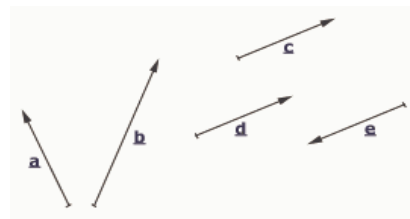


19. tétel: Vektorok. Szakaszok a koordinátasíkon.

Vektor: Irányított szakasz, melynek állása, iránya és hossza van.

Jele: $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$

Vektor abszolút értéke: A vektort meghatározó irányított szakasz nagysága. Jele: $|\underline{v}| = AB$



Vektorok kölcsönös helyzete:

1. Két vektor *párhuzamos* vagy *egyállású*, ha az őket meghatározó irányított szakaszok egyenesei párhuzamosak.
2. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok *egyirányúak*, ha párhuzamosak és ugyanabba az irányba mutatnak.
3. Két vektor *ellentétes* irányú, ha párhuzamosak, de nem egyirányúak.
4. Két vektor *egyenlő*, ha irányuk, állásuk, és nagyságuk egyenlő.
(Azaz a vektorok önmagukkal párhuzamosan szabadon eltolhatók.)

Nullvektor: Olyan vektor, melynek abszolútértéke 0. Iránya és állása tetszőleges.

Jele: $\underline{0}$, $|\underline{0}| = 0$

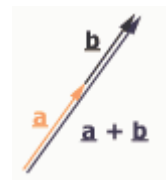
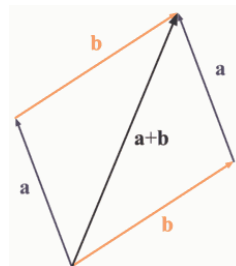
Ellentettvektor: Olyan vektor, amelynek állása és nagysága megegyezik egy adott vektorral, de iránya más. Jele: $-\underline{v}$

Vektorműveletek:

1. Vektorösszeadás:

Háromszög módszer:

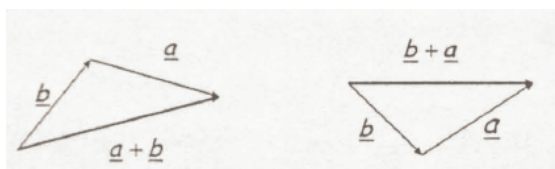
Az egyik vektor kezdőpontját a másik végpontjába toljuk, és az összegvektor az eredeti kezdőpontjából mutat az eltolt vektor végpontjába.



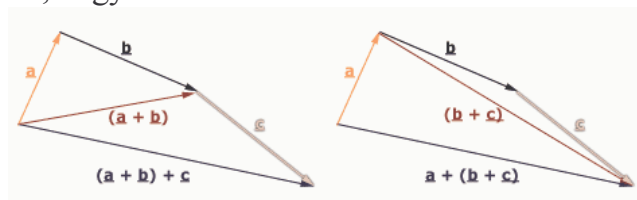
Paralelogramma módszer: (csak nem egyállású vektorokhoz)

A két vektort közös kezdőpontba toljuk, és az összegvektor a közös kezdőpontból mutat az általuk meghatározott paralelogramma szemközti csúcsába.

A vektorösszeadás kommutatív és asszociatív, vagyis:



$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$$



$$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$$

További azonosságok:

$$\underline{a} + \underline{0} = \underline{a},$$

$$\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$$

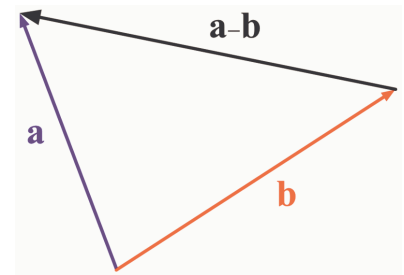
2. Vektorkivonás:

A vektorokat közös kezdőpontba toljuk, és a különbségvektor a kivonandó vektor végpontjából mutat a kisebbítendő vektor végpontjába.

