

20. tétel:**Egyenesek a koordinátasíkon. A lineáris függvények grafikonja és az egyenes. Elsőfokú egyenlőtlenségek.**

Def.: *Koordinátarendszer*: Vegyünk fel két egymásra merőleges, irányított, egységgel ellátott egyenest. Az egyeneseket koordináta-tengelyeknek, O metszéspontjukat origónak nevezzük. Az így előállított tengelyrendszert derékszögű- vagy Descartes-féle koordinátarendszernek nevezzük.

Def.: *Rendezett pár*: Legyen A és B két halmaz. Az $(x;y)$ számkombinációt rendezett párnak nevezzük, ha az első elemét A -ból, a másodikat B -ből választjuk. Az összes ilyen rendezett pár együtt $A \times B$, $A \times B = \{(x;y) \mid x \in A \text{ és } y \in B\}$, így a sík $R \times R = R^2$.

Függvény:

Ha egy A halmaz minden eleméhez hozzárendelünk egy B halmaz egy-egy elemét, akkor egy A -ból B -be rendelő függvényt kapunk. Jele: $f : A \rightarrow B$.

$A = D_f$: értelmezési tartomány, B : képhalmaz

$R_f = \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \subset B$: értékkészlet

Jelei: $\left. \begin{array}{l} f(a) = b \\ a \rightarrow f(a) \\ a \rightarrow b \end{array} \right\} \begin{array}{l} a\text{-hoz a függvény } b\text{-t rendeli, } a \text{ képe } b \text{ vagy } b \text{ ösképe } a \end{array}$

Függvény grafikonja:

Számfüggvényeknél az összetartozó értékpárokat Descartes-féle koordináta-rendszerben ábrázoljuk, vagyis $\text{graf } f = \{(x;y) \mid \exists x \in D_f \quad y = f(x)\}$.

Elsőfokú függvények:

$f : A \rightarrow R \quad A \subset R, A \neq \emptyset$ és $f(x) = m \cdot x + b$, ahol $m; b \in R \quad m \neq 0$

Az elsőfokú függvény képe egyenes. (lásd később)

m : meredekség, b : y -tengelymetszet

$m < 0$: a függvény szigorúan monoton csökken

$m = 0$: a függvény konstans (nem elsőfokú ugyan, de lineáris)

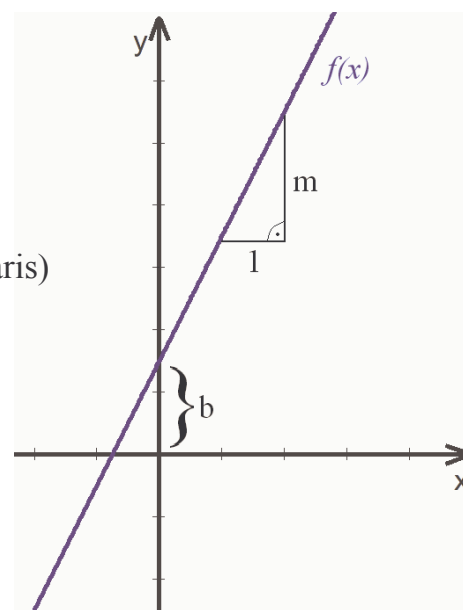
$m > 0$: a függvény szigorúan monoton nő

(a meredekség egyébként az irányszög tangense)

$b = 0$ esetén a függvény grafikonja áthalad az origón
(egyenes arányosság)

zérushelye: $x = -\frac{b}{m}$

Lineáris függvényeknek nevezzük az elsőfokú- és a konstansfüggvényeket együttesen.



Egyenes koordináta geometriája:

Def.: *Alakzat egyenlete*: Olyan összefüggés, melyet az alakzathoz tartozó pontok koordinátái igazsá tesznek, más pontok pedig nem.

Egy alakzat egyenlete síkban általában egy kétismeretlenes egyenlet (térben 3).

Egy alakzatnak többféle egyenlete is lehet.

Azt, hogy egy pont rajta van-e az alakzaton, tehát behelyettesítéssel dönthetjük el.

Következmény:

Két alakzat metszéspontjának meghatározásához az alakzatok egyenleteit egyenletrendszerként kell megoldani.

Egyenest meghatározó adatok: két pontja vagy egy pontja és az állása.

Egyenes helyzetét jellemző adatok:

Def.: *irányvektor*: egy egyenes irányvektora bármely az egyenessel párhuzamos, nullvektortól különböző vektor. Jele: $\underline{v}(v_1; v_2)$

Def.: *normálvektor*: az (xy) síkban egy egyenes normálvektora az egyenesre merőleges, nullvektortól különböző bármely vektor. Jele: $\underline{n}(A; B)$

Def.: *irányszög*: az (xy) síkban az egyenes irányszöge az egyenes és az x tengely pozitív felével bezárt előjeles szög.

Def.: *iránytangens*: az egyenes irányszögének tangensét (ha létezik) iránytangensnek, vagy meredekségnek hívjuk. Jele: m . (90° – os irányszögű egyenesnek nincs.)

