szimmetrikus trapéz: Olyan konvex négyszög, melynek van párhuzamos oldalpárja (alapok), az egy száron fekvő szögek összege 180° , és az egy alapon fekvő szögek egyenlők. A trapéz az alapok felezőpontjai által meghatározott tengelyre szimmetrikus.

Középpontosan szimmetrikus négyszögek:

Paralelogramma: Olyan konvex négyszög, melynek szemközti oldalai párhuzamosak. Szemközti oldalai és szögei egyenlők, átlói felezik egymást. Az egy oldalon fekvő szögei egymást 180° -ra egészítik ki. Speciális trapéz. Középpontosan szimmetrikus, szimmetriaközéppontja az átlók metszéspontja. Forgásszimmetrikus is ugyanerre a középpontra $\alpha = 180^\circ$ -os forgatással.

Tengelyesen és középpontosan szimmetrikus:

Rombusz: Olyan konvex négyszög, melynek oldalai egyenlők. Mindkét átlója szimmetriatengely. Speciális deltoid, paralelogramma. Tengelyesen (az átlóira) és középpontosan szimmetrikus (az átlók metszéspontjára) illetve forgásszimmetrikus is.

Téglalap: Olyan konvex négyszög, melynek minden szöge derékszög. Átlói egyenlők. Speciális trapéz, paralelogramma. Középvonalai szimmetriatengelyek, az átlók metszéspontja szimmetriaközéppont.

Négyzet: Olyan konvex négyszög, melynek minden szöge, oldala egyenlő. (Szabályos négyszög.) Speciális trapéz, paralelogramma, téglalap, deltoid és rombusz. Átlói, középvonalai szimmetriatengelyek, az átlók metszéspontja szimmetriaközéppont (és forgásközéppont is $\alpha = 90^\circ$ -os forgatással).

Forgásszimmetrikus négyszögek:

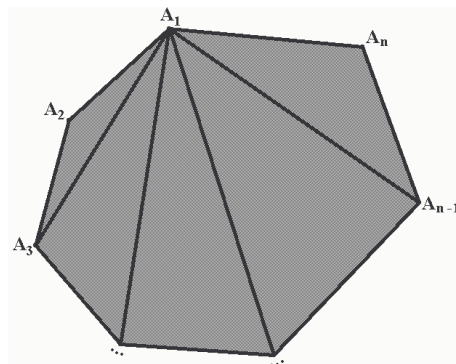
Forgásszimmetrikus négyszögek a középpontosan szimmetrikus négyszögek.

Tétel:

Egy n oldalú konvex sokszög átlóinak száma: $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$

Bizonyítás:

Egy n oldalú konvex sokszög egy csúcsából önmagába és a két szomszédos csúcsba nem húzható átló, ezért bármelyik csúcsába $n-3$ átló húzható. Mindegyik csúcsot figyelembe véve ez $n \cdot (n-3)$ átlót jelentene, viszont mivel mindegyik átlót mindkét végpontjánál számoltuk, ezért valójában az átlók száma ennek a fele.

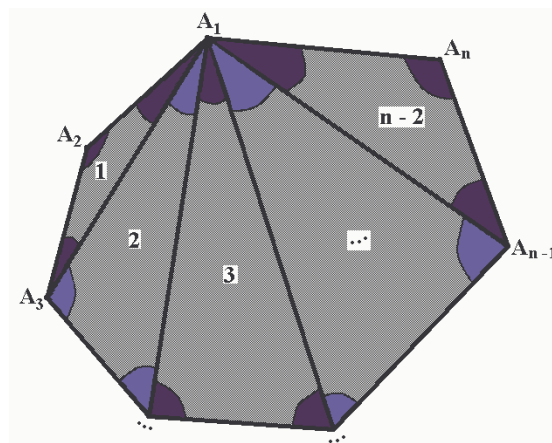


Tétel:

Egy n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege: $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Bizonyítás:

Az n oldalú konvex sokszög egy csúcsából $n-3$ átló húzható. Ez az $n-3$ átló a sokszöget $n-2$ darab háromszögre bontja. Ezen háromszögek belső szögeit összeadva a sokszög belső szögeinek összegét kapjuk.



