

18. tétel:**A kör és részei, kör és egyenes kölcsönös helyzete, kerületi és középponti szögek****Kör:**

Azon pontok halmaza a síkon, melyek egy adott ponttól (középpont), adott egyenlő távolságra (sugár) vannak.

$$\text{kör} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid PO = r, r > 0\}$$

$$\text{zárt körlap} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid PO \leq r, r > 0\} \quad \text{nyílt körlap} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid PO < r, r > 0\}$$

A kör részei, definíciók:

Ív: a körvonal két pontja közé eső körvonal-darab

Érintő: egyenes, amelynek egy közös pontja van a körrel (érinti)

Szelő: olyan egyenes, amely két pontban metszi a kört

Húr: a szelő körbe eső szakasza (a körív két pontját összekötő szakasz)

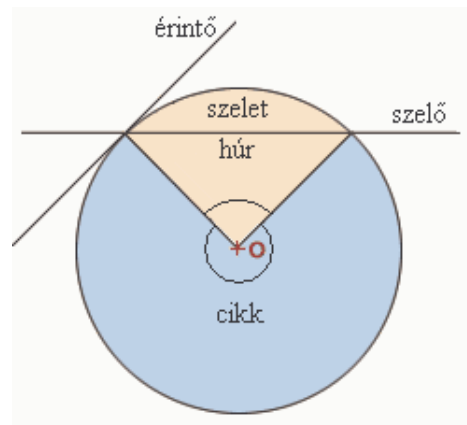
Átmérő: a középponton átmenő húr

Körcikk: a körlap két sugár közé eső része

Körselet: a körlap a szelő által lemetezett síkrész

Körsáv: a két szelő közé eső körlap-darab

Körgyűrű: két koncentrikus kör között lévő pontok halmaza



Fok: a körív 360-ad részéhez tartozó középponti szög mérőszáma.

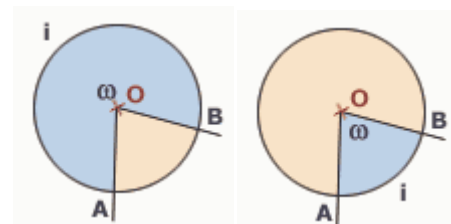
Újfok (gradián): a körív 400-ad részéhez tartozó középponti szög mérőszáma.

Radián (ívmérték): sugárnyi ívhez tartozó középponti szög mérőszáma. Dimenzió nélküli mértékegység.

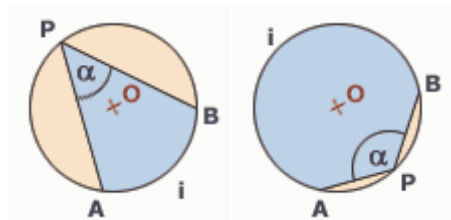
Középponti szög:

Olyan szög, melynek két szára a kör két sugara (illetve azok félegyenese)

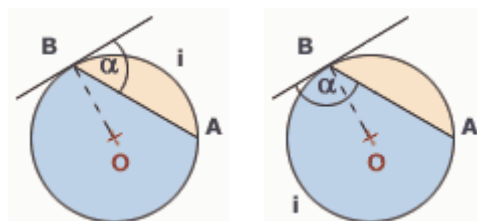
Egy középponti szög (ω) a körvonal egy ívén nyugszik (AB ív), a körlapból egy körcikket (AOB) határoz meg. Az AB ív a körüljárás irányával együtt határozza meg egyértelműen a középponti szöget.

**Kerületi szög:**

1. A körben a kerületi szög (α) csúcsa (P) a körön van, a szög két szára a kör két húra, illetve azok félegyenese. Egy kerületi szög (α) a körvonal egy ívén nyugszik (AB ív).



2. **Érintőszárú kerületi szög:** A körben a kerületi szög (α) csúcsa (B) a körön van, szög egyik szára a kör húra (illetve annak félegyenese), a másik szára a kör érintője.



Tétel (kerületi és középponti szögek tétele):

Egy körben az azonos ívhez tartozó középponti és kerületi szögek aránya 2 : 1.
Azaz egy kör adott (AB) íven nyugvó kerületi szög (α) feleakkora, mint az ugyanezen (AB) íven nyugvó középponti szög (ω). Azaz: $\omega = 2\alpha$

Bizonyítás:

A tételt több lépésben bizonyítjuk.

