

2. Tanulási egység

A Kirchhoff-törvények és alkalmazásai

Miről lesz most szó?

Kevés általában az olyan módszer, amelyet szinte tetszőleges probléma esetén biztos kézzel és egyszerűen (algoritmizálható lépések mellett) használhatunk. Az egyenáramú hálózatok jellemzőinek meghatározására egy ilyen lehetőség a Kirchhoff-egyenletek felírása és megoldása. A következő pontokban rámutatunk az egyenletek eredetére, helyességére, megtanuljuk, hogyan írhatók fel helyesen és oldhatók meg tetszőleges, összetettebb probléma esetén is. A fejezet végére ezáltal képessé válunk bármilyen egyenáramú hálózat jellemzőinek meghatározására.

Elektromos áramkör mint légcsatoma?

Ritkán szokás az áramló gáz modelljét az elektromos hálózatok leírására használni, mégis néhány esetben szemléletesebb képet nyújt ez a fajta leírás.

Az előzőekben megmutattuk, hogy az elektromos áram és az áramló gázok modelljének leírása között gyakorlatilag szoros párhuzam vonható. Ez alapján vezettük be az Ohm-törvényt, amely egy tetszőleges, ellenállást képező hálózati elem csatlakozási pontjai közötti feszültségkülönbség és az illető elemen átáramló töltéshordozók mennyisége között állapít meg lineáris kapcsolatot.

$$I = \frac{1}{R} \cdot \Delta P \rightarrow I = \frac{U}{R}$$

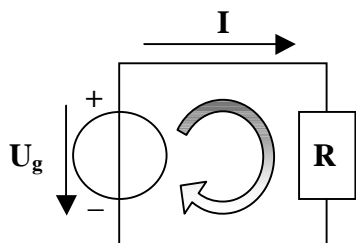
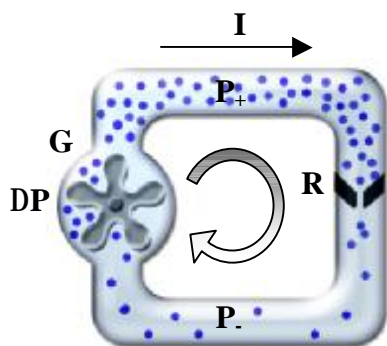
- I-** az áramló gáz, a mi esetünkben ezek lesznek az áramló elektronok.
- R-** valamiféle ellenállás, „szűkület” a vezetékben, ez elektromos szempontból lehet a hálózat egy rosszul vezető szakasza.
- G-** egy ventilátor vagy szivattyú, ami a $\Delta P = P_+ - P_-$ nyomáskülönbséget biztosítja. Ez felel meg az elektromos hálózatban a generátornak, ami a meghajtáshoz szükséges potenciálkülönbséget, a tápfeszültséget szolgáltatja ($\Delta P \equiv U_g$).

Vegyük észre, hogy jelen esetben a kör egy elágazásmentes, zárt hurok. Áramát egyedül **R** korlátozza, bármely keresztmetszetén csak annyi töltéshordozó áramlik át, amennyit az ellenállás „átenged”.

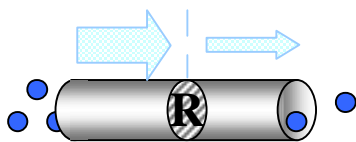
Ez az anyagmegmaradás elvéből következik, egyszerűen szólva, ha egy csőbe az egyik végén belefújunk, akkor pontosan annyi levegő jön ki a másik végén, mint amennyit az elsőn az ellenállástól függően beleerőltetünk.

Ha az ellenállás végtelen nagy, azaz valaki elszorítja a cső derekát, egyáltalán nem bírunk belé levegőt fújni; csak a nyomást biztosítjuk, de áramlás nem jön létre. Ilyenkor elektromos értelemben szakadásról beszélünk. A szakadás két vége között csak potenciálkülönbség van, de áram nem folyik.

Ha az ellenállás nulla, akár hogy is kapkodjuk a levegőt, nem tudjuk a kívánt nyomáskülönbséget létrehozni, a levegő akadály nélkül átsiklik a csövön, mi pedig csak fújunk, csak fújunk, míg túlpörögve el nem ájulunk – elektromos esetben a generátor is hasonlóan viselkedik: az Ohm-törvény alapján ilyenkor a körben matematikailag végtelen nagy áram kezd folyni, s minthogy a teljesítmény



2.1. ábra. Az áramló gáz modellje és a neki megfelelő elektromos hálózat

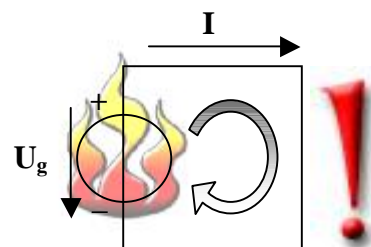
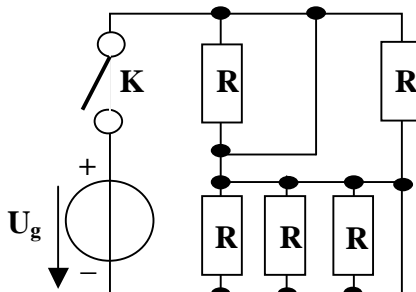


az áram négyzetével arányos, a tápegység - és általában a vezeték is - gyorsan melegedni kezd, majd rövidesen tönkremegy, leég. Ezért soha ne építsünk olyan kapcsolást, ahol a generátor árama találhat olyan útvonalat a hálózatban, amely ellenállás nélkül kapcsolja össze a pozitív és negatív pólusokat!