Egy sokszög *külső szöge* az egyik belső szögének mellékszöge.

Tétel:

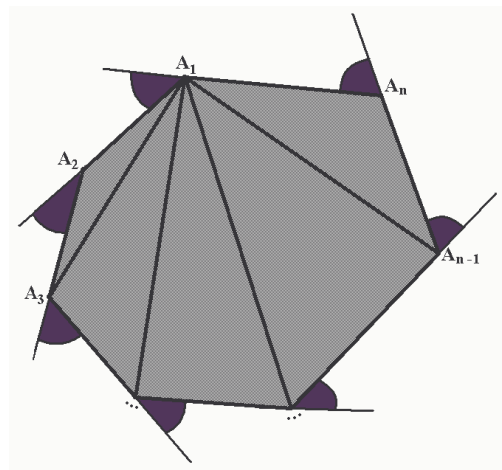
Bármely konvex sokszög külső szögeinek összege 360° .

Bizonyítás:

A sokszög minden szögének és a hozzá tartozó külső szögnek összege 180° . Az n oldalú sokszög esetében ezek összege $n \cdot 180^\circ$ fok. Az előző tétel szerint ebből a belső szögek összege $(n-2) \cdot 180^\circ$ fok.

külsőszög-

$$\text{összeg} = n \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ = (n - n + 2) \cdot 180^\circ = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

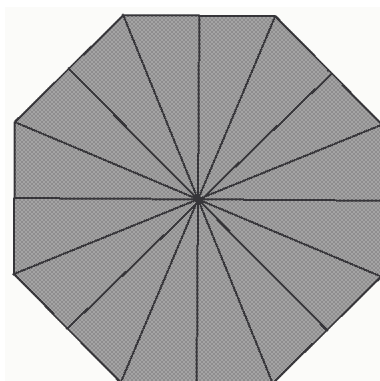


Szabályos sokszögek:

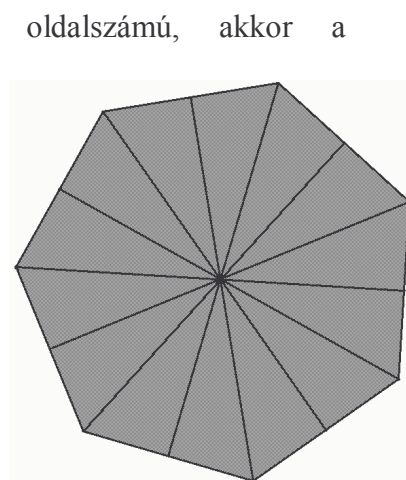
Egy sokszög szabályos, ha belső szögei egyenlőek és oldalai ugyanakkorák.

A szabályos n -szög a körülírt kör középpontjára nézve $\frac{360^\circ}{n}$ fokban forgásszimmetrikus.

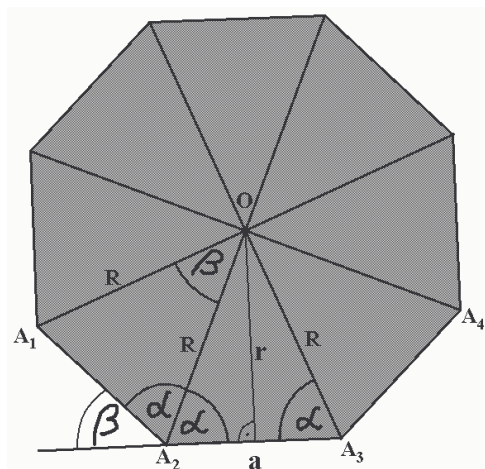
Minden szabályos sokszög tengelyesen szimmetrikus is.



Ha a szabályos sokszög páros oldalszámú, akkor a szimmetriatengelyét úgy kaphatjuk meg, hogy a szemkötti csúcsokat összekötjük, vagy úgy, hogy a szemkötti oldalak oldalfelezőit. Minden páros oldalszámú szabályos sokszög középpontosan szimmetrikus is.