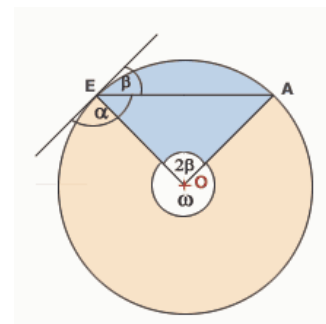
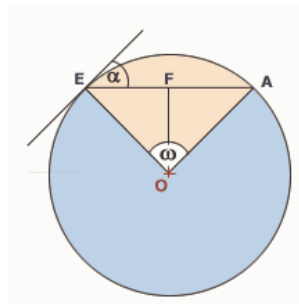
1. Érintő szárú kerületi szög, és $\alpha < 90^\circ$

Az EOA egyenlőszárú háromszög (szárjai a kör sugara) EA oldalhoz tartozó OF magassága felezi az ω középponti szöget, azaz

$$\angle EOF = \angle FOA = \frac{\omega}{2}$$

Az α szög és az EOF szög merőleges szárú hegyesszögek, így egyenlők, tehát:

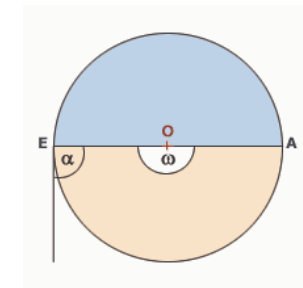
$$\angle EOF = \frac{\omega}{2} = \alpha \quad \text{vagyis} \quad \omega = 2\alpha.$$



2. Érintő szárú kerületi szög, és $\alpha > 90^\circ$.

Az előzőekből tudjuk, hogy α szög β mellékszögéhez ($\alpha = 180^\circ - \beta$) tartozó középponti szög 2β .

Mivel $\omega = 360^\circ - 2\beta = 2 \cdot (180^\circ - \beta) = 2\alpha$, tehát: $\omega = 2\alpha$.



3. Érintő szárú kerületi szög, és $\alpha = 90^\circ$.

Ekkor a kerületi szög másik szára (EA) kör átmérője, így $\omega = 180^\circ$. Tehát ebben az esetben is teljesül, hogy $\omega = 2\alpha$.

4. Kerületi szög mindkét szára húr:

Húzzuk meg α kerületi szög E csúcsában a kör érintőjét. Ekkor két érintőszárú kerületi szög is keletkezik: α_1 és α_2 . Ezekhez tartozó középponti szögek: ($\angle BOE$ illetve $\angle AOE$) a fenti esetekből következően $2\alpha_1$ és $2\alpha_2$.

A kerületi szögek együtt:

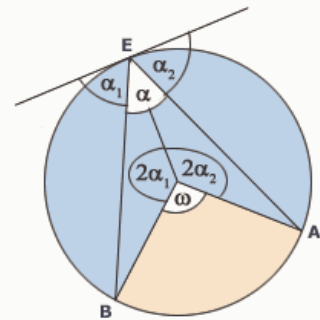
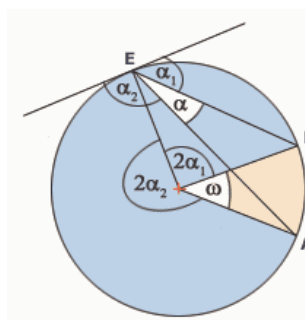
$$\alpha_1 + \alpha + \alpha_2 = 180^\circ$$

A középponti szögek együtt:

$$2\alpha_1 + \omega + 2\alpha_2 = 360^\circ. \quad \text{Ezt osztva 2-vel:}$$

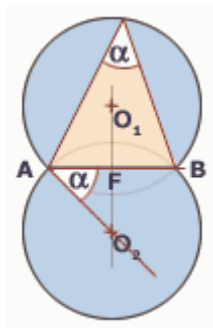
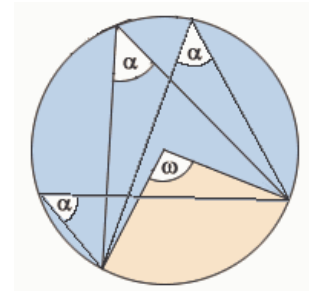
$$\alpha_1 + \omega/2 + \alpha_2 = 180^\circ$$

A két egyenlőségből következik, hogy ebben az esetben is $\omega = 2\alpha$.



