

25. tétel:**Bizonyítási módszerek és bemutatásuk tételek bizonyításában,
tétel és megfordítása, szükséges és elégséges feltétel**

Axióma: olyan állítás, amelynek igazságát bizonyítás nélkül elfogadjuk.

Bizonyítás: egy állítás igazságának megmutatása az axiómáink, már belátott tételeink és logikai következtetések segítségével.

Logikai műveletek:

Logikai *állítások*: olyan mondatok, melyek igazságtartalma egyértelműen eldönthető.

Jelük: A, B, C ...

Egy állításnak kétféle *igazságtartalma* lehet: I vagy H (néha 1 vagy 0).

Logikai műveletek:1. **és** (konjunkció):

Két éssel összekapcsolt állítás csak akkor igaz, ha mindkét állítás igaz.

Jele: $A \wedge B$ (kiejtve: A és B)

2. **vagy** (diszjunkció) (megengedő!):

Két vaggyal összekapcsolt állítás csak akkor hamis, ha mindkét állítás hamis.

Jele: $A \vee B$ (kiejtve: A vagy B)

3. **implikáció:**

Két implikációval összekapcsolt állítás csak akkor hamis, ha a feltétel igaz, de a következmény nem.

Jele: $A \Rightarrow B$ (kiejtve: ha A akkor B)

A *elégséges feltétele* B -nek, B *szükséges feltétele* A -nak

4. **ekvivalencia:**

Két ekvivalenciával összekapcsolt állítás csak akkor igaz, ha a két állítás igazságtartalma megegyezik (vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis.)

Jele: $A \Leftrightarrow B$ (kiejtve: A ekvivalens B -vel)

A *szükséges és elégséges feltétele* B -nek

5. **tagadás** (negáció):

Egy állítás tagadása csak akkor igaz, ha az állítás hamis.

Jele: $\bar{A}$ (kiejtve: nem A)

A logikai műveleteket megadhatjuk igazságtáblázattal is:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$\bar{A}$
I	I	I	I	I	I	H
I	H	H	I	H	H	H
H	I	H	I	I	H	I
H	H	H	H	I	I	I

Azonosságok: De Morgan: $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$, $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$ és, vagy tagadása
 $\overline{A \Rightarrow B} = A \wedge \bar{B}$ implikáció tagadása!

Bizonyításfajták:**1. Direkt bizonyítás:**

Igaz állításokból indulva helyes logikai lépések során a bizonyítandó állításhoz jutunk.

Például: egyenes irány- vagy normálvektoros egyenletének bebizonyítása

Pitagorasz-tétel

logaritmusra vonatkozó tételek

számok hárommal való oszthatóságának tétele

terület és térfogatképletek

Ezen bizonyítások folyamán ekvivalens átalakításokat végzünk.

2. Indirekt bizonyítás:

Az állítás tagadásának feltételezéséből helyes logikai lépések folyamán ellentmondásra jutunk.

Például: a körhöz húzott érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra
végtelen sok prímszám van

Konkrét példa:

Tétel: $\sqrt{2}$ irracionális

Bizonyítás: *indirekt:*

Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám.

Ha $\sqrt{2}$ racionális, akkor felírható két egész szám hányadosaként:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{ahol } p, q \in \mathbb{Z} \text{ és } (p, q) = 1 \text{ (p és q relatív prímek) nopersze } q \neq 0$$

Négyzetre emelés és beszorzás után: $2q^2 = p^2$

$$2q^2 \text{ ps} \Rightarrow p^2 \text{ is ps} \Rightarrow p \text{ is ps (ptl szám négyzete nem lenne ps).}$$

Ha p páros, akkor felírható a következő alakban: $p = 2k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$

Visszahelyettesítve: $2q^2 = 4k^2$ és 2-vel egyszerűsítve $q^2 = 2k^2$

$$2k^2 \text{ páros} \Rightarrow q^2 \text{ is páros} \Rightarrow q \text{ is páros}$$

$$\text{Ha } p \text{ is és } q \text{ is páros} \Rightarrow \text{nem relatív prímek}$$

**3. Teljes indukció:**

Végtelen sok állítás bizonyításához, melyek egy pozitív egész számtól függenek.

A bizonyítás két lépésből áll.

1. belátjuk a kezdőlépést, azaz:

hogy az állítás igaz a kezdőlépésre (pl. $n = 1 - re$)

2. belátjuk az indukciós lépést, azaz:

hogyha az állítás igaz $n = k - ra$, akkor $n = k + 1 - re$ is.

Például: számtani és mértani sorozatok n -edik tagjára vonatkozó képlet
 különböző összegek zárt alakjai
 oszthatósági problémák
 egy n elemű halmaz részhalmazainak száma 2^n
 számtani és mértani közép közti összefüggés n számra
 gráfelméletben n csúcsú összefüggő gráf minimális élszáma $n - 1$

Állítás: Az első n db négyzetszám összege: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bizonyítás: teljes indukcióval:

1. $n = 1$ -re: $\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ $1^2 = 1$ tehát $n=1$ -re igaz az állítás.

2. Tegyük fel, hogy k -ra igaz az állítás, azaz:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Kell, hogy $k+1$ -re is igaz az állítás, azaz:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Nosakkortehát:

$$\begin{aligned} \underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}_{\text{indukciós feltétel}} + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 && \begin{array}{l} \text{közös nevező} \\ \text{kiemelés} \end{array} \\ &= \frac{(k+1) \cdot [k \cdot (2k+1) + 6 \cdot (k+1)]}{6} && \text{összevonás} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} && \begin{array}{l} \text{szorzattá-} \\ \text{alakítás} \end{array} \quad \text{Q.E.D} \end{aligned}$$

4. Skatulya-elv:

Ha van n db skatulya, és ezekbe legalább $n+1$ tárgyat helyezünk el, akkor lesz legalább egy olyan skatulya, melybe több tárgy került.