Páratlan oldalszámú szabályos sokszög szimmetriatengelyei egy csúcsot kötnek össze a szemkötti oldal felezőpontjaival.



Az n -oldalú szabályos sokszög központi és külső szöge:

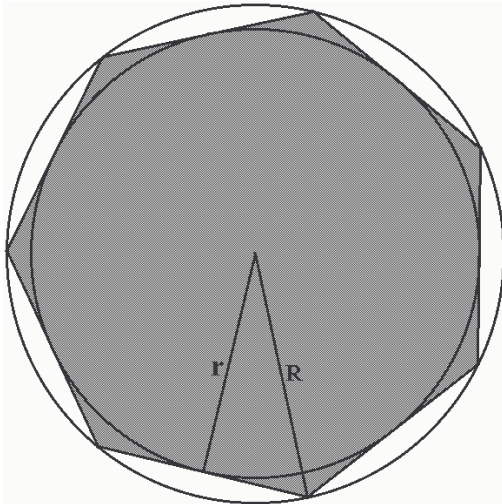
$$\beta = \frac{360^\circ}{n} \quad (\text{mert a külső és központi szögei egyenlőek}).$$

Az n -oldalú szabályos sokszög egy belső szöge:

$$2\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \quad (\text{mert a belső szögei egyenlőek}).$$

Ha összekötjük a középpontot a szabályos n -szög csúcsaival, akkor n db egybevágó egyenlő szárú háromszöget kapunk (amelyeknek egyenlő szára a

sokszög köréíráható körének sugara (R), alapja a sokszög oldala (a), az alaphoz tartozó magassága pedig a sokszög beíráható körének sugara (r).



A szabályos sokszög köréírható körének sugara:

$$R = \frac{a}{2 \cdot \cos \alpha} = \frac{a}{2 \cdot \sin(\beta/2)}.$$

A szabályos sokszög beírható körének sugara:

$$r = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot a}{2} = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg}(\beta/2)}.$$

A háromszögek területe (így a sokszög területe is) többféleképp kiszámolható:

$$T_{\text{sokszög}} = n \cdot T_{\triangleright} = n \cdot \frac{a \cdot r}{2} = n \cdot \frac{R^2 \cdot \sin \beta}{2}$$

Alkalmazások:

- transzformációval megoldható szerkesztési feladatoknál
- fényvisszaverődés törvénye (tengelyes tükrözés)
- mozgások leírása
- *természetes szimmetriák*: a méhek szabályos hatszögekből alkotott lépet készítenek, mert az a legnagyobb oldalszámú szabályos sokszög, amelyből a sík hézagmentesen kirakható és amely alkalmazásával a legkisebb viaszszükséglettel lehet a legnagyobb tároló térfogatot biztosítani (ugyanis a legnagyobb a terület/kerület arány)
- *molekulák térszerkezete*: például a kén-trioxid síkháromszög szerkezetű, a kötősszögek mind 120° -osak, vagy a benzolgyűrű szabályos hatszög alakú.
- *π közelítése*: a π -t a kör területének minél többoldalú szabályos sokszögekkel való közelítésével lehet kiszámolni
- kör területének meghatározása
- sík parkettázása
- *szerkeszthetőség*: egy szabályos sokszög akkor és csak akkor szerkesztő (euklidészi módon), ha az oldalainak száma $2^n \cdot p$, ahol $p = 2^{2^k} + 1$ alakú prímszám (Fermat prím) és n tetszőleges pozitív egész. (Mint például a 3, 5, 17, 65537 – eddig nem is ismerünk többet...)
- *szabályos testek*: véges számú szabályos test van, ezek lapjai szabályos sokszögekből állnak, ilyen a tetraéder (4 szabályos háromszög), a kocka, az oktaéder (8 darab szabályos háromszög), a pentagon-dodekaéder (12 darab ötszög), ikozaéder (20 darab szabályos háromszög)
- speciális dobókockák különböző játékokhoz