Összefüggések az egyenes helyzetét jellemző adatok között:

irányvektort 90° -kal elforgatva normálvektort kapunk és viszont
irányvektor és normálvektor skaláris szorzata 0

\underline{v} -ből vagy \underline{n} -ből megkaphatjuk az iránytangens: $m = \frac{v_2}{v_1} = -\frac{A}{B}$

iránytangensből megkaphatjuk \underline{v} -t és \underline{n} -et: $\underline{v}(1; m)$; $\underline{n}(m; -1)$

Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének a feltételei:

párhuzamos egyenesek:

Két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha irányvektoraik, illetve normálvektoraik párhuzamosak, vagyis egymásnak skalárszorosai. Ha az egyeneseknek van iránytangense, tehát nem párhuzamosak az y tengellyel, akkor a párhuzamosságnak szükséges és elégséges feltétele, hogy a két egyenesnek az iránytangense (m_1 és m_2) egyenlő legyen: $m_1 = m_2$.

merőleges egyenesek:

Két egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha irányvektoraik, illetve normálvektoraik merőlegesek egymásra, vagyis irányvektoraik, illetve normálvektoraik skaláris szorzata 0. Ha mindkét egyenesnek van iránytangense, akkor a merőlegesség szükséges és elégséges feltétele, hogy meredekségük szorzata -1 legyen: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Az egyenes egyenletei:**Írányvektoros egyenlet:**

Adott $P_0(x_0; y_0)$ ponton áthaladó, adott $\underline{v}(v_1; v_2)$ irányvektorú egyenes egyenlete: $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$

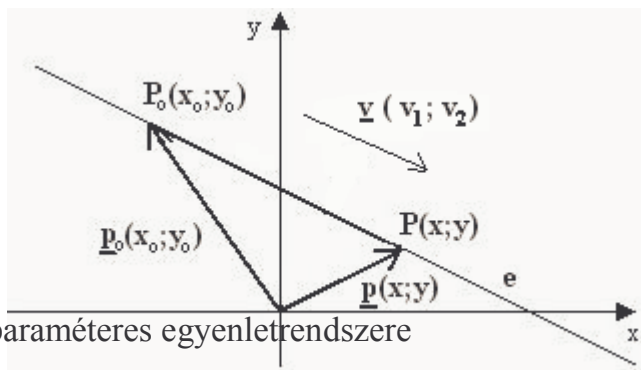
Bizonyítás:

Legyen $P(x; y)$ futópont az egyenesen.

$$P \in e \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \text{ párhuzamos } \underline{v}\text{-vel} \Leftrightarrow$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{P_0P} = \lambda \cdot \underline{v} \Leftrightarrow$$

$$\text{vagyis } \begin{cases} x - x_0 = \lambda v_1 \\ y - y_0 = \lambda v_2 \end{cases} \text{ ez az egyenes paraméteres egyenletrendszere}$$



Az első egyenletet v_2 -vel, a másodikat v_1 -gyel megszorozva egyenlővé tehetjük a bal oldalakat is, így

$$v_2 \cdot (x - x_0) = v_1 \cdot (y - y_0), \text{ ahonnan}$$

$$v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$$

Normálvektoros egyenlet:**Tétel:**

Adott $P_0(x_0; y_0)$ ponton áthaladó, adott $\underline{n}(A; B)$ irányvektorú egyenes egyenlete: $Ax + By = Ax_0 + By_0$

Bizonyítás:

Legyen $P(x; y)$ futópont az egyenesen.

$$P \in e \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \text{ merőleges } \underline{n}\text{-re} \Leftrightarrow$$

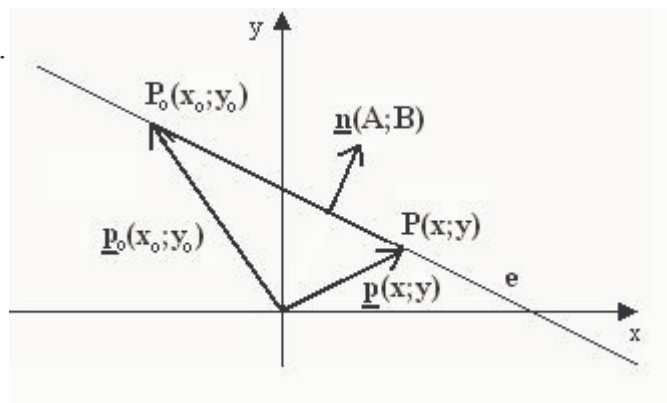
$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \underline{n} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - x_0; y - y_0) \cdot (A; B) = 0 \Leftrightarrow$$

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0 \Leftrightarrow$$

amiből:

$$Ax + By = Ax_0 + By_0$$

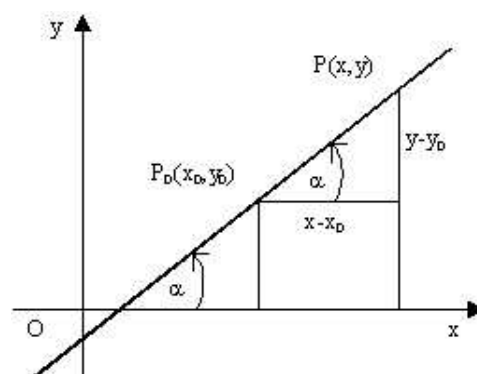
**Íránytangenses egyenlet:**

Adott ponton $P_0(x_0; y_0)$ áthaladó és adott íránytangensű egyenes egyenlete: $m \cdot (x - x_0) = y - y_0$