Tulajdonságai:

$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$$

nem kommutatív

**3. Vektor skalárral való szorzása:**

Vektor szorzata skalárral olyan vektor, melynek állása megegyezik az eredeti vektor állásával, iránya a skalár szorzó előjelétől függően megegyező ($\lambda > 0$), vagy ellentétes ($\lambda < 0$) az eredeti vektoréval, és hossza az eredeti vektor hosszának és a skalár abszolút értékének szorzata.

$$\text{Azaz: } \lambda \cdot \underline{v} \parallel \underline{v} \text{ és } |\lambda \cdot \underline{v}| = |\lambda| \cdot |\underline{v}| \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

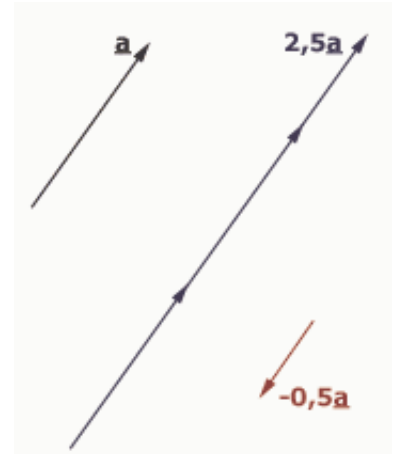
Tulajdonságai:

$$\lambda \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \cdot \underline{a} + \lambda \cdot \underline{b}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \underline{a} + \mu \cdot \underline{a}$$

$$\mu \cdot (\lambda \cdot \underline{a}) = (\mu \cdot \lambda) \cdot \underline{a}$$

$$0 \cdot \underline{v} = \underline{0}, \quad 1 \cdot \underline{v} = \underline{v}, \quad (-1) \cdot \underline{v} = -\underline{v}$$

**4. Vektorok skaláris szorzata: (eredménye egy skalár)**

Két vektor skaláris szorzata a két vektor hosszának és a vektorok által közbezárt szög koszinuszának szorzata.

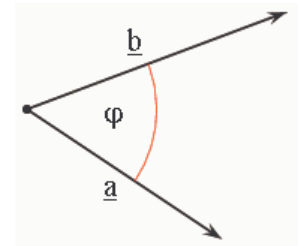
$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \varphi, \text{ ahol } 0^\circ \leq \varphi < 180^\circ$$

Tulajdonságok:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a} \text{ (kommutatív) (de nem asszociatív)}$$

$$(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c} \text{ (disztributív)}$$

$$\lambda \cdot (\underline{a} \cdot \underline{b}) = \underline{a} \cdot (\lambda \cdot \underline{b}) = (\lambda \cdot \underline{a}) \cdot \underline{b}$$

**Tétel:**

Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra. Azaz: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ$

Biz:

$$\Rightarrow \text{Ha a két vektor merőleges egymásra, akkor } \underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

$$\Leftarrow \text{A skaláris szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0. Azaz:}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \varphi = 0, \text{ akkor } |\underline{a}| = 0 \text{ vagy } |\underline{b}| = 0 \text{ vagy } \cos \varphi = 0.$$

Ha $\underline{a}$ vagy $\underline{b}$ vektor hossza nulla, akkor valamelyik nullvektor, aminek iránya tetszőleges, tehát merőlegesek. Ha $\cos \varphi = 0$, akkor pedig $\varphi = 90^\circ$.

Megjegyzés1: $\underline{a} \cdot \underline{b} > 0 \Leftrightarrow \varphi < 90^\circ$ és $\underline{a} \cdot \underline{b} < 0 \Leftrightarrow \varphi > 90^\circ$ is igaz

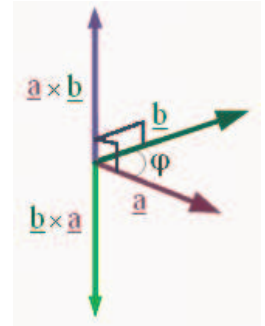
Megjegyzés2: $\underline{a}^2 = \underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}| \cdot |\underline{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\underline{a}|^2$ (vektor négyzete a hosszának négyzete)

