

## 24. tétel

### Kombinatorika. Gráfok.

#### Kombinatorika:

A matematika azon elméleti területe, amely egy véges halmaz elemeinek csoportosításával, kiválasztásával vagy sorrendberakásával foglalkozik.

#### Permutáció

a) Ismétlés nélküli permutáció:

**Def.:**  $n$  darab különböző elem egy lehetséges sorrendjét az  $n$  elem egy ismétlés nélküli *permutációjának* nevezzük.

**Def.:**  $n$  faktoriális alatt értjük a pozitív egész számok 1-től  $n$ -ig terjedő szorzatát. A 0 és az 1 faktoriális 1-nek értelmezzük. Jele:  $n!$

**Tétel:**  $n$  darab elem összes ismétlés nélküli permutációinak száma:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

#### Bizonyítás:

Válasszuk az elemeket sorban egymás után, az elsővel kezdve. Az első helyre  $n$ -féle elemet választhatunk. A második helyre már csak  $(n-1)$ -félét, így az első két helyre  $n \cdot (n-1)$  félét, mivel az első elem bármely választásához  $(n-1)$ -féle elemet választhatunk a második helyre. A harmadik helyre  $(n-2)$ -féle elemet választhatunk és így tovább, a következő helyre mindig eggyel kevesebb lehetőségünk van az elem választására, mint az előzőnél.

|           |     |       |       |     |           |       |
|-----------|-----|-------|-------|-----|-----------|-------|
| hely      | 1.  | 2.    | 3.    | ... | $(n-1)$ . | $n$ . |
| lehetőség | $n$ | $n-1$ | $n-2$ |     | 2         | 1     |

Így  $n$  különböző elem összesen  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$  -féle sorrendben írható fel.

b) Ismétléses permutáció:

**Def.:** Adott darab  $n$  elem, melyek között egyformák is lehetnek. Ezek egy lehetséges sorrendjét az  $n$  elem egy ismétléses permutációjának nevezzük.

**Tétel:** Adott  $n$  darab elem, melyek között  $k$  db egyforma ( $k \leq n$ ), a többi elem pedig ezektől és egymástól is különböző. Ekkor az elemek összes ismétléses

permutációinak száma:  $P_n^k = \frac{n!}{k!}$ .

#### Bizonyítás:

Ha az összes elem különböző lenne, akkor így az összes sorrendjeik száma  $n!$  lenne. Ennél nyilván kevesebb van, hiszen az ismétlődő elemek miatt bizonyos sorrendeket többször számoltunk. Minden igazából különböző sorrendet annyszor számoltunk meg, ahányszor a  $k$  db egyforma elemet egymás között sorba rendezhetjük, ezek

száma pedig  $k!$  Így az összes sorrend:  $P_n^k = \frac{n!}{k!}$

**Tétel:** Adott  $n$  darab elem. Ezek között  $k_1; k_2; k_3; \dots; k_i$  darab egymás közt egyforma (de a többitől különböző) elem van, ahol  $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_i = n$ . Ekkor az  $n$  elem összes lehetséges sorrendjének

$$\text{száma: } P_n^{k_1, k_2, \dots, k_i} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_i!}$$

**Bizonyítás:** Az előző bizonyítás többszöri (összesen  $i$ -szeres) alkalmazásából következik.

Példa: 10 üveggolyó közül 1 piros, 2 kék, 4 sárga és 3 pedig zöld. Hányféle különböző nyakláncot tudunk készíteni?

## Variáció

a) Ismétlés nélküli variáció:

**Def.:** Adott  $n$  darab különböző elem, ezek közül kiválasztunk  $k$  darabot ( $k \leq n$ ) úgy, hogy a kiválasztás sorrendje számít és egy elemet csak egyszer választhatunk ki. Ekkor az  $n$  elem egy  $k$ -ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk.