Következmény: (kerületi szögek tétele)

Közös íven nyugvó kerületi szögek egyenlők. (Hiszen a középponti szög helyzete nem változik, csak a kerületi.)

**Tétel:**

Azon pontok halmaza a síkon, amelyekből egy adott AB szakasz adott szög alatt látszik, két, az AB egyenesére szimmetrikus körív, melyeknek az AB szakasz húrja, kivéve az A és B pontokat

Ennek neve: *látószöggörv*. Az $\alpha = 90^\circ$ -os látószöggörv esetén a két félkör együtt épp a Thalész kört adja ki.

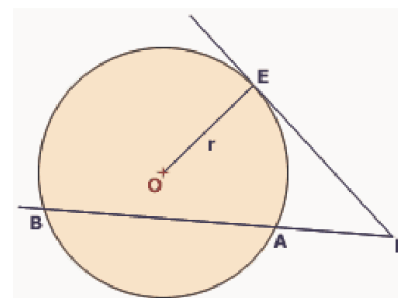
Szerkesztése adott szakasz és szög esetén: a szakasz két végpontjában a szakaszra felmérjük az adott szöget, a szögszárak metszéspontja az egyik körív középpontja.

Tétel (körhöz húzott szelőszakaszok tétele):

A körhöz egy külső pontból húzott érintőszakasz mértani közepe a külső pontból a körhöz húzott szelőszakaszoknak, azaz a szelőszakaszok szorzata állandó.

$$PE^2 = PA \cdot PB$$

A körön belüli P ponton áthaladó húr szakaszainak szorzata szintén állandó.

**Kör és egyenes kölcsönös helyzete:**

- A kört egy egyenes elkerülheti, érintheti vagy metszheti.
- Egyenesnek és körnek tehát 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet.
- A kör egy adott pontjához csak egy érintő, a körön kívül fekvő bármely pontjából a körhöz két érintő húzható.

Tételek:

Adott körben a középponti szögek nagysága és a hozzájuk tartozó körívek hosszai egyenesen arányosak. Ebből következik, hogy az ív hossza, a hozzá tartozó középponti szög, a kör kerülete és a teljes szög között az alábbi aránypár írható fel:

$$\frac{i}{K_{\text{kör}}} = \frac{\omega}{360^\circ}$$

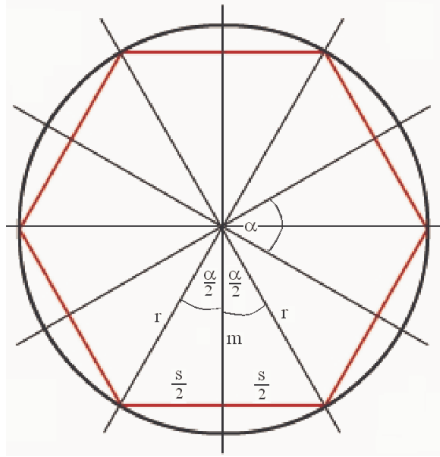
A középponti szög és a hozzá tartozó körív hossza között fennálló egyenes arányosság teszi lehetővé a szög mérését ívmértékben (radiánban). Ekkor a 360° -nak a 2π radián felel meg. (Az egységsugarú kör kerülete, mint ívhossz.)

Adott körben a középponti szögek nagysága és a hozzájuk tartozó köríkek területe egyenesen arányosak. Így a köríkek területe, a hozzá tartozó középponti szög, a kör területe és a teljes szög között az alábbi aránypár írható fel:

$$\frac{T_{\text{köríkek}}}{T_{\text{kör}}} = \frac{\omega}{360^\circ}$$

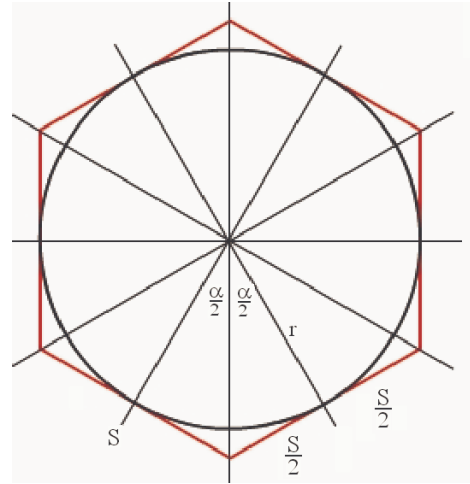
A kör kerülete:

A kör területét tetszőleges pontossággal meghatározhatjuk a körbe és a kör köré írt szabályos sokszögek területéből. Legyen a körbe írt szabályos n -szög egy oldala s , a kör köré írt szabályos n -szög egy oldala pedig S .



$$T_{be} = n \cdot \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$K_{be} = n \cdot 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$



$$T_{körü} = n \cdot r \cdot \frac{S}{2} = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$K_{körü} = n \cdot 2 \cdot r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

A kör kerülete a beírt illetve körülírt sokszögek kerületei közt van.