2.1. Ön szerint biztonságosan üzembe (áram alá) helyezhetjük-e az itt látható áramkört a K-kapcsoló zárása által?

Gondolja végig, leéghet-e a generátor!



A Kirchhoff-egyenletek származtatása

A Kirchhoff-törvények gyakorlatilag tények, axiomatikus alapigazságok. Könnyű alkalmazni őket, olyan egyenletrendszert állítanak fel, melyek alapján a rendszer összes jellemzője kiszámítható.

Vegyük a következő, egyszerű példát: A 2.2. ábrán látható esetben szeretnénk meghatározni az áramot, ha U_g és R is adott. Mivel az ellenállás két sarkán maga az U_g potenciálkülönbség esik, így az Ohm-törvény alapján:

$$I = \frac{U_g}{R}$$

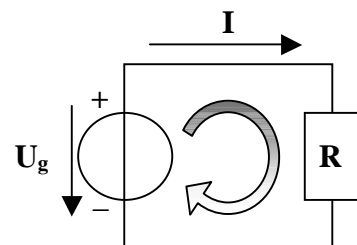
Ebből átrendezéssel kapjuk, hogy:

$$I \cdot R - U_g = 0, \quad \text{azaz} \quad \boxed{U_R - U_g = 0}.$$

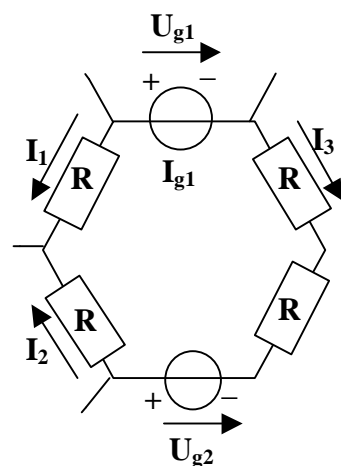
Fogalmazzuk meg, hogy ez mit jelent! Mindkét tag potenciálkülönbséget, azaz feszültségesést jelöl, de ellenkező előjellel. Ez nem véletlen, hiszen ha körbe megyünk az áramkör mentén, mondjuk a fentebbi ábrán jelölt irányban, akkor a potenciál az ellenálláson egy magas szintről esik egy alacsony szintre, a generátornál pedig erről az alacsonyról „esik” vissza a magas szintre. Az előjelek tehát ezt az „irányultságot” fejezik ki. Ennek fényében azt mondhatjuk, hogy a hurokban a feszültségesések előjeles összege zérus.

Könnyen látható, hogy ez a kijelentés tetszőleges, akár becsatlakozó ágakat is tartalmazó (eltérő ágáramú) bonyolultabb zárt hurokra is igaz marad. Egy ilyen esetet láthatunk a jobb oldali ábrán, ahol az egyes elágazások egy kiterjedt hálózathoz való csatlakozási pontokat jelölnek.

Tegyük fel, hogy az előző állítás nem igaz. Ez azt jelenti, hogy rögzített értékű, ismertnek tekintett ágáramok (I_1, I_2, I_3, I_{g1}) mellett a feszültségeséseket összegezve, körbe érve a hurkon nem nulla potenciálkülönbséget kapunk eredőül. Ekkor viszont a hurokban ennek hatására létrejövő plusz áramnak is kellene folynia. Ám, mivel az áramok értékeit rögzítettnek tekintjük, a feltevés ellentmondáshoz vezet.



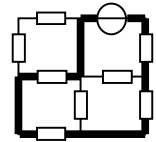
2.2. ábra. Ebben az egyszerű esetben az Ohm-törvényből azonnal adódik a körben folyó áram nagysága.



2.3. ábra. A huroktörvény különböző ágáramokat tartalmazó hurok esetén is igaz marad.



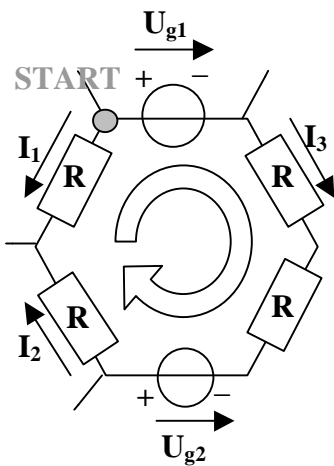
2.2. Ön szerint igaz lehet-e az itt látható hálózat vastag fekete vonallal jelölt hurokjára, hogy benne az egyes feszültségesések előjeles összege nulla?



Elfogadhatjuk tehát, hogy tetszőleges hurokban a feszültségesések előjeles összege nulla. Most arról fogunk beszélni, hogy ezekből az „előjeles összegekből” hogyan képezhető egy olyan egyenletrendszer, amelynek minden ismeretlen paramétere kiszámítható.

Ehhez először azt kellene pontosítani, hogy ezt az „előjeles összeg”-et hogyan képezzük. A helyzet ugyanis az, hogy a hurokban lehet több ismeretlen mennyiség is, amelyeket ki kell számolni. Az iménti körben az áramokat ismertnek tekintettük. Mi történik, ha pl. ezeket nem ismerjük? Az ismeretlen mennyiségnek az iránya is ismeretlen! Hogy melyik milyen előjellel szerepeljen, azt az összegzéshez tudnunk kellene.

Amennyiben szükség van ismeretlen áramok, vagy generátorok irányaira, hogy az előzőhöz hasonló egyenleteket fel tudjunk írni, a megoldás a következő: adjunk mi ezeknek a mennyiségeknek irányt! A választás lehet véletlenszerű, mert ez az összegzés folyamán csak előjelben okoz különbséget. Ha rosszul tippeltünk, mindössze annyi történik, hogy az ismeretlen mennyiség értékére negatív számot kapunk, röviden, az irány jelentését az előjel hordozza. Legyen a bal oldali ábrán az egyébként ismeretlen áramok iránya a bejelölt irány!