**Tétel:**  $n$  elem  $k$ -ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

**Bizonyítás:**

| hely      | 1.  | 2.    | 3.    | ... | ( $k-1$ ). | $k$ .     |
|-----------|-----|-------|-------|-----|------------|-----------|
| lehetőség | $n$ | $n-1$ | $n-2$ | ... | $n-(k-2)$  | $n-(k-1)$ |

Megjegyzés:  $k = n$  esetén ez éppen az ismétlés nélküli permutáció.

b) Ismétléses variáció:

**Def.:** Adott  $n$  darab különböző elem, ezek közül kiválasztunk  $k$  darabot úgy, hogy a kiválasztás sorrendje számít és egy elemet akárhányszor választhatunk. Ekkor  $n$  elem egy  $k$ -ad osztályú ismétléses variációját kapjuk ( $k$ -ra itt nem kell feltétel, lehet  $n$ -nél nagyobb is.)

**Tétel:**  $n$  elem  $k$ -ad osztályú ismétléses variációinak száma:  $V_n^{k,i} = n^k$

**Bizonyítás:**

Az  $n$  elemből  $k$  hely mindegyikére egymástól függetlenül mind az  $n$  elemet elhelyezhetjük.  $V_n^{k,i} = n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$

## Kombináció

a) Ismétlés nélküli kombináció:

**Def.:** Adott  $n$  darab különböző elem. Ezek közül kiválasztunk  $k$  darabot ( $k \leq n$ ) úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít és egy elemet csak egyszer választhatunk ki. Ekkor az  $n$  elem egy  $k$ -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

**Tétel:**  $n$  elem  $k$ -ad osztályú kombinációinak száma:  $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$

**Bizonyítás:**

Válasszunk ki a  $k$  darabot úgy, hogy a sorrendjük is számítson, így a sorrendek száma:  $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ .

Ekkor minden igazi kiválasztást többször számoltunk, mégpedig annyiszor, ahányszor a kiválasztott  $k$  db elemet egymás között sorba rendezhetjük. Ezek száma:  $k!$ , tehát a kombinációk száma:

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

b) Ismétléses kombináció:

**Def.:** Adott  $n$  darab különböző elem. Ezek közül kiválasztunk  $k$  darabot úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít és egy elemet akárhányszor választhatunk. Ekkor az  $n$  elem egy  $k$ -ad osztályú ismétléses kombinációját kapjuk.

**Tétel:**  $n$  elem  $k$ -ad osztályú ismétléses kombinációinak száma:  $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$

**Bizonyítás:**

Az ismétléses kombinációnál csak az számít, hogy melyik elemből hány darabot választunk ki. „Kódoljuk” le az ismétléses permutációkat, a „kódban” válassza el a különböző elemeket „/” jel, közöttük pedig legyen annyi „o”, ahányszor ismétlődik az adott elem a kiválasztásban, például **ooo/oo/oo/.../o/oo**

Ahány féle ilyen sorozat készíthető a jelekből, annyi ismétléses kombináció van.

Ha  $n$  darab elemből  $k$  darabot választunk, akkor  $n-1$  db elválasztójel ( / ) és  $k$  db pötty (o) van a kódban. Ezek lehetséges sorrendje (mondjuk ismétléses permutáció képletével), azaz az ismétléses kombinációk száma:

$$C_n^{k,i} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Példa: Hányféleképpen helyezhetünk el 5 levelet 16 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe több levelet is tehetünk?

c) A binomiális együtthatók tulajdonságai

**Def.:**  $\binom{n}{k}$  alakú kifejezések a *binomiális együtthatók*, ahol  $k \leq n$   $n, k \in \mathbb{Z}_0^+$   
megadja, hogy egy  $n$  elemű halmaznak hány  $k$  elemű részhalmaza van

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ és } \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \text{ továbbá } \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

**Tétel:**  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

**Biz.:** nyilván annyiféleképpen tudunk  $n$  elemből  $k$ -t kiválasztani, mint  $n$  elemből azt az  $(n-k)$ -t, amit voltaképpen nem választunk ki. De természetesen algebrai úton is kijön.

**Tétel:**  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

**Biz.:** algebrai úton triviálisan kijön.

Egy  $k$  elemű kiválasztás vagy tartalmaz egy előre adott elemet, vagy nem.

