

MATEMATIKA KÉPLETTÁR

Képlettár

A képlettár segítséget nyújt a feladatok megoldásához, de nem tartalmazza azokat az ismereteket és összefüggéseket, amelyek a részletes érettségi vizsgakövetelményben bizonyítandó tételként szerepelnek.

Hatványok

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \dots + (-1)^{2k-n} a^{2k-n}b^n + \dots - ab^{2k-1} + b^{2k})$$

$$a^{2k} - b^{2k} = (a + b)(a^{2k-1} - a^{2k-2}b + \dots + (-1)^{n-1} a^{2k-n}b^{n-1} + \dots + ab^{2k-2} - b^{2k-1})$$

Binomiális tétel

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Binomiális együtthatók

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Különböző alapú logaritmusok

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

Középek

Aritmetikai közép: $A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$

Súlyozott közép: $A' = \frac{g_1 a_1 + g_2 a_2 + g_3 a_3 + \dots + g_n a_n}{g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i a_i}{\sum_{i=1}^n g_i}$

Geometriai közép: $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$

Harmonikus közép: $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$

Négyzetes közép: $Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}}$

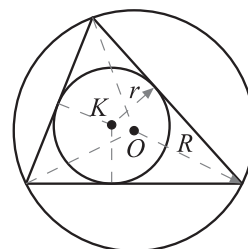
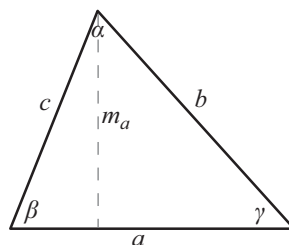
Háromszög

$$K = 2s = a + b + c$$

$$T = \frac{am_a}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{abc}{4R} = sr.$$

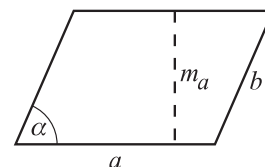
$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$T = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$



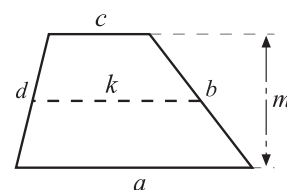
Négyszögek

Paralelogramma: $T = a \cdot m_a = ab \sin \alpha$



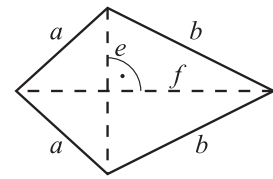
Trapéz:

$$T = \frac{a+c}{2} m = mk$$



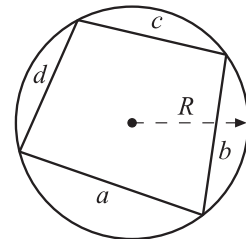
Deltoid:

$$T = \frac{ef}{2}$$



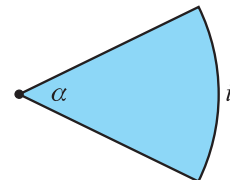
Húrnégyszög:

$$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}; \quad 2s = K$$



Körcikk:

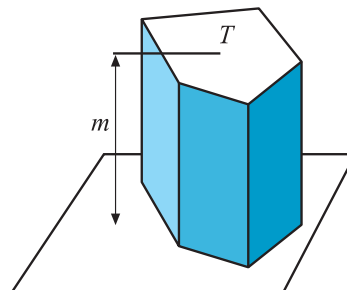
$$i = r\hat{\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ} r\alpha^\circ, \quad T = \frac{ri}{2} = \frac{r^2\hat{\alpha}}{2} = \frac{\pi}{360^\circ} r^2\alpha^\circ$$



Felszín és térfogat

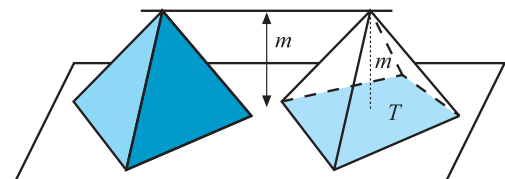
Hasáb:

$$A = P + 2T, \quad V = Tm$$



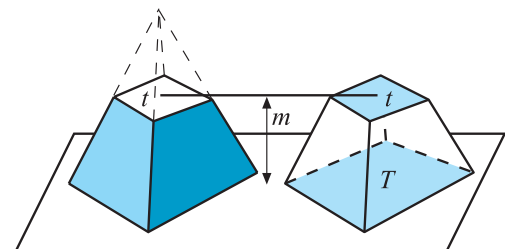
Gúla:

$$A = P + T, \quad V = \frac{Tm}{3}$$

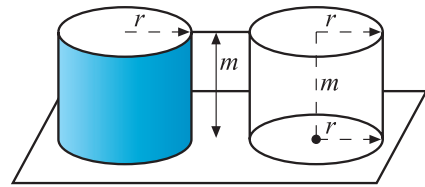


Csonkagúla:

