

23. tétel:**Területszámítás elemi úton és az integrálszámítás felhasználásával****Területszámítás elemi úton:****Axiómák:**

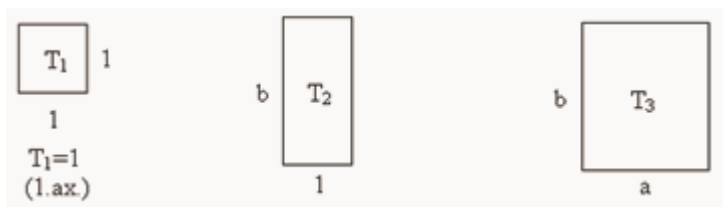
0. Minden sokszöghöz hozzárendelünk egy nemnegatív valós számot (ez a sokszög területe) úgy, hogy az alábbiak teljesüljenek:
1. Az egységnyi oldalhosszú négyzet területe 1.
2. Az egybevágó sokszögek területe megegyezik.
3. Ha egy sokszöget véges sok darab sokszögre bontunk akkor a részsokszögek területeinek összege az eredeti sokszög területével egyenlő.

Téglalap területe:

Tétel: A téglalap területe a szomszédos oldalak szorzata

Lemma: Ha két téglalap egyik oldala megegyezik, akkor a területük aránya egyenlő a másik oldalak arányával. Vagyis, ha $a_1=a_2$ akkor: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{b_2}{b_1}$.

Biz:



$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{b}{1}$$

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{a}{1}$$

Lemma alapján:

$\Downarrow$

$$T_2 = b$$

$\Downarrow$

$$T_3 = a \cdot b$$

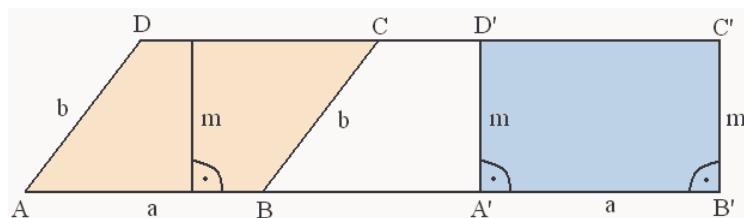
Paralelogramma területe:

A *paralelogramma* olyan négyszög melynek szemközti oldalai párhuzamosak.

Tétel: A paralelogramma területe az egyik oldalának és a hozzá tartozó magasságának szorzata: $T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot m_a$

Biz:

Hosszabbítsuk meg a paralelogramma egyik párhuzamos oldalpárját, és a párhuzamosok közé helyezzünk el egy a paralelogramma alapjával egyenlő oldalú téglalapot.



Ekkor: $AA'D'D' \cong BB'C'C'$, mivel $\overrightarrow{AB}$ vektorral való eltolás egymásba viszi őket.
tehát a 2. axióma miatt $T_{AA'D'D'} = T_{BB'C'C'}$

$$\left. \begin{aligned} T_{A'B'C'D'} &= T_{BB'C'C'} - T_{BA'D'C} \\ T_{ABCD} &= T_{AA'D'D'} - T_{BA'D'C} \end{aligned} \right\} \text{3. axióma miatt} \Rightarrow T_{ABCD} = T_{A'B'C'D'} = a \cdot m$$

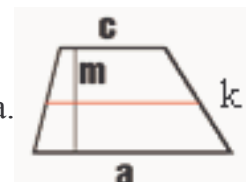
(mivel a paralelogramma és a téglalap adatai megegyeznek)

Trapéz területe:

A trapéz olyan négyszög, melynek van egy párhuzamos oldalpárja.

Tétel: A trapéz területe a középvonalának és magasságának szorzata.

$$T_{\text{trapéz}} = k \cdot m = \frac{a + c}{2} \cdot m$$



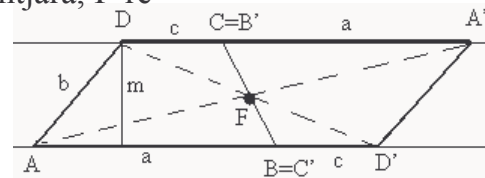
Biz: Tükrözzük a trapézt az egyik szárának felezőpontjára, F-re

A tükrözés miatt: $ABCD \cong A'B'C'D'$

így $AD'A'D$ paralelogramma

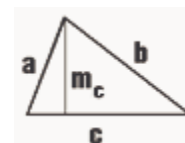
$$T_{ABCD} \stackrel{(2.ax.)}{=} T_{A'B'C'D'} \stackrel{(3.ax.)}{=} \frac{1}{2} T_{AD'A'D} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot m$$

(mivel a paralelogramma és a trapéz adatai megegyeznek)

**Háromszög területe:**

Tétel: A háromszög területe az egyik oldal és a hozzá tartozó

magasság szorzatának fele. $T_{\text{háromszög}} = \frac{c \cdot m_c}{2}$



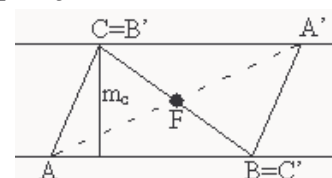
Biz: Tükrözzük a háromszöget az egyik oldalának F felezőpontjára