2.4. ábra. Az ismeretlen áramirányokat, és a körüljárási irányt tetszőlegesen felvehetjük.

Az előzőek alapján tudjuk, hogy a hurokban előforduló feszültségesések irányultságuk alapján lehetnek azonos és ellentétes értelműek is. Azt is láttuk, hogy az ismeretlen mennyiségek irányait véletlenszerűen választhattuk meg. Ezek után melyik irány lesz a pozitív és melyik a negatív? Ennek eldöntésére, szükség van egy referencia irányra, amit a továbbiakban „körüljárási iránynak” fogunk nevezni. Ez lesz az az irány, amely szerint körbe haladva a hurkon összegezzük a feszültségeséseket. Hogy melyik irányba indulunk el, az óramutató járásával megegyező, vagy azzal ellentétes irányban, az ismét rajtunk múlik, ezt minden egyes esetben mi dönthetjük el. Az ábrán a kör alakú nyíllal jelölve most az óramutató járásával megegyező irányt választottuk.

Ezek után megegyezünk abban, hogy akárhogyan is vettük fel a körüljárási irányt, a hurok mentén körbe haladva az azzal megegyező irányú áramot okozó feszültségesést – amennyiben ez ellenálláson esik (tehát $I \cdot R$ szorzatból adódik) pozitívnak, az azzal ellentétes irányút, negatívnak tekintjük. Ha az illető potenciálkülönbséget generátor szolgáltatja, akkor azt, a körüljárási iránnyal megegyező irányú generátorirány esetén pozitívnak, ellentétes esetben negatívnak tekintjük. Ezek alapján az előjeles összeg az U_{g1} előtti elágazástól indulva:

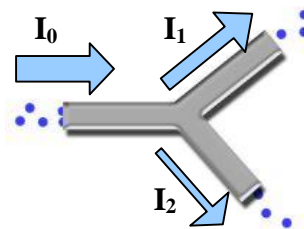
$$U_{g1} + I_3 \cdot R + I_3 \cdot R - U_{g2} + I_2 \cdot R - I_1 \cdot R = 0$$



2.3. Gondolja végig, milyen változást jelentene az előbbi egyenletre nézve, ha a körüljárási irányt fordítva vettük volna fel? Van-e ennek hatása valamelyik kiszámolandó paraméter, pl. az I_3 értékére?

Ha az egyenletben mindössze egyetlen ismeretlen van, akkor azt kifejezve azonnal adódik a megoldás. Legtöbbször azonban csak az ellenállások és a generátorok értékei ismertek, a kérdés pedig a hálózat egy vagy több ágarama. Az előbbi egyenletben ez három ismeretlent jelent!

Tudjuk, hogy egy egyenletrendszer akkor megoldható, ha legalább annyi független egyenlet áll a rendelkezésünkre, mint ahány ismeretlenünk van. A hiányzó egyenletek a hálózatban fellelhető további hurkokra felírt előjeles összegek és az elágazási pontok (csomópontok) áramviszonylatai alapján nyerhetők. Tetszőleges csomópontra ugyanis az anyagmegmaradás révén igaz, hogy amennyi áram befolyik a vezetéseken, annyi más vezetéseken ki is folyik belőle. Például a 2.5. ábrára $I_0 = I_1 + I_2$. A hálózat csomópontjai által ez további összefüggéseket jelent az áramokat illetően. A következőkben kimondjuk általános alakjukban is a Kirchhoff-törvényeket.



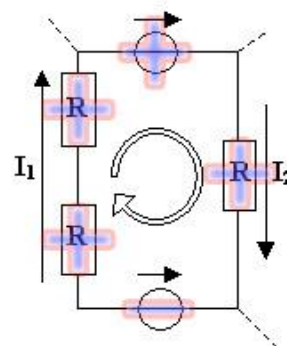
2.5. ábra. A csomópontba befolyó és az onnan kifolyó áramok összege megegyezik.

A Kirchhoff-törvények általános alakja

Kirchhoff I. törvénye, a huroktörvény:

- **Bármely független zárt hurokra, a hurkon belüli feszültségesések előjeles összege zérus.**

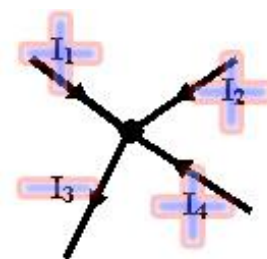
Ha a feszültségesés ellenálláson eső feszültség, és azt a körüljárási iránnyal megegyező irányú áram okozza, az összegben pozitívnak, különben negatívnak vesszük fel. Ha a potenciálkülönbséget generátor okozza, és az, a körüljárási iránnyal megegyező generátorirányú, az összegben pozitívnak, ellenkező esetben negatívnak vesszük fel.



Kirchhoff II. törvénye, a csomóponti törvény:

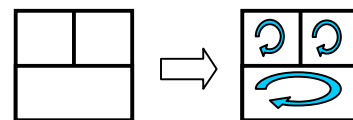
- **Bármely független csomópontra a csomópontba be- és kifolyó áramok előjeles összege zérus.**

Ha a csomópontba befolyik az áram, az összegben pozitív, ha kifolyik, negatív előjellel szerepeltetjük.