Ha tartalmazza az előre adott elemet, akkor a többi választhatjuk szabadon a

maradékból, ez így  $\binom{n-1}{k-1}$  darab kiválasztás. Ha nem tartalmazza a

kiválasztott elemet, akkor az összeset szabadon választhatjuk a maradékból,

ez pedig  $\binom{n-1}{k}$  lehetőség. Összesen tehát  $n$  elemből  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

féleképpen választhatunk ki  $k$  darabot.

d) A binomiális tétel:

közismertek az alábbi azonosságok:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

Ezt általánosítja a binomiális tétel:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^0 b^n$$

$$\text{vagyis } (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k$$

### Alkalmazások:

matematika:

- binomiális tétel
- esetek összeszámolása (akár a gyakorlati életben)

egyéb:

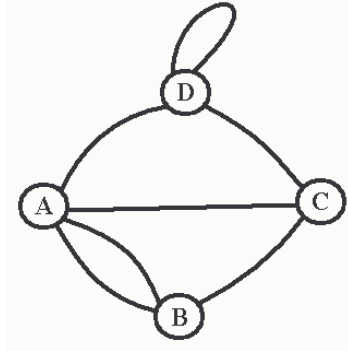
- szerencsejátékok (esélyek kiszámolása: rulett, tippmix, szerepjáték)
- statisztikák készítése
- valószínűségek kiszámítása (időjárás, biztosítási események)
- kódolások (kódok lehetséges száma)
- trigonometrikus addíciós tételek kiszámolása komplex számokon keresztül

**Gráfelmélet:**

A *gráf* pontokból (csúcsokból) és élekből álló halmaz, ahol az élek csúcsokat kötnek össze. (Az élek alakja közömbös, de minden élnek két végpontja van.)

Gráfok megadása:

síkbeli ábrával



szomszédsági mátrixszal:

|   | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 2 | 1 | 1 |
| B | 2 | 0 | 1 | 0 |
| C | 1 | 1 | 0 | 1 |
| D | 1 | 0 | 1 | 2 |

felsorolással

csúcsok: A, B, C, D

élek: AB, AB, AC,  
AD, BC, CD, DD

Két csúcs *szomszédos*, ha vezet köztük él.

A mátrixban bármely két csúcs közti élek számát jelöljük.

**Def.:** *hurokél:* olyan él, melynek kezdő és végpontja azonos  
*többszörös él:* ha két csúcs közt egynél több él vezet  
*izolált csúcs:* olyan csúcs, melyből nem indul él

*egyszerű gráf:* olyan gráf, mely nem tartalmaz hurokélet és többszörös élet sem  
*irányított gráf:* olyan gráf, melyben különbséget teszünk az élek kezdő- illetve végpontjai közt

*csúcs fokszáma:* a belőle kiinduló élek száma (hurokél 2). Jele:  $\varphi(\text{csúcs})$   
 (izolált csúcs foka 0)

**Tétel:** Bármely (véges) gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élszám kétszerese.

**Biz:** A fokszámok összegében minden élet kétszer számolunk, a két végpontjánál.

**Tétel:** Minden (véges) gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros.

**Biz:** Mivel a fokszámok összege páros az előző tétel miatt.

**Tétel:** Minden egyszerű gráfban van két azonos fokszámú pont.

**Biz:** Indirekt, tegyük fel, hogy minden csúcs fokszáma különböző egy  $n$  csúcsú gráfban. Mivel egy csúcs fokszáma maximum  $n-1$  lehet, ezért az  $n$  csúcs különböző fokszámai csak ezek lehetnek:  $0, 1, 2, \dots, n-1$ . Ez azonban ellentmondás, mert a nulladfokú csúcs izolált, míg az  $n-1$ -ed fokú csúcs minden másik csúccsal össze van kötve.

*üres gráf:* olyan gráf, amely nem tartalmaz élt

*teljes gráf:* olyan egyszerű gráf, amelyben minden csúcspár éllel van összekötve,

teljes  $n$  csúcsú gráf jele:  $K_n$ , éleinek száma:  $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$

*komplementer gráf:* egy egyszerű gráf komplementer gráfja az az egyszerű gráf, melynek csúcsai ugyanazok, de két csúcsot akkor és csak akkor köt össze benne él, ha az eredetiben nem.

Gráf és komplementerének élszámösszege  $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ .

Egy gráf komplementerének komplementere az eredeti gráf.

A teljes gráf komplementere az üres gráf és fordítva.