A kör kerülete így: $K = 2r\pi$ -nek adódik, ha levezetnénk mint a területet alább.

Kör területe:

szabályos sokszögek területével közelítjük (alulról és felülről)

$$T_{beírt\,sokszög} \leq T_{kör} \leq T_{körülírt\,sokszög} \quad \text{vagyis:} \quad \frac{r^2 \sin \frac{2\pi}{n}}{2} \cdot n \leq T_{kör} \leq \frac{2r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{2} \cdot n$$

$$\text{tehát} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2 \sin \frac{2\pi}{n}}{2} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = r^2 \pi$$

$$(* \text{ legyen } y = \frac{2\pi}{n}, \text{ így kritikus rész határértéke: } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1)$$

$$\text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = r^2 \pi$$

$$(* \text{ legyen } y = \frac{\pi}{n}, \text{ így: } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\cos y} = 1 \text{ és } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1)$$

és ekkor a rendőrlv miatt:

$$r^2 \pi \leq T_{kör} \leq r^2 \pi \Rightarrow T_{kör} = r^2 \pi$$

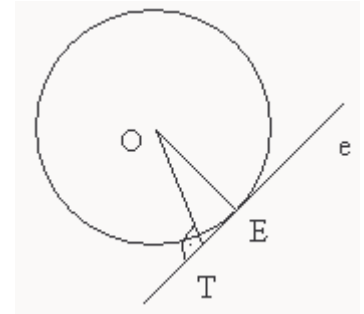
Tétel:

A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.

Biz: Indirekt

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz e érintő nem merőleges az E érintési pontban húzott sugárra.

A kör O pontjából bocsássunk merőlegest az e érintőre, a merőleges talppontja legyen T (ami persze nem lehet E). Ekkor az OTE háromszögnek T -nél derékszöge van, és az ezzel szemkötti OE oldala a sugár. A derékszögű háromszögnek az $OE=r$ az átfogója, az $OT < r$ befogója lenne. Ez azonban lehetetlen, mert ekkor a T a kör belső pontja lenne, az e érintőegyenest pedig nem lehet belső pontja.

**Tétel:**

Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő.

Biz.:

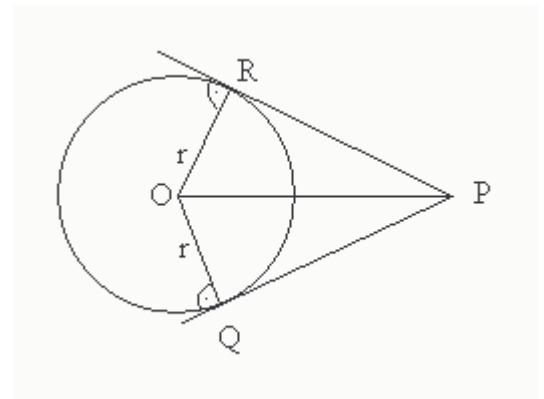
Az OQP és az ORP háromszögek egybevágóak, mivel:

$$OR = OQ = r$$

OP közös

A nagyobbik oldallal szemkötti szög egyenlő.

A két háromszög egybevágósága miatt $RP = QP$, vagyis a külső pontból húzott érintő szakaszok hossza egyenlő.

**Alkalmazások:**

- húrnégyszögtétel (középponti és kerületi szögek)
- érintőnéyszög-tétel (körhöz húzott érintőszakaszok)
- látószögekírv szerkesztési feladatoknál (vagy Thalesz-kör)
- szögmérés (radián)
- körmozgás, forgómozgás, elfordulás szöge, szögsebesség
- kör területének, kerületének kiszámítása voltaképp alkalmazás
- külső pontból érintő szerkesztése körhöz (Thalesz-körrel)
- két kör közös érintőinek megszerkesztése (ékszíj hossza)
- kördiagramok készítése