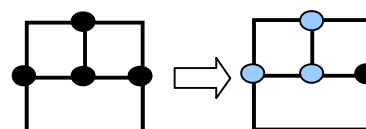


Írányok felvétele: a körüljárási irány, és az ágáramok irányainak felvétele minden hurokban tetszőleges. Ha az áramirányt sikerült eltalálnunk, eredményül pozitív-, ha nem sikerült, negatív áramértéket kapunk. Az előjel mindössze a tényleges irányról hordoz információt.

Független hurkok: a hálózat különböző hurokjai közül azok függetlenek, amelyek mindegyikében van olyan ágáram, amely a többiben nem szerepel. Ha a hálózatot minimális, diszjunkt hurkok halmazára bontjuk, akkor azok függetlenek.

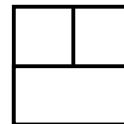


Független csomópontok: A hálózat azon csomópontjai, amelyek mindegyikében szerepel olyan áram, amely a többiben nem szerepel. Ha egy hálózatban N számú csomópont van, akkor azok közül bármelyik $N-1$ db független.





2.4. Ön szerint hány nem független hurokja, és hány nem független csomópontja van az itt látható egyszerű hálózatnak? (az alkatrészeket most nem jelöltük)



A Kirchhoff-törvények alkalmazása

A hálózatok Kirchhoff-analíziséről a bevezetőben említettük, hogy könnyen algoritmizálható, ezt a következőkben alkalmazni is fogjuk. Először, mint valami „receptet”, közöljük a módszer technikai menetét, azután konkrét feladatokra nézzük meg ennek alkalmazását.

A Kirchhoff-analízis vázlata:

0. Ellenőrizzük, van-e a hálózatban rövidzár, vagy szakadt vezeték. Ezeket értelemszerűen iktassuk ki!
1. Az ismeretlen áramú ágakban vegyünk fel tetszőleges irányú ágáramokat, az ismert irányú áramoknál jelöljük az irányokat!
2. Az ismeretlen generátorokat lássuk el tetszőleges iránnyal, az ismerteknél jelöljük az irányokat!
3. Válasszunk tetszőlegesen egy-egy körjárási irányt minden független hurokra!
4. Alkalmazzuk a huroktörvényt a független hurkokra, amíg ugyanannyi egyenlet nem lesz, mint amennyi ismeretlen, vagy a független hurkok el nem fogynak.
5. Ha még mindig több az ismeretlen, akkor a csomóponti törvényt alkalmazzuk a független csomópontokra, amíg ugyanannyi egyenlet nem lesz, mint amennyi ismeretlen, vagy a független csomópontok el nem fogynak. Ha még mindig több ismeretlen maradna, mint amennyi egyenlet, a problémát a kevés adat alapján nem tudjuk megoldani.
6. Oldjuk meg az egyenletrendszert, a keresett paraméterekre.
7. A kapott eredmények és azok előjelei alapján jegyezzük fel az egyes mennyiségek értékeit és irányát is.

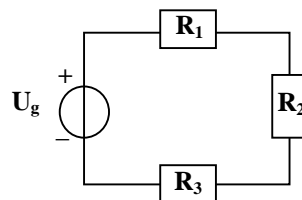
A következő pontokhoz Önre is szükségem van. Ugyanis ahhoz, hogy a módszert a későbbiekben készség szinten használni tudja, mindenképp értenie kell az eddig olvasottakat. Arra kérem, lassan haladjon tovább. Az előbbi fekete kerettel ellátott részekben folyamatosan kövesse a következő feladatok lépéseit, mit, mikor, miért csinálunk. Próbálja a lépéseket elsajátítani!

Mire a példák végére ér, már nem lehetnek ködös foltjai a feladatokkal kapcsolatban. Ha valamit nem ért, kérem, lapozzon vissza, és a fejezetet olvassa át előlről.

A következő példák során az egyszerűbb esetektől indulva haladunk az összetettebb feladatok felé, de emlékeztetni szeretném, hogy Kirchhoff-analízis lépései mindig ugyanazok az egyszerű lépések, hálózattól függetlenül.

2.1. Példa. A Kirchhoff-törvények alkalmazása egyetlen hurkú körre.

Adott az itt látható egyszerű hálózat. Számítsuk ki az R_3 ellenálláson folyó áramot, ha $U_g=5V$, $R_1=50\Omega$, $R_2=150\Omega$, $R_3=300\Omega$



0. Ellenőrizzük, hogy a hurok tartalmaz-e szakadt vezetékét, vagy rövidzárát. Látható, hogy egyetlen zárt hurokból áll az áramkör, és mindegyik ellenállásra igaz, hogy sarkai különböző potenciálon vannak, tehát rajtuk a normális működésnek megfelelően áram folyik, sem rövidzár, sem szakadt vezeték nincs a hálózatban.
1. A számításokhoz minden ismeretlen áramú ágban felvesszünk egy áramot tetszőleges irányítottsággal. Itt gyakorlatilag egyetlen hurok van, azaz minden ellenálláson ugyanaz az ismeretlen áram folyik át. Vegyük fel az áramot az ábra szerint.
2. Generátorirányok felvétele. Az ismert generátornál bejelöljük az irányt. Mint tudjuk a generátor iránya megegyezés szerint a pozitív sarka felől, a negatív sarka felé mutat.
3. Választunk egy tetszőleges körüljárási irányt. Válasszuk pl. az óramutató járásával megegyező körüljárási irányt! Ezt rajzoljuk is bele az ábrába (szürke nyíl).
4. A huroktörvények alkalmazása. Itt annyi darab egyenlet tudunk legyártani, mint ahány független hurok rendelkezésre áll, azaz jelen esetben egyetlen egy. Mivel csak az áram az egyetlen ismeretlen, ezért az egyenlet megoldható. Írjuk fel az egyenletet (előjeles összeget)!