A tükrözés miatt: $ABC \triangle \cong A'B'C' \triangle$

így $ABA'C$ négyszög paralelogramma

$$T_{A'B'C'} \stackrel{(2.ax.)}{=} T_{ABC} \stackrel{(3.ax.)}{=} \frac{1}{2} T_{ABA'C} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot m_c$$

mivel a háromszög és a paralelogramma adatai megegyeznek

**Egyéb háromszög területképletek:**

Heron - képlet: $T = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$ ahol $s = \frac{K}{2}$

beírt kör sugarával: $T = r \cdot s$, körülírt kör sugarával: $T = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

hozzáírt körök sugaraival $T = r_a \cdot (s - a) = r_b \cdot (s - b) = r_c \cdot (s - c)$

két oldal és közbezárt szögükkel: $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$

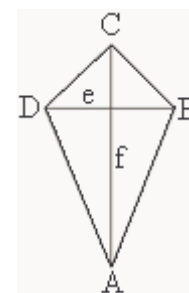
Deltoid területe:

A deltoid olyan négyszög, melynek két-két szomszédos oldala egyenlő.

Tétel: A deltoid területe átlói szorzatának a fele. $T_{\text{deltoid}} = \frac{e \cdot f}{2}$

Biz: $ACB \triangle \cong ACD \triangle$ (mivel oldalai páronként megegyeznek)

$$T_{ABCD} \stackrel{(2.;3.ax.)}{=} 2 \cdot T_{ACB \triangle} = 2 \cdot \frac{AC \cdot TB}{2} = AC \cdot \frac{DB}{2} = \frac{e \cdot f}{2}$$

**Sokszögek területe:**

Háromszögekre való bontással.

Kör területe:

A *kör* azon pontok halmaza a síkon, melyek egy adott ponttól adott egyenlő távolságban vannak.

Tétel: A kör területe a sugarának négyzete szorozva π -vel. $T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$

Biz: szabályos sokszögek területével közelítjük (alulról és felülről)

$$T_{\text{beírt sokszög}} \leq T_{\text{kör}} \leq T_{\text{köréírt sokszög}} \quad \text{vagyis:} \quad \frac{r^2 \sin \frac{2\pi}{n}}{2} \cdot n \leq T_{\text{kör}} \leq \frac{2r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{2} \cdot n$$

$$\text{tehát} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2 \sin \frac{2\pi}{n}}{2} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = r^2 \pi \quad \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \right)$$

$$\text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = r^2 \pi$$

$$\text{és ekkor a rendőr elv miatt: } r^2 \pi \leq T_{\text{kör}} \leq r^2 \pi \Rightarrow T_{\text{kör}} = r^2 \pi$$

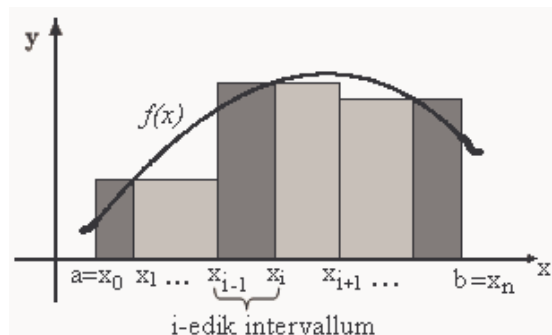
Területszámítás integrálszámítással:

Függvény alatti terület:

A függvény görbéje és az x tengely között létrejött előjeles terület mérőszáma.

$[a; b]$ intervallum egy lehetséges *felosztása* (F):
 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ véges számú pont.

Legyen $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos



Alsó összeg: $s_F = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ ahol $m_i = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}; x_i]\}$,

(tehát m_i az „ i ”-edik intervallumban a legkisebb függvényérték – infimum)

Felső összeg: $S_F = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ ahol $M_i = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}; x_i]\}$

(tehát M_i az „ i ”-edik intervallumban felvett legnagyobb függvényérték – szuprérum)

Az $[a; b]$ intervallumon értelmezett korlátos $f(x)$ függvényt *integrálható*, ha egyetlen olyan szám létezik, amelyik az $f(x)$ függvény egyetlen alsó közelítő összegénél sem kisebb, és egyetlen felső közelítő összegénél sem nagyobb. Ezt a számot nevezzük $f(x)$ $[a; b]$ intervallumon vett *határozott* avagy *Riemann- integráljának*.

Newton – Leibniz formula:

Ha $F(x)$ differenciálható, és $F'(x) = f(x)$ integrálható, akkor:

$$\int_b^a f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Definíciók, tételek:

Ha $F'(x) = f(x)$ akkor $F(x)$ az $f(x)$ függvény egy *primitívfüggvénye*.

Ha $F(x)$ az $f(x)$ primitívfüggvénye egy I intervallumon, akkor $f(x)$ összes primitívfüggvénye $F+c$ alakú. (ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges).

