

21. tétel:
A kör és a parabola a koordinátasíkon

Def.: *Koordináta-rendszer*: Vegyünk fel két egymásra merőleges, irányított, egységgel ellátott egyenest. Az egyeneseket koordináta-tengelyeknek, O metszéspontjukat origónak nevezzük. Az így előállított tengelyrendszert derékszögű- vagy Descartes-féle koordináta-rendszernek nevezzük.

Def.: *Rendezett pár*: Legyen A és B két halmaz. Az (x;y) számkombinációt rendezett párnak nevezzük, ha az első elemét A-ből, a másodikat B-ből választjuk. Az összes ilyen rendezett pár együtt $A \times B$, $A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ és } y \in B\}$, így a sík $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Def.: *Alakzat egyenlete*: Olyan összefüggés, melyet az alakzathoz tartozó pontok koordinátái igazgá tesznek, más pontok pedig nem.

Egy alakzat egyenlete síkban általában egy kétismeretlenes egyenlet (térben 3).

Egy alakzatnak többféle egyenlete is lehet.

Azt, hogy egy pont rajta van-e az alakzaton, tehát behelyettesítéssel dönthetjük el.

Következmény:

Két alakzat metszéspontjának meghatározásához az alakzatok egyenleteit egyenletrendszerként kell megoldani.

Kör:

Azon pontok halmaza a síkon, melyek egy adott ponttól (középpont), adott egyenlő távolságra (sugár) vannak.

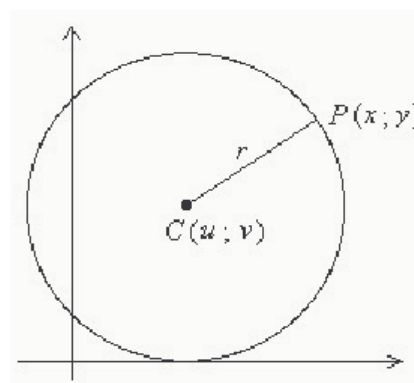
$$\text{kör} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid PO = r; r > 0\}$$

$$\text{zárt körlap} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid PO \leq r; r > 0\} \quad \text{nyílt körlap} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid PO < r; r > 0\}$$

Egy kör helyzetét akkor ismerjük, ha tudjuk, hol van a középpontja és tudjuk, mekkora a sugara. Legyen a kör középpontja $C(u;v)$, sugara r .

$$P(x;y) \in k \Leftrightarrow PC=r \Leftrightarrow \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} = r$$

$$\text{A kör egyenlete tehát: } (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$



A másodfokú kétismeretlenes egyenlet akkor és csak akkor állít elő kört, ha

- a két ismeretlen négyzetes tagjainak együtthatója egyenlő
- az egyenlet nem tartalmazza a két ismeretlen szorzatát
- és a teljes négyzetté alakítás utána a jobboldal (☺) nagyobb nullánál

Kör és egyenes kapcsolata:

legyen k a kör és e az egyenes egyenlete

- elkerülő, ha $k \cap e = \emptyset$
- érintő, ha $k \cap e = \{E\}$
- metsző, ha $k \cap e = \{P_1; P_2\}$

A kör érintőjének meghatározása:

A kör érintőjének nevezzük azokat az egyeneseket, amelyeknek egy közös pontja van a körrel.

- (1) a kör egy adott pontjába húzott érintő:
a kör középpontjából az adott pontba húzott vektor az érintő egyenesének normálvektora
- (2) külső pontból húzott érintő:
felírjuk Thalész-tételét a CP szakaszra, melynek így megkapjuk a Thalész-körét és a két kör (k és a Thalész-kör) metszéspontjai megadják az érintési pontokat (de persze még számos módszer van az érintőegyeneselek meghatározására ☺)

Parabola:

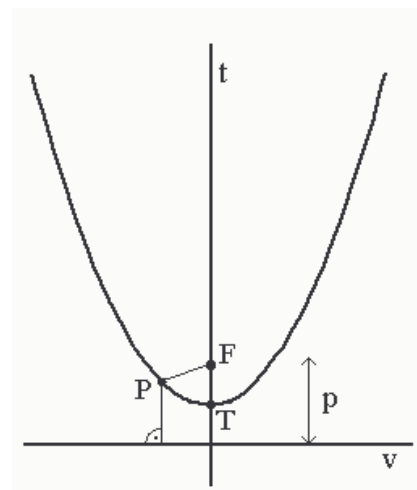
Def. Azon pontok halmaza a síkon, melyek egy adott egyenestől (vezéregyenes) és egy adott, rajta nem lévő ponttól (fókuszpont) egyenlő távolságra vannak.

$$\text{parabola} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P; F) = d(P; v)\}$$

A fókuszpont és a vezéregyenes távolsága a parabola *paramétere* (p).

A parabola tengelyesen szimmetrikus alakzat, *tengelye* (t) a fókuszponton áthaladó, vezéregyenesre merőleges egyenes.

Ennek metszéspontja a parabolával a parabola *tengelypontja* (T).



Tétel A p paraméterű, y tengelyű origó tengelypontú

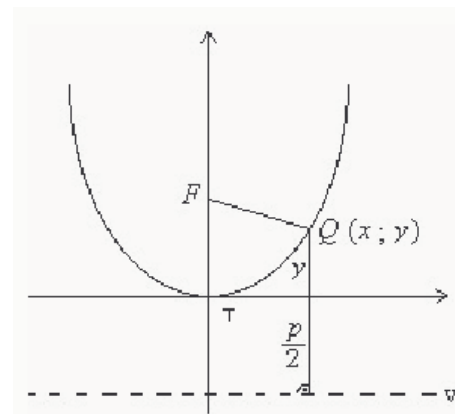
$$\text{parabola egyenlete: } y = \frac{1}{2p} \cdot x^2$$

Biz. definícióból $\Rightarrow F(0; \frac{p}{2})$; vezéregyenes: $y = -\frac{p}{2}$

$$Q(x; y) \in \text{parabola} \Leftrightarrow PF = d(P; v)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{p}{2} + y$$



$$x^2 + y^2 - yp + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} + py + y^2$$

$$x^2 = 2py \quad \text{mivel } p \neq 0$$

$$y = \frac{1}{2p} \cdot x^2$$

Általános helyzetben:

A koordinátasíkon egy függőleges tengelyű, $T(u;v)$ tengelypontú, p paraméterű parabola és egyenlete:

$$\text{fókuszpontja: } F\left(u; v + \frac{p}{2}\right), \text{ vezéregyenese: } v: y = v - \frac{p}{2},$$

$$\text{a parabola egyenlete: } y - v = \frac{1}{2p} \cdot (x - u)^2$$

A más helyzetű parabolák egyenlete egyszerű átalakításokkal ebből megkapható.

Érintő:

A parabola *érintőjének* nevezzük azt az egyenest, melynek egy közös pontja van a parabolával és nem párhuzamos annak tengelyével.

Érintő meghatározása:

Egyik módszer (adott érintési ponttal)

Az érintő meredekségét differenciálszámítással megkaphatjuk, és az adott érintési pontból felírhatjuk az érintő egyenes egyenletét.

Másik módszer (adott ponton áthaladó vagy adott meredekségű érintővel):

Az érintőegyenest $y = m \cdot x + b$ alakban keressük ($m, b \in \mathbb{R}$).

Ha adott egy pontja, akkor azt az érintő egyenletébe helyettesítve kifejezhetjük b -t.

Az érintő egyenes és a parabola egyenletét paraméteres egyenletrendszerként megoldva egy megoldást kell kapnunk, így a kijött másodfokú paraméteres egyenlet diszkriminánsa 0. Ebből a hiányzó paraméter meghatározható.

Alkalmazások:

- körrel kapcsolatos geometriai problémák vizsgálatánál
- körmozgás vizsgálata
- másodfokú függvény grafikus képe parabola
- másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása
- egyenes vonalú gyorsuló mozgások leírásánál az út-idő függvény képe parabola
- hajítások pályája parabolaív
- parabola mint kúpszelet
- mozgások a Naprendszerben
- forgó folyadék felszíne paraboloid alakú
- parabolaantenna, parabolatükör
- szélsőérték-feladatok