Induljunk el az áramkör bal felső sarkától! Elérkezünk az R_1 -ig. Rajta a körüljárási árammal ellentétes irányú áram folyik, emiatt leírhatjuk, hogy az első feszültségesség

$$-I \cdot R_1$$

értékű. Ezzel R_1 -en sikeresen át is jutottunk. Haladunk tovább a körüljárási irány szerint, míg el nem érünk az R_2 -höz. Mivel ugyanaz az áram folyik át rajta is, ez szintén a körüljárási iránnyal ellentétes irányú, így felvéve a tagot az összegbe:

$$-I \cdot R_1 - I \cdot R_2$$

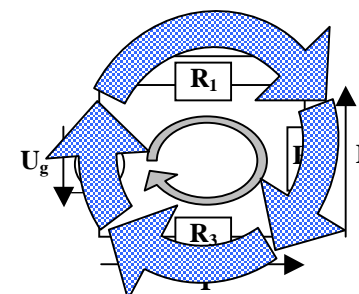
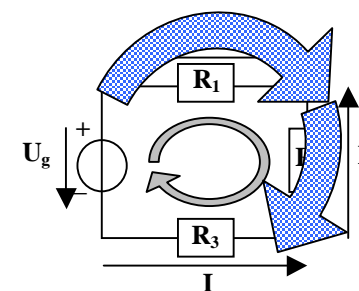
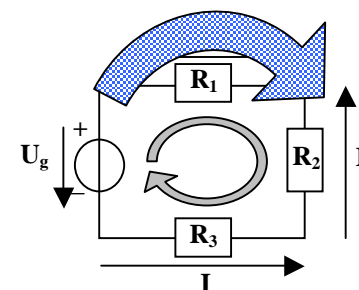
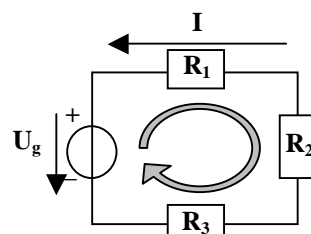
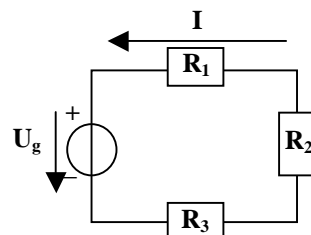
adódik. Utunkat folytatva, hamarosan az R_3 -hoz érkezünk. Vele szintén ugyanez a helyzet, így az összefüggésünk a

$$-I \cdot R_1 - I \cdot R_2 - I \cdot R_3$$

alakot ölti. Ahhoz, hogy visszajussunk a kiindulási pontba, még át kell haladnunk a feszültséggenerátoron. Ennek iránya szintén ellentétes a körüljárási iránnyal, így az összegbe ezt is negatív előjellel kell felvennünk:

$$\boxed{-I \cdot R_1 - I \cdot R_2 - I \cdot R_3 - U_g = 0}$$

Mivel visszaértünk a kiindulási pontba, az egyenletet nullával tehetjük egyenlővé, hiszen, mint mondtuk, zárt hurokban a feszültségesség előjeles összege nulla. Egy ismeretlenünk van, és egy egyenletünk, csak meg kell oldanunk, és készen is vagyunk.



6. Kifejezve az I ismeretlen áramot:

$$I = -\frac{U_g}{R_1 + R_2 + R_3} = -\frac{5}{50 + 150 + 200} = -\frac{5}{500} = -0.05A$$

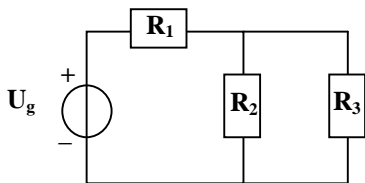
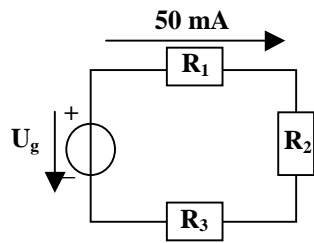
Az áram értéke tehát -50 mA. A negatív érték azt mutatja, hogy az áramirányt a számítás kezdetén nem jól vettük fel, a valódi, tényleges áram pont a másik irányba folyik.

Ez egyáltalán nem meglepő, ha arra gondolunk, hogy az áram mindig a generátor pozitív sarka felől igyekszik folyni a negatív sarka felé.



2.5. Oldja meg az előző példát, fordítva felvett körüljárási irány mellett is!

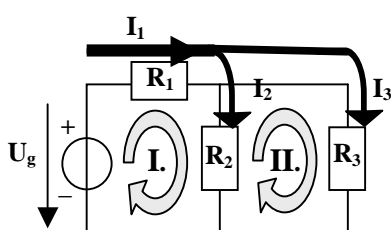
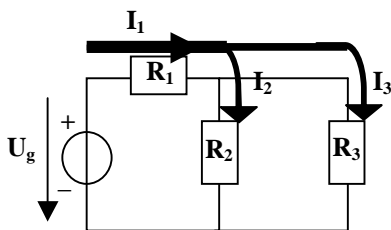
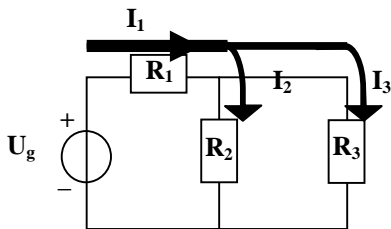
Mit tapasztal, mennyi lesz az áram értéke?