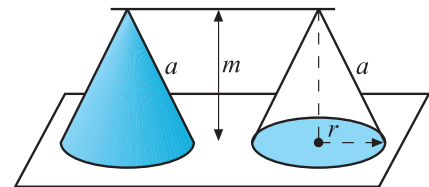
$$V = \frac{m}{3} (T + \sqrt{Tt} + t)$$



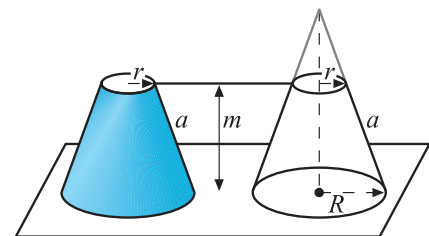
Forgáshenger: $A = 2\pi r(m + r), V = \pi r^2 m$



Forgáskúp: $A = \pi r(a + r), V = \frac{\pi r^2 m}{3}$

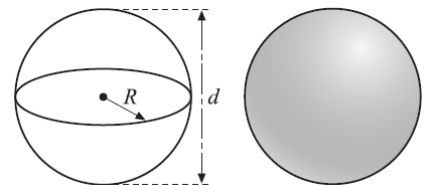


Csonkakúp: $A = \pi[R^2 + r^2 + (R + r)a], V = \frac{\pi}{3}m(R^2 + r^2 + Rr)$



Gömb: $A = 4\pi R^2 = \pi d^2$

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{\pi}{6}d^3$$



Trigonometriai összefüggések

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} ;$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} ;$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} ;$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

Koordináta-geometria

Adott arányban osztó pont koordinátái:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n},$$

$$P_1(x_1; y_1) \quad P(x; y) \quad P_2(x_2; y_2)$$

ahol $P_1P : PP_2 = m : n$.

Vektorok skaláris szorzata: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}; \mathbf{b})$;

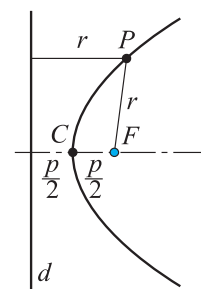
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2, \text{ ahol } \mathbf{a}(a_1; a_2) \text{ és } \mathbf{b}(b_1; b_2).$$

Parabola

Kanonikus egyenlet, ha $C(0, 0)$, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$: $y^2 = 2px$

Paraméteres egyenletei, ahol $C(u, v)$: $y = \frac{1}{2p}(x - u)^2 + v$

$$x = \frac{1}{2p}(y - v)^2 + u$$



Differenciálási szabályok:

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

Trigonometrikus függvények deriváltjai

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Határozatlan integrál

Integrálási szabályok:

$$\int (c \cdot f) = c \cdot \int f$$

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

Trigonometrikus függvények primitív függvényei

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Határozott integrál

Ha $[a; b]$ -on f integrálható és $F' = f$, akkor $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$.

Integrálási szabályok:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f$$

$$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$$

Statisztika

Középtérés: a mediántól való abszolút eltérések számtani közepe.

$$d = \overline{|x_i - m_e|} = \frac{\sum |x_i - m_e|}{n}.$$

Variancia (szórásnégyzet): a mintaközéptől való eltérések négyzetes közepe

$$s^2 = \overline{(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}, \quad s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2.$$

Szórás: a variancia négyzetgyöke

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{(\overline{x^2}) - (\bar{x})^2}.$$

Valószínűség-számítás

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1.$$

$$\text{Teljes eseményrendszerre: } \sum_{k=1}^m P(E_k) = 1.$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m) \leq \sum_{k=1}^m P(E_k).$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

A feltételes valószínűség összefüggései ($F \neq O$):

$$0 \leq P(E|F) \leq 1.$$

$P(E|F) = P(E)$, ha az E és F események függetlenek.

$$P(E_1 | F \cup E_2 | F \cup \dots \cup E_m | F) = \sum P(E_k | F),$$

ha egymást páronként kizáró események.

Eloszlások

Egyenletes eloszlás:

$$\xi \in \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}; \quad \forall k: P(\xi = x_k) = \frac{1}{n}; \quad \mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k; \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2.$$

Geometriai eloszlás:

Paraméterek: $p, q \in]0;1[\wedge (p+q=1)$.

$$\xi \in \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}; \quad \forall k: P(\xi = k) = p \cdot q^{k-1}; \quad \mu = \frac{1}{p}; \quad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$