Bizonyítás:

Az íránytangens megadása miatt az egyenes nem lehet párhuzamos az y tengellyel. ;

Mivel az m íránytangensű egyenes egy normálvektora $\underline{n}(m; -1)$, így az egyenes egyenlete (behelyettesítve a normál-vektoros egyenletbe):



$$m \cdot x - y = m \cdot x_0 - y_0, \text{ amit átrendezve: } m \cdot (x - x_0) = y - y_0$$

További alakjai:

$$y = m \cdot (x - x_0) + y_0 = m \cdot x + y_0 - m \cdot x_0$$

$$\text{Vagyis } y = m \cdot x + b$$

Két ponton áthaladó egyenes egyenlete:

Adott két pont $P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$. A két ponton áthaladó egyenes egyenlete a következő formában adható meg:

$$(x - x_1) \cdot (y_2 - y_1) = (x_2 - x_1) \cdot (y - y_1).$$

Bizonyítás:

Az egyenes egyik irányvektora: $\vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$,

ezt behelyettesítve az irányvektoros képletbe:

$$(y_2 - y_1) \cdot x - (x_2 - x_1) \cdot y = (y_2 - y_1) \cdot x_0 - (x_2 - x_1) \cdot y_0 \text{ és átrendezve:}$$

$$(x - x_1) \cdot (y_2 - y_1) = (x_2 - x_1) \cdot (y - y_1)$$

Tétel: Minden (xy síkbeli) egyenes egyenlete felírható $Ax + By + C = 0$ alakban, ahol A, B, C tetszőleges valós számok, de $A^2 + B^2 \neq 0$. (És minden ilyen egyenlet egyenest határoz meg.)

Tétel: Pont és egyenes távolsága:

Legyen e egyenes egyenlete az alábbi alakban $Ax + By + C = 0$ nullára rendezve, és $P(x_0; y_0)$ egy adott pont koordinátái. Ekkor e és P távolsága:

$$d(e; P) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Tétel: Két egyenes által meghatározott szögek szögfelezőinek egyenletei:

Az e : $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ és f : $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ egyenletű egyenesek szögfelezőinek egyenlete:

$$\left| \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right| = \left| \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|, \text{ vagyis}$$

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \text{ (az előjelek adják a két szögfelezőt)}$$

Elsőfokú egyenlőtlenségek:**Egyenlőtlenség:**

Két relációsjellel ($<, \leq, >, \geq$) összekapcsolt kifejezés vagy függvény.

Az egyenlőtlenséget szokás olyan speciális nyitott mondatnak (változó(k)tól függő állítás) is nevezni, amelynek alaphalmaza egy számhalmaz.

Az egyenlőtlenség megoldása:

Megkeressük a két kifejezés/függvény közös értelmezési tartományának – alaphalmazának – azon elemeit, amelyekre a két kifejezés/függvény helyettesítési értékei a megadott relációban vannak. Ezeknek halmaza az egyenlőtlenség *megoldáshalmaza* vagy más néven *igazsághalmaza*.

Ha az egyenlőtlenség az alaphalmaz minden elemére teljesül, akkor a megoldáshalmaz egyezik az alaphalmazzal, az egyenlőtlenség ilyenkor *azonosság*.

Ha a relációs jel két oldalán a változóknak csak algebrai egész kifejezései vannak, akkor *algebrai egyenlőtlenségnek* nevezzük. Ennek *fokszáma* a benne szereplő legmagasabb fokszámú tag fokszámával egyenlő.

Nem algebraiak például az abszolút értékes, a törtes, a gyökös, az exponenciális, a logaritmikus, a trigonometrikus egyenlőtlenségek.

Egyenlőtlenség megoldásánál a negatív számmal való szorzás/osztás megfordítja a relációs jelet. Ezért például ismeretlennel (előjelvizsgálat nélkül) nem lehet beszorozni.

Elsőfokú egyenlőtlenség:

Redukált alakja: $mx + b > 0$, $m, b \in \mathbb{R}$ $m \neq 0$.

Megoldása m előjelétől függ: $m > 0$, akkor $x > -\frac{b}{m}$, ha $m < 0$, akkor $x < -\frac{b}{m}$

Alkalmazások:

- Matematikán belül:
 - geometriai feladatok koordinátageometriaivá való alakítása
 - egyenlőtlenséggel jellemzett ponthalmazok megadása
 - problémák megoldása a geometriai valószínűségi mezőben
 - grafikonok készítése
 - nem algebrai egyenlőtlenségek megoldása (pl. előjel táblázat készítése)
- Matematikán kívül:
 - lineáris programozás
 - számítógépes grafika
 - egyenes vonalú egyenletes mozgások
 - tükröződés, fénytörés
 - térképészet (távolságok kiszámítása)
 - radar, navigáció
 - építészet