2.2. Példa. A Kirchhoff-törvények alkalmazása két független hurokból álló körre.

Legyen adott az itt látható hálózat. Határozzuk meg az R_3 -on eső feszültséget, ha $U_g=10\text{ V}$, $R_1=100\Omega$, $R_2=8\text{k}\Omega$, $R_3=4\text{k}\Omega$.


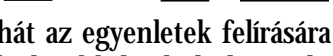
A kérdés tehát az R_3 ellenálláson eső feszültség. Ezt az Ohm-törvény alapján az $U_3=I_3 \cdot R_3$ összefüggés adja, tehát elég azt megmondani, hogy az R_3 -on mekkora áram folyik át. Határozzuk meg tehát ezt az áramot a Kirchhoff-törvények segítségével!



0. Szakadások, rövidzárak keresése. Nincsenek szakadt vezetékek, és olyan szerkezeti elemek sem, amelyeknek mindkét sarka ugyanazon a potenciálon lenne.

1. Vegyük fel az ágáramokat. Természetesen ugyanolyan véletlenszerűen felvehetők az áramok, mint az előző esetben, de induljunk ki most abból, hogy az áram a generátor pozitív sarkától a negatív sarka felé igyekszik folyni. Spekuláljunk! Úgy gondoljuk, hogy a generátor pozitív sarkából kijön valamekkora I_1 áram, aztán az elágazáshoz érve, egy része az R_2 -n I_2 , más része az R_3 -n I_3 áramként folyik át, a bejelölt módon. Világos, hogyha $R_2=R_3$ a gázmodell alapján mindkét ellenálláson ugyanakkora áram folyik – hiszen mindkét „szűkültre” ugyanakkora nyomáskülönbség jut-, de ez tetszőleges R értékekre nyilván nem igaz.

2. Generátorirányok felvétele. A körben egyetlen feszültséggenerátor található, ennek pedig iránya - mint azt korábban említettük, megegyezik az áram folyási irányával, azaz a pozitív sarkától mutat a negatív sarka felé.

3. Körüljárási irányok felvétele. Könnyű belátni, hogy a körben az összes lehetséges hurok száma három. Ezeket  vastag vonallal kiemelve, sematikusan  ábrázoltuk. Ebből bármely kettő független, tehát az egyenletek felírására felhasználható. Mi a legegyszerűbb módon, a legkisebb hurkok diszjunkt halmazára bontjuk az áramkört, az első két hurkot használva. A kapott független hurkokban tetszőlegesen felvesszük a körüljárási irányokat, és ezeket meg is számozzunk (I., II.).

4. Összesen 3 ismeretlenünk van (I_1 , I_2 , I_3), ezekhez szeretnénk elegendő mennyiségű egyenletet összeszedni. Alkalmazzuk a huroktörvényeket először az első körre.

Az R_1 -en az I_1 a körüljárási iránnyal megegyező irányban halad, emiatt az összegben, ez pozitív előjellel fog szerepelni. Az R_2 -n áthaladó I_2 áramra ugyanez igaz, míg végül a generátoron haladunk át, amelynek iránya viszont ellentétes a választott körüljárási iránnyal. Ez alapján

$$I. \quad I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 - U_g = 0$$

adódik. Ez eddig egyetlen egyenlet. A másodikhoz felírjuk a másik független hurokra a huroktörvényeket.

A másik kör mindössze két ellenállást tartalmaz. Induljunk a csomóponttól, és haladjunk a választott körüljárási irány szerint. Az R_3 -on áthaladó I_3 ezzel megegyező irányban halad, így az összegben pozitív előjelet kap. Ellentétben, az R_2 -n áthaladó I_2 most szembe halad az utóbbi kör körüljárási irányával, így a belőle képzett szorzat negatív lesz az összegben. Mivel más alkatrész nincs a körben, felírhatjuk az egyenletet

$$II. \quad I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0.$$

Ezzel van két egyenletünk, és három ismeretlenünk, több független hurkunk pedig nincs.

Ilyenkor kell használni Kirchhoff második törvényét, a csomóponti törvényt a fellelhető független csomópontokra.

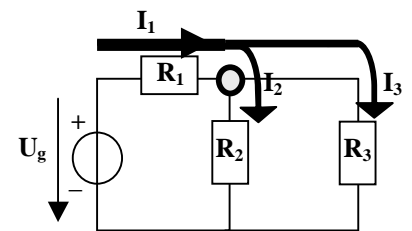
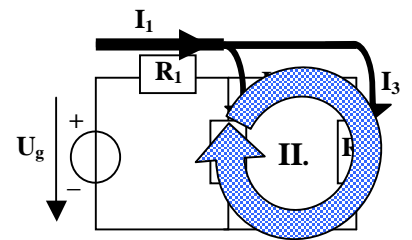
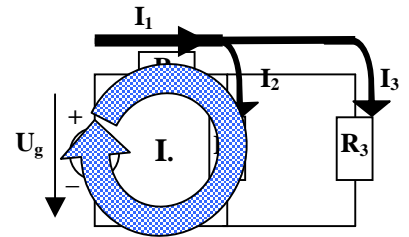
5. A hálózatban két elágazás, csomópont található, s mint tudjuk, ezek közül csak egy független. Mi dönthetjük el, hogy melyiket választjuk, legyen pl. a rajzon a felső, vastag fekete körrel jelölt. Felírva erre a csomóponti törvényt, az ismeretlenekre egy újabb összefüggést nyerünk. A csomópontba befolyó áramot pozitív előjellel, a csomópontból kifolyó áramokat negatív előjellel figyelembe véve:

$$III. \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

Adott három ismeretlen, három egyenlet, az egyenletrendszer megoldható. A kapott feladat tehát:

I.	$I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 - U_g = 0$
II.	$I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$
III.	$I_1 - I_2 - I_3 = 0$
$I_3 = ?$	

Érdeemes a változószám csökkentésének módszerét alkalmazni. Lényege, hogy valamelyik változót (nyilván nem azt, amire kíváncsiak vagyunk), kifejezzük az egyik egyenletből és behelyettesítjük a többibe. Ezután már csak azokkal számolunk tovább. Így csökken a megoldandó egyenletek és az ismeretlenek száma is. Az utolsó lépésben már csak egy olyan egyenlet marad, amelyikben kizárólag a keresett ismeretlen szerepel, és így azt egyértelműen meghatározhatjuk.



6. Fejezzük ki például az utolsó egyenletről az I_1 -et!

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Helyettesítsük be a kapott kifejezést az összes egyenletbe, elhagyva azt, amiből a változó kifejezése történt:

$$I. \quad (I_2 + I_3) \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 - U_g = 0$$

$$II. \quad I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$$

$$I_3 = ?$$

Ezt rendezve:

$$I. \quad I_3 \cdot R_1 + I_2 \cdot (R_1 + R_2) - U_g = 0$$

$$II. \quad I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$$

$$I_3 = ?$$

Most már csak két ismeretlen maradt, és két egyenlet. Hasonlóképp járunk el, mint az előbb. Fejezzük ki mondjuk a második egyenletről az I_2 -t:

$$I_2 = \frac{I_3 \cdot R_3}{R_2}$$

és helyettesítsük be ezt az első egyenletbe, elhagyva most a másodikat:

$$I. \quad I_3 \cdot R_1 + \left(\frac{I_3 \cdot R_3}{R_2} \right) (R_1 + R_2) - U_g = 0$$

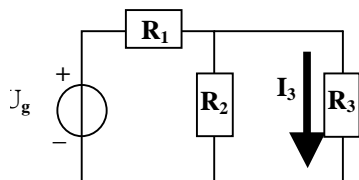
$$I_3 = ?$$

Itt már csak I_3 az ismeretlen, az egyenletet rendezzük, és I_3 -at kifejezzük:

$$I_3 \cdot R_1 + \left(\frac{I_3 \cdot R_3}{R_2} \right) (R_1 + R_2) - U_g = I_3 \cdot \left(R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} + R_3 \right) - U_g = 0$$

Ebből:

$$I_3 = \frac{U_g}{\left(R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} + R_3 \right)} = \frac{10}{\left(10^2 + \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{8 \cdot 10^3} + 4 \cdot 10^3 \right)} = 2.41 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$



7. Ezzel megkaptuk a kívánt eredményt. A kapott érték előjele pozitív, ami azt jelenti, hogy az I_3 áram becsült iránya helyes volt. Az I_3 áram az ábrán rajzolt irányba folyik, és nagysága 2.41 mA.



2.6. A bekeretezett kiindulási feladat alapján az előbb kiszámolt I_3 -at ismertnek tekintve, számítsa ki az I_1 és I_2 áramokat is. Helyesen vettük-e fel ezek irányát?

2.3. Példa. A Kirchhoff-törvények alkalmazása szakadt vezetéket és rövidzárat tartalmazó hálózatra.

Legyen adott az itt látható hálózat. Határozzuk meg az R_3 ellenálláson átfolyó I_3 áramot, ha

$$U_g = 9V, R_1 = 100\Omega, R_2 = 200\Omega, R_3 = 300\Omega, R_4 = 400\Omega, R_5 = 500\Omega, R_6 = 600\Omega !$$

0. Először a szakadt vezetékekkel kezdjük, mert ezeket az egyszerűbb észrevenni a kapcsolásban. A megértést segítve az előző feladatot lerajzoltuk még egyszer, ahol a fellépő potenciáloknak megfelelően a vezetékeket eltérő tónusokkal kiemeltük. Az egyre sötétebb színek egyre nagyobb potenciálokat jelölik.

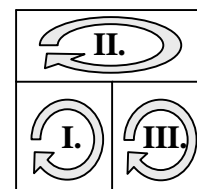
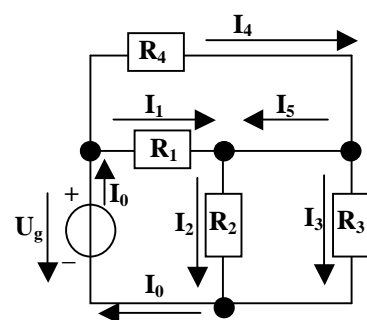
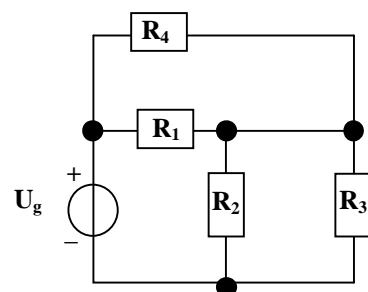
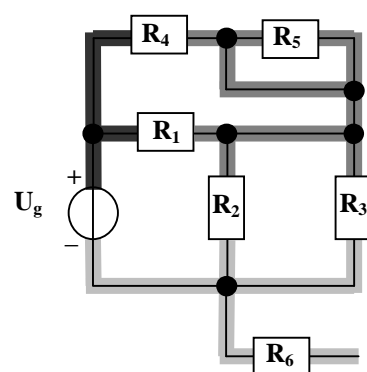
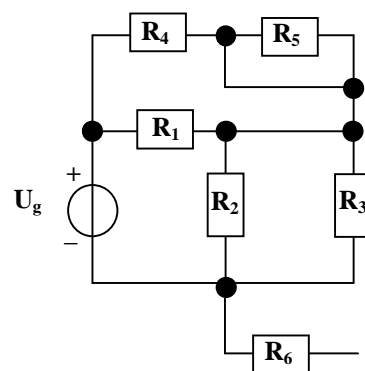
Nézzük meg jól alaposan az ábrát, és keressünk olyan ellenállásokat, amelyek egyik vége nem csatlakozik az áramkör egyik csomópontjához sem, azaz szabadon „lóg”. Ilyen jellegű ellenállás esetünkben az R_6 -os ellenállás. Ezen az elemen nem folyik áram, hiszen, mint korábban (1. fejezet) említettük, ha gázmodellben gondolkozunk, ez az áramló közeg részére „egy szűküettel ellátott zsákutcát” jelent. Mivel emiatt az alkatrész mindkét oldalán azonos potenciál lép fel, R_6 -ot el is hagyhatjuk.