5. Vektorok vektoriális szorzata:

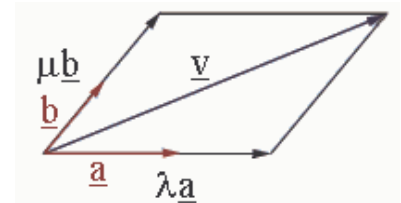
Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok $\underline{a} \times \underline{b}$ vektoriális szorzata olyan vektor, melynek iránya mindkét tényezőre merőleges, $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ (ebben a sorrendben) jobbrendszert alkot és $\underline{a} \times \underline{b}$ hossza:

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \varphi, \text{ ahol } \varphi \text{ az } \underline{a} \text{ és } \underline{b} \text{ vektorok hajlásszöge}$$

Tulajdonságai: nem kommutatív $\underline{b} \times \underline{a} = -(\underline{a} \times \underline{b})$
nem is asszociatív
de legalább disztributív

**Vektorok felbontása komponensekre:**

Legyen adott a sík két, nem egyállású vektora $\underline{a}$ és $\underline{b}$.
Ekkor a sík bármely vektora felbontható $\underline{a}$ -val és $\underline{b}$ -vel párhuzamos összetevőkre, és ez a felbontás egyértelmű.
Azaz: $\forall \underline{v}$ – hez $\exists! \lambda; \mu \in \mathbb{R}$, hogy $\underline{v} = \lambda \cdot \underline{a} + \mu \cdot \underline{b}$



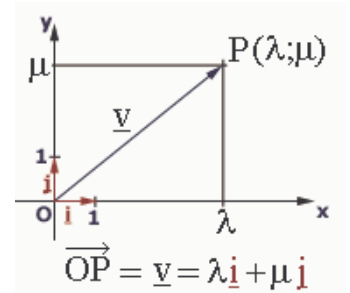
A felbontásban $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok a *bázisvektorok*, $\underline{v}(\lambda; \mu)$ a $\underline{v}$ vektor koordinátái.

Vektorok a koordinátáson:

A Descartes-féle koordináta-rendszerben legyenek bázisaink az egymásra merőleges, egységnyi hosszúságú $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektorok.

Így a $P(\lambda; \mu)$ pontba mutató helyvektor koordinátái:

mivel $\overrightarrow{OP} = \underline{v} = \lambda \cdot \underline{i} + \mu \cdot \underline{j}$, ezért $\underline{v}(\lambda; \mu)$.

**Műveletek koordinátákkal:**

Legyen $\underline{a}(x_1; y_1)$ és $\underline{b}(x_2; y_2)$. Ekkor a vektorműveletek koordinátáinként is elvégezhetők

$$1. \text{ Vektor hossza: } |\underline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$2. \text{ Vektor forgatása } 90^\circ\text{-kal:}$$

$$\underline{a}(x_1; y_1) \Rightarrow \underline{a}_{+90^\circ}(-y_1; x_1) \text{ és } \underline{a}_{-90^\circ}(y_1; -x_1)$$

(mivel az ábrán lévő jelölt szögű $\triangle$ -ek egybevágók)

$$3. \text{ Összeadás, kivonás: } \underline{a} + \underline{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) \text{ és } \underline{a} - \underline{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$$

$$4. \text{ Szorzás skalárral: } \lambda \cdot \underline{a} = (\lambda \cdot x_1; \lambda \cdot y_1)$$