*séta:* gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozata

*körséta:* olyan séta, melynek kezdő- és végpontja azonos

*vonal:* olyan séta, melyben nincs ismétlődő él (csúcs lehet)

*út:* olyan séta, melyben nincs ismétlődő csúcs (így persze él sem)

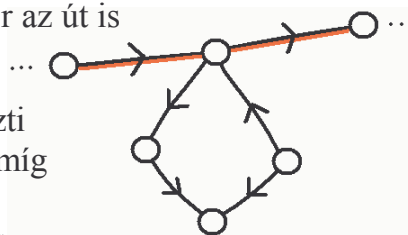
*kör:* olyan séta, melynek kezdő- és végpontja azonos, és ezen kívül nincs benne ismétlődő csúcs

**Tétel:** Ha egy gráf két csúcsa között akkor és csak akkor van séta, ha út is.

**Biz:** 1) ha van út  $\Rightarrow$  van séta is (minden út séta is)

2) ha van séta, és nincs benne csúcsismétlődés, akkor az út is

ha van olyan séta, amiben előfordul ismétlődés, akkor a csúcsismétlődés közti részt elhagyva rövidíthetjük a sétát, mindaddig, amíg van ismétlődő csúcs (mivel a gráf és a séta véges, az eljárás végetér), és az így kapott séta már út lesz.



**Tétel:** Ha egy gráfban minden csúcs legalább másodfokú, akkor van benne kör.

**Biz:** konstruktív: válasszunk ki a csúcsok közül egyet, induljunk el a csúcsból kiinduló egyik élen. Ezt folytatva el nem akadhatunk, csak akkor, ha már olyan csúcsba jutottunk vissza, amelyet már érintettünk (hiszen minden csúcsból legalább két él indul, tehát ahova eljuthatunk, onnan tovább is haladhatunk egyszer). Mivel a gráf véges, ezért előbb-utóbb visszajutunk egy olyan csúcsba, amelyen áthaladtunk, és kialakul a kör.

**Def.:** Egy gráf *összefüggő*, ha bármely két csúcsa közt vezet séta (vagy út).

**Tétel:** Egy  $n$  csúcsú összefüggő gráf legalább  $n-1$  élű.

**Biz:** teljes indukcióval

1)  $n=1$  egycsúcsú gráfnak legalább 0 éle van ☺

$n=2$  kétsúcsú összefüggő gráfnak legalább 1 éle van: 

2) Tfh:  $k$  csúcsra igaz, azaz egy  $k$  csúcsú összefüggő gráfnak  $k-1$  éle van.

Kell, hogy egy  $k+1$  csúcsú összefüggő gráfnak  $k$  éle van.

Ha egy  $k + 1$  csúcsú összefüggő gráfban van elsőfokú csúcs, akkor azt elhagyva az élével, a maradék gráf összefüggő (hiszen eddig is vezetett út bármely két csúcs közt, és az nem használta fel az elhagyott élet). A maradék  $k$  csúcsú gráf tehát az indukciós feltétel miatt legalább  $k - 1$  élet tartalmaz, így az eredeti gráfban volt legalább  $k$  él.

Ha egy  $k + 1$  csúcsú összefüggő gráfban nincs elsőfokú csúcs, akkor mindegyik csúcs legalább másodfokú (nulladfokú csúcs nem lehet az összefüggő gráfban).

Mivel az élek száma a csúcsok fokszámösszegének fele:

$$e \geq \frac{2 \cdot (k + 1)}{2} = k + 1, \text{ ezért legalább } k + 1 \text{ él van a gráfban.}$$

**Tétel:** Ha egy  $n$  ( $n \geq 3$ ) csúcsú (egyszerű) gráfban van  $n$  él, akkor a gráfban van kör.

**Biz:** teljes indukcióval

1)  $n = 3$  teljes gráf, van benne kör

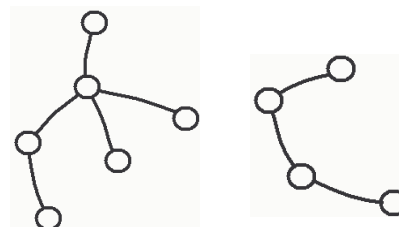


2) Tfh:  $k$ -ra igaz, azaz egy  $k$  csúcsú legalább  $k$  élű gráfban van kör.