Például: oszthatósági, maradékos feladatok

Konkrét példa:

Tétel: minden véges egyszerű gráfban van két azonos fokszámú csúcs.

Bizonyítás:

Egy n csúcsú egyszerű gráfban egy csúcs foka lehet:

$$0; 1; 2; 3; \dots, n-2, n-1$$

$\Rightarrow$ A 0 fokszám azt jelenti, hogy az adott csúcs semelyik másik csúccsal nincs összekötve éllel,

$\Rightarrow$ az $n-1$ -es fokszám azt jelenti, hogy az adott csúcs és bármelyik másik csúcs között vezet él

$\Rightarrow$ ezért a 0 és az $n-1$ -es fokszám egyszerre nem fordulhat elő.

Így az n lehetséges fokszám közül csak $n-1$ db fordulhat elő egy ilyen gráfban.

Viszont n db csúcsa van a gráfnak, így a skatulya elv értelmében kell két egyező fokszámú csúcsnak lennie a gráfban.

5. Oszthatósági szabályok alkalmazása

Számelméleti feladatoknál.

6. Végtelen leszállás (descente infinie)

Általában diofantoszi egyenletek (egész együtthatós egyenletek, melyekben általában több ismeretlen van, mint egyenlet, de a megoldásokat az egész vagy természetes számok közt keressük) ellentmondásosságának bizonyításhoz használjuk.

A végtelen leszállás folyamán feltételezve, hogy az egyenletnek van egy pozitív egész megoldása, bizonyítjuk, hogy létezik egy ennél kisebb pozitív egész megoldása is. Ezt folytatva végtelen sok egyre csökkenő pozitív egészek sorozatát kapjuk, ami nyilvánvaló ellentmondás.

Példa:

Bizonyítsuk be, hogy $2q^2 = p^2$ egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok halmazán!

Ha p és q pozitív egész megoldaspárja az egyenletnek:

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ is } 2 \text{ szorozta} \Rightarrow p \text{ is } 2 \text{ szorozta} \text{ (ptl szám négyzete nem lenne } 2 \text{ szorozta)}$$

Ha p páros, akkor felírható a következő alakban: $p=2k$, ahol $k \in \mathbb{N}^+$

$$\text{visszahelyettesítve: } 2q^2=4k^2 \quad \text{és } 2\text{-vel egyszerűsítve } q^2=2k^2$$

$$2k^2 \text{ páros} \Rightarrow q^2 \text{ is páros} \Rightarrow q \text{ is páros} \text{ ezért } q=2n, \text{ ahol } n \in \mathbb{N}^+$$

Így $2q^2 = p^2$ egyenletből kapjuk az $2n^2 = k^2$ egyenletet, ahol n és k már kisebb megoldások p -nél illetve q -nál.

Ezt folytatva végtelen sok egyre csökkenő pozitív egészek sorozatát kapjuk, ami nyilvánvalóan nem létezik, tehát ellentmondás.

(ez a $\sqrt{2}$ irracionális tétel bizonyításának végtelen leszállásos bizonyítása volt)

Tétel és megfordítása:

Az $A \Rightarrow B$ alakú tételek megfordítása $B \Rightarrow A$.

Példák:

Pitagorasz-tétel:

Egy derékszögű háromszög két befogójának négyzetösszege az átfogó négyzete.

$$\text{Azaz: } \gamma = 90^\circ \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Pitagorasz-tétel megfordítása:

Ha egy háromszögben két oldal négyzetének összege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a harmadik oldallal szemben derékszög van.

$$\text{Azaz: } a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \gamma = 90^\circ.$$

Thalesz-tétel:

Ha egy kör egyik átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk, ahol a derékszög az átmérővel szemben van.

Thalesz-tétel megfordítása:

Ha egy AB szakasz egy C pontból derékszög alatt látszik, akkor C pont rajta van az AB átmérőjű körön. Ez másnéven AB szakasz *Thalész-köre*. Vagyis derékszögű háromszög köréírható körének középpontja az átfogójának felezőpontja.

Természetesen létezik olyan példa is, amelynél egy tétel megfordítása nem igaz.

Ha egy gráf minden csúcsa legalább másodfokú, akkor a gráfban van kör. A megfordítása nem igaz, példa:



Ha egy függvény differenciálható a -ban, akkor a -ban folytonos is.

A megfordítása nem igaz, pl. $f(x) = |x|$ a nullában.

$f(x)$ -nek szélsőértéke van a -ban és ott differenciálható $\Rightarrow f'(a) = 0$.

(ez szükséges feltétele a szélsőértéknek)

A megfordítása nem igaz, pl. $f(x) = x^3$ függvénynek a nullában nincs szélsőértéke.

Ha $f'(a) = 0$, és $f''(a) \neq 0 \Rightarrow f(x)$ -nek szélsőértéke van a -ban.

(ez már elégséges feltétele a szélsőértéknek)

A megfordítása nem igaz, pl. $f(x) = x^4$ függvénynek a nullában szélsőértéke van, de az első három deriváltja nulla ott.

Alkalmazások:

- matematikai bizonyításoknál használjuk a bizonyításokat ☺
- logikai készségek fejlesztése
- deduktív gondolkodás (hölgy vagy tigris)
- hálózatok fejlesztése (gráfelméleti, kombinatorikai problémák)
- nyilvános kulcsú titkosítás (számelméleti tételek segítségével)