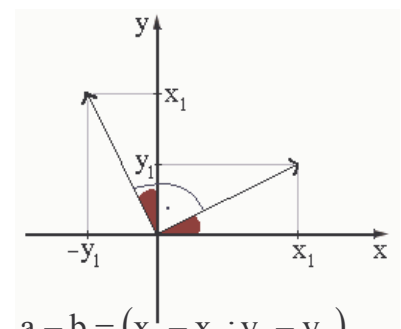
$$5. \text{ Skaláris szorzat:}$$

$$\textbf{Tétel: } \underline{a} \cdot \underline{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

$$\textbf{Biz: } \underline{a} \cdot \underline{b} = (x_1 \cdot \underline{i} + y_1 \cdot \underline{j}) \cdot (x_2 \cdot \underline{i} + y_2 \cdot \underline{j}) = (\text{skaláris szorzás disztributív})$$

$$= x_1 \cdot x_2 \cdot \underline{i}^2 + x_1 \cdot y_2 \cdot \underline{i} \cdot \underline{j} + x_2 \cdot y_1 \cdot \underline{i} \cdot \underline{j} + y_1 \cdot y_2 \cdot \underline{j}^2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

$$\underline{i}^2 = \underline{j}^2 = 1 \text{ mivel egységnyi hosszúak, és } \underline{i} \cdot \underline{j} = 0, \text{ mert merőlegesek}$$



Szakaszok a koordinátasíkon

Def.: *Koordináta-rendszer*: Vegyünk fel két egymásra merőleges, irányított, egységgel ellátott egyenest. Az egyeneseket koordináta-tengelyeknek, O metszéspontjukat origónak nevezzük. Az így előállított tengelyrendszert derékszögű- vagy Descartes-féle koordináta-rendszernek nevezzük.

Def.: *Rendezett pár*: Legyen A és B két halmaz. Az $(x;y)$ számkombinációt rendezett párnak nevezzük, ha az első elemét A -ból, a másodikat B -ből választjuk. Az összes ilyen rendezett pár együtt $A \times B$, $A \times B = \{(x;y) \mid x \in A \text{ és } y \in B\}$, így a sík $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Pont koordinátageometriája:

Def.: *Pont koordinátái*:

Egy pontnak a tengelyektől mért előjeles távolságát a pont koordinátáinak nevezzük. Egy pont koordinátái olyan rendezett párok, amelyeknek első tagja az x tengely második tagja az y tengely egyik pontja.

Tétel: *Két pont távolsága*:

$$d(A;B) = AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2},$$

ahol $A(a_1;a_2)$ és $B(b_1;b_2)$.

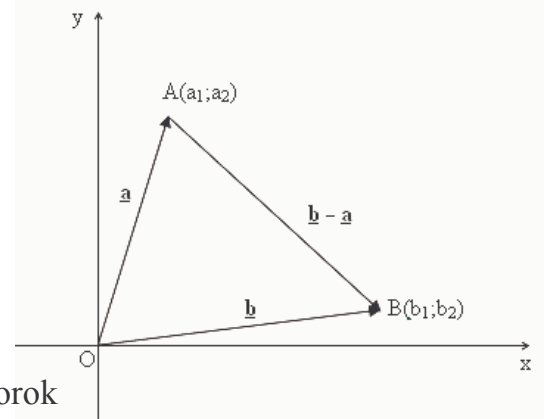
Két pont távolsága a megfelelő koordináták különbségének négyzetösszegéből vont gyök.

Bizonyítás:

$\vec{OA} = \underline{a} = (a_1; a_2)$ illetve $\vec{OB} = \underline{b} = (b_1; b_2)$ helyvektorok

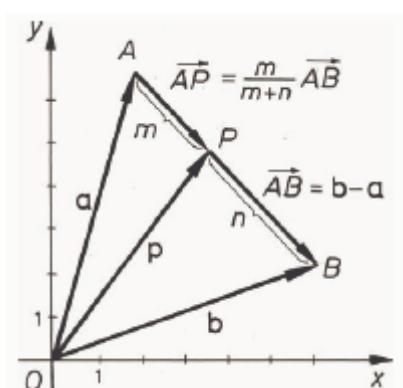
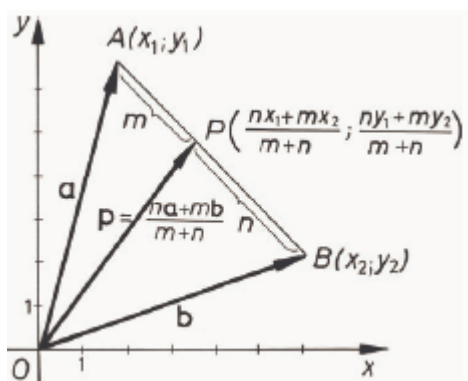
Így $\vec{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ és ennek a vektornak a hossza:

$$d(A;B) = AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Tétel: *Tetszőleges osztópont koordinátái*:

$P\left(\frac{n \cdot x_1 + m \cdot x_2}{n+m}, \frac{n \cdot y_1 + m \cdot y_2}{n+m}\right)$, ahol P az $A(x_1; y_1)$ és $B(x_2; y_2)$ pontokat összekötő szakasz $m : n$ arányú osztópontja.



Bizonyítás:

Ekkor teljesülnek a következők: $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ és $\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{AB}$

Ezek alapján pedig (a fentieket beírva, s az átalakításokat elvégezve):

$$\underline{p} = \underline{a} + \overrightarrow{AP} = \frac{n \cdot \underline{a} + m \cdot \underline{b}}{n+m}, \text{ ahonnan } P\left(\frac{n \cdot x_1 + m \cdot x_2}{n+m}; \frac{n \cdot y_1 + m \cdot y_2}{n+m}\right)$$

Tétel: $A(x_1; y_1)$ $B(x_2; y_2)$ szakasz felezőpontjának koordinátái: $F_{AB}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Tehát a felezőpont koordinátái a végpontok megfelelő koordinátáinak átlaga.

Bizonyítás: Ekkor az $m:n$ arány $1:1$, P helyett legyen F és $\underline{p}$ helyett $\underline{f}$.

Tétel: Háromszög súlypontjának koordinátái: $S\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$,

ahol $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ és $C(x_3; y_3)$ a $\triangle$ csúcsai.

Tehát a háromszög súlypontjának koordinátái csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepei.

Bizonyítás:

A a súlypont harmadolja a súlyvonalakat, úgy, hogy a nagyobb rész a csúchoz, a kisebb rész pedig az oldalfelező ponthoz esik közelebb.

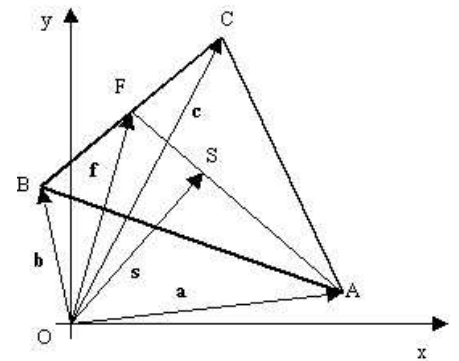
Legyen F a BC oldal felezőpontja.

Az F -be mutató helyvektor: $\underline{f} = \frac{\underline{b} + \underline{c}}{2}$

A háromszög súlypontja az AF súlyvonalnak a $2:1$ arányú osztópontja éppen a súlypont.

Az S pontba mutató helyvektor tehát: $\underline{s} = \frac{\underline{a} + 2 \cdot \underline{f}}{3} = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{3}$.

Így az S pont koordinátái $S\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

**Alkalmazások:**

- koszinusztétel vektoros bizonyítása
- geometriafeladatok vektoros vagy koordináta geometriai megoldása
- eltolás, mint geometriai transzformáció
- koordináta geometriai számítások
 - egyenes állására jellemző vektorok
 - két vektor v. egyenes bezárt szöge (skaláris szorzat kétféle kiszámítási módja)
- fizika:
 - vektormennyiségek összegzése (erők, sebességek)
 - vektormennyiségek skalárral való szorzása ($\underline{F} = m \cdot \underline{a}$)
 - vektormennyiségek skaláris szorzata (munka)
 - vektormennyiségek vektoriális szorzata (Lorenz-erő, forgatónyomaték)
- kémia: dipólusmomentum-vektor (molekulák polaritásának meghatározása)
- geodézia, térképészet (távolságmeghatározások)