Kell, hogy egy  $k + 1$  csúcsú legalább  $k + 1$  élű gráfban van kör.

Ha a  $k + 1$  csúcsú legalább  $k + 1$  élű gráfban van elsőfokú csúcs, akkor azt elhagyva az élével, marad egy  $k$  csúcsú legalább  $k$  élű gráf, amelyben az indukciós feltétel miatt van kör, így az eredetiben is volt.

Ha a  $k + 1$  csúcsú legalább  $k + 1$  élű gráfban nincs elsőfokú csúcs, akkor elhagyva a nulladfokú csúcsokat is olyan gráf marad, amelyben minden csúcs foka legalább kettő, ebben pedig egy korábbi tétel miatt van kör (így az eredetiben is.)



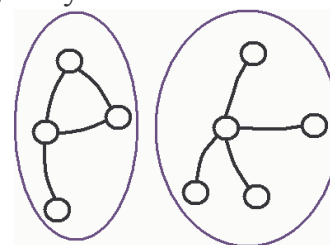
**Def.:** *fa:* összefüggő körmentes gráf  
*erdő:* körmentes gráf

**Tétel:** Egy  $n$  csúcsú gráfnak  $n - 1$  éle van.

**Biz:** az összefüggőség miatt legalább  $n - 1$ , a körmentesség miatt maximum  $n - 1$

**Def.:** *komponens:* egy komponenst alkotnak a gráf azon csúcsai, melyek közt vezet út (Ha A és B csúcs és B és C csúcs közt vezet út, akkor A és C közt is, illetve ha D és E csúcs közt nem vezet út, akkor nincs olyan F csúcs, amelyre D és F illetve F és E közt vezetne út.)

A gráf tehát összefüggő részgráfokra (komponensekre) esik szét, melyek közt nem vezet út.



**Tétel:** *Komponenstétel:* egy gráf éleinek száma legalább annyi, mint a csúcsok és a komponensek számának különbsége, azaz  $e \geq n - k$ .

**Biz:** Teljes indukció egy  $n$  csúcsú gráf éleire, felépítjük a gráfot élenként.

1) Induljunk ki az üres  $n$  csúcsú gráfból, erre igaz a komponenstétel állítása:  
 $e = 0, k = n$  és  $0 \geq 0$

2) Tfh, már valahány él be van húzva és a komponenstétel állítása még igaz  
Kell, hogy  $+1$  él hatására még igaz marad a komponenstétel.

Ha az újonnan behúzott él eddig meglévő komponensek közt vezet, akkor a két komponens egyesül, tehát a komponensek száma eggyel csökken. Mivel az élek száma eggyel nőtt, ezért az  $e \geq n - k$  összefüggés megmarad. Ebben az esetben ha eddig nem volt kör a gráfban, akkor továbbra sem alakul ki.

Ha az újonnan behúzott él egy meglévő komponensen belül vezet, akkor a komponensek száma nem változik, miközben az élek száma eggyel nő, ezért az  $e \geq n - k$  összefüggés megmarad. Ebben az esetben a gráfban kör alakul ki.

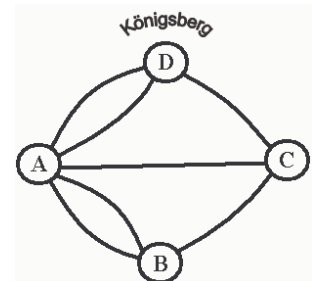
Ha a gráfnak  $e$  db éle lett, akkor az üres gráfban lévő  $n$  komponens csak úgy csökkenhetett  $k$  komponensre, ha legalább  $n - k$  lépésben csökkent a komponensek száma (azaz legalább  $n - k$  éle van a gráfnak). Sőt:

$e = n - k$  esetén csak első típusú élet húztunk be, vagyis nincs a gráfban kör.

$e > n - k$  esetén második típusú élet is behúztunk, vagyis a gráfban van kör.

Tehát az erdők (körmentes gráfok) élszáma:  $e = n - k$ .

**Def.:** *Euler-vonal:* olyan vonal, amely a gráf minden élét tartalmazza (csak egyszer).  
*Euler-körvonal:* olyan körvonal, amely a gráf minden élét tartalmazza.