$f(x)$ függvény *határozatlan integrálja* $f(x)$ primitívfüggvényeinek halmaza. Jele:

$$\int f(x) dx \quad \text{Az előző tétel értelmében tehát: } \int f(x) dx = \{F(x) + c\}$$

Alapintegrálok:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c \quad n \neq -1 \text{ esetén} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \quad n = -1 \text{ esetén}$$

$$\int c dx = c \cdot x + c_1 \quad n=0, \text{ konstans integrálása}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad \text{azaz például:} \quad \int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c \quad x \neq k\pi$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \int \cot x dx = \ln |\sin x| + c \quad x \neq k\pi$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

Műveleti szabályok:

$$1. \int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx \quad \text{összeg tagonként integrálható}$$

$$2. \int c \cdot f dx = c \cdot \int f dx \quad \text{konstans kiemelhető}$$

$$3. \int g'(x) \cdot f(g(x)) dx = F(g(x)) + c \quad \text{ha egy összetett függvénynél ott van szorozónként a belső függvény deriváltja, akkor „elég” a külső függvényt integrálni}$$

$$4. \int (f(ax + b)) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + c \quad \text{ha a belső függvény lineáris}$$

$$5. \int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g' \quad \text{parciális integrálás}$$

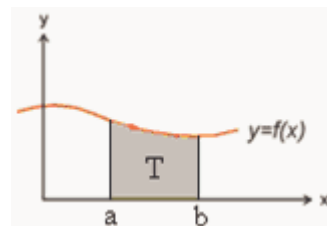
$$6. \int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad \text{helyettesítéses integrálás}$$

itt az $x=g(t)$ helyettesítést végeztük, és $g'(t) = \frac{dx}{dt}$

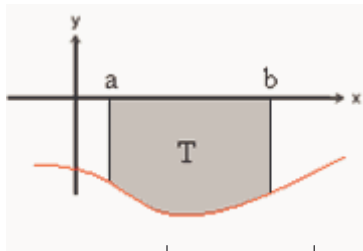
Területek kiszámításának különböző módjai:

Tehát az $[a; b]$ intervallumon folytonos, nem negatív $f(x)$ függvény görbéje alatti területet a határozott integrál fogalmából

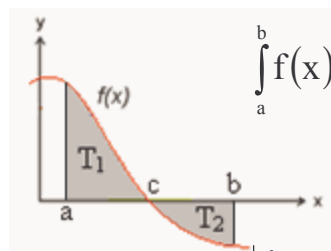
következően a $T = \int_b^a f(x) dx$ képlettel számolhatjuk.



Ha az $f(x)$ folytonos függvényre nincs előjelkikötés, akkor az $f(x)$ integrálja az x tengely feletti és alatti területek előjeles összegét adja.

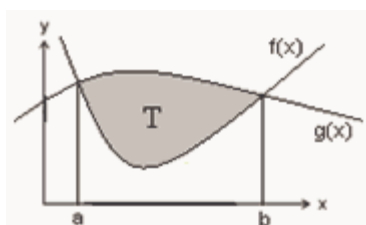


$$T = \left| \int_b^a f(x) dx \right|$$



$$\int_a^b f(x) dx = T_1 - T_2$$

$$T_1 + T_2 = \int_a^c f(x) dx + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$



f és g függvények metszéspontjai: $\Rightarrow a; b$

$$T = \left| \int_a^b g(x) - f(x) dx \right|$$

Kör területének kiszámítása integrálszámítás alkalmazásával:

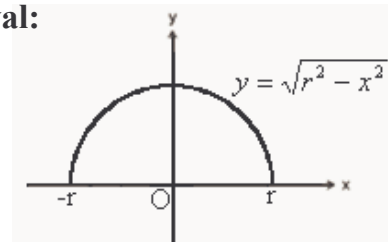
Tétel: Az r sugarú kör terület: $T = r^2 \pi$

Bizonyítás: Legyen a középpont $O(0;0)$ a kör középpontja

A felső félsíkba eső félkörvonal az $f: [-r; r] \rightarrow \mathbf{R}$,

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ függvény grafikonja.

A félkör területe tehát: .



$$\begin{aligned} T &= \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{-r}^r r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} dx = r \int_{-r}^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} dx = r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot r \cdot \cos t dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\sin(-\pi)}{4} \right) \right] = \frac{r^2 \pi}{2} \end{aligned}$$

Az r sugarú kör területe tehát: $T = r^2 \pi$

Alkalmazások:

- területszámítások (kör részeinek területe, szabályos sokszögek területe)
- felszínszámítás (forgástestek felszíne integrálszámítással)
- lakások alapterülete
- grafikon alatti terület meghatározása (fizikai folyamatok, munka)
- földrajzi területmeghatározás (földmérés)
- csillagászat (szektor-terület a szektorsebességhez)
- integrálszámítással forgástestek térfogata, testek súlypontja meghatározható