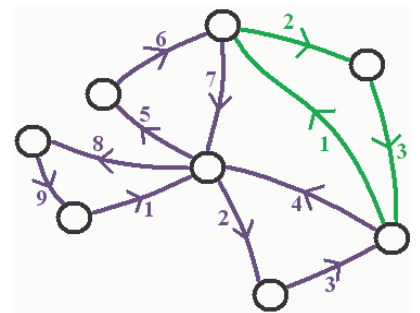


**Tétel:** Egy gráfban akkor és csak akkor található Euler-körvonal, ha összefüggő és minden pont fokszáma páros.

**Biz:**  $\Rightarrow$  minden csúcspár közt vezet séta az Euler-körvonalon, tehát összefüggő és minden csúcsnál az Euler-körvonal ki- és behalad, tehát minden fok ps  
 $\Leftarrow$  induljunk ki egy tetszőleges csúcsból egy élen (mivel a foka páros, vezet belőle él), minden csúcsból tovább tudunk menni a fokszám párossága miatt, kivéve, ha visszajutottunk a kiindulópontba (ahol már csak ptl fokszám maradt).

Ha ekkor nem maradt ki él, akkor a séta Euler-körvonal volt.

Ha kimaradtak élek, akkor azok valahol csatlakoznak az eddig megtett sétához (kék) (mert a gráf összefüggő volt), és a megmaradó csúcsok el nem használt fokszámai párosak (hiszen eddig páros fokszámot használtunk el). Ekkor lehet újabb körvonalat tenni a kimaradó éleken (zöld), és belefűzni az eddigi sétába. Minden belefűzéskor csökken a kimaradó élek száma, és véges sok lépésben elfogynak a kimaradó élek, így kész az Euler-körséta.

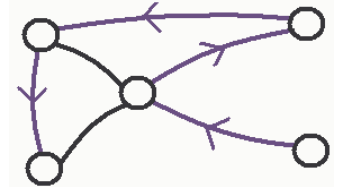


**Tétel:** Egy gráfban akkor és csak akkor található Euler-vonal, ha összefüggő és maximum két páratlan fokszámú csúcsa van.

**Biz:**  $\Rightarrow$  minden csúcspár közt vezet séta az Euler-vonalon, tehát összefüggő és minden csúcsnál az Euler-vonal ki- és behalad, tehát minden fokszám páros, kivéve esetleg a kezdő és végpontot.

- $\Leftarrow$  Ha nincs páratlan fokú csúcs, akkor az előző tétel miatt van Euler-kör is.  
 Egy páratlan fokú csúcs nem lehet gráfban, ugye.  
 Ha pedig két páratlan fokú csúcs található a gráfban, akkor kössük össze azt a kettőt egy éllel, így minden csúcs páros fokszámú lesz, tehát az előző tétel miatt van benne Euler-körvonal. Elhagyva a behúzott élet, a körvonalból csak vonal lesz, kezdő- és végpontja pedig a két páratlan fokú csúcs.

**Def.:** *Hamilton-út:* olyan út, amely a gráf összes csúcsán áthalad (pontosan egyszer)  
*Hamilton-kör:* olyan kör, amely a gráf összes csúcsán áthalad (pontosan egyszer)



**Tétel:** Ha a gráfban létezik olyan  $k$  db csúcs, amelyeket az éleivel törölve a gráf legalább  $k+1$  részre esik szét, akkor a gráfban nincs Hamilton-kör, ha pedig létezik olyan  $k$  db csúcs, amelyeket az éleivel törölve a gráf  $k+2$  részre esik szét, akkor nincs Hamilton-út sem a gráfban.

**Tétel:** *Dirac-tétel:* ha egy  $n \geq 3$  csúcsú gráfban minden pont foka legalább  $\frac{n}{2}$ , akkor van a gráfban Hamilton-kör.

**Tétel:** Ha egy  $n$  csúcsú gráfnak legalább  $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2} + 2$  éle van, akkor van a gráfban Hamilton-kör.

#### Alkalmazások:

- hálózatok (számítógép, ismeretségi, térkép, elektromos hálózatterv)
- legrövidebb út keresés
- útvonaltervezés
- családfa