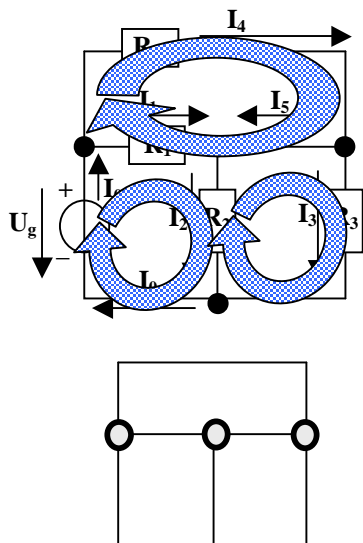
Most a rövidzáron a sor. Olyan ellenállásokat keresünk, amelyek mindkét sarka be van kötve, de ugyanaz a potenciál van mindkét kivezetésén. Ilyenkor létezik olyan útvonal, amely ugyanazt a két csomópontot ellenállás nélkül köti össze. Ilyen vezetékünk is van, mégpedig az R_5 -ös ellenállást zárja rövidre. Mivel így ennek sarkai között potenciálkülönbség nincs, (gázmodellben nyomáskülönbség), az ellenálláson nem folyik áram. Emiatt az áramkörből ez szintén elhagyható. A fölösleges alkatrészeket elhagyva az itt látható letisztult kapcsolás jelenik meg.

- 1.-2. Felvesszük az áramirányokat, szokás szerint teljesen véletlenszerűen, de lehet spekulatív módon is. Mi a két módszert vegyítve az itt látható irányokat vettük fel. (Az I_4 -ről, és I_1 -ről például elég erősen sejthető, hogy a bejelölt irányba fognak folyni, de például az I_5 -ről ránézésre fogalmunk sincs, milyen irányítottaságú lehet. Itt véletlenszerűen vettük fel az ábrán látható irányt.) A hálózatban továbbá egyetlen feszültséggenerátor található, ennek irányát pozitív és negatív sarkainak megfelelő módon szintén rögzítjük.

3. A független hurkokat, ismételten a legkisebb hurkokra bontással képezzük. Nem árt hangsúlyozni, hogy lehetne más független hurkokat is választani, de az egyszerűség és a tévesztések elkerülése, nyomós érv lehet az itt látható egyszerű módszer mellett.

Az áttekinthetőség érdekében az ábrán csak a hálózat vázát, és a választott körüjárási irányokat tüntettük fel.





4. Ránézésre látszik, hogy sokkal több ismeretlenünk van (6), mint amennyi független hurkunk (3), így ezek mindegyikét kénytelenek vagyunk felírni. Ezek rendre:

$$I. \quad I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 - U_g = 0$$

$$II. \quad I_4 \cdot R_4 - I_1 \cdot R_1 = 0$$

$$III. \quad I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$$

5. Az egyenletrendszer megoldhatóságához még három egyenletet kell felírni, amit a csomóponti törvények alkalmazásával fogunk megkapni. Látható, hogy négy csomópont van, amiből, mint tudjuk, csak három független van. Nekünk pont ez a három független kell még az egyenleteinkhez. Hogy az I_5 -ös árammal ne vessződjünk sokat, azaz könnyen kiejthessük, legalább két olyan csomópontot biztosan válasszunk, amiben szerepel. Legyen a választásunk az ábrán látható.

(az I_5 a hurokegyenletekben nem szerepel, értéke mellékes, hacsak nem pont ez a kérdés. Itt felhívom a figyelmet a hurok törvények helyes felírására. Említettük, a huroktörvények eredményei olyan egyenletek, amelyek feszültségeselek előjeles összegeiből állnak. Eszerint minden hurokegyenlet minden tagjának mértékegysége volt [V]. Az előjeles összeg tehát nem tartalmazhat Amper, vagy más mértékegységű kifejezéseket! Rengetegen el szokták rontani, például a II. hurok egyenleteinek felírásakor, hogy az I_5 -höz érve azt is felveszik az előjeles összegbe. Ez fatális hiba, kérem, legyen figyelmes és ezt mindenképp kerülje el!)

6. Az előzőleg megjelölt csomópontokra felírva a megfelelő egyenleteket, az alábbi feladatot kapjuk:

$I. \quad I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 - U_g = 0$ $II. \quad I_4 \cdot R_4 - I_1 \cdot R_1 = 0$ $III. \quad I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$ $IV. \quad I_0 - I_1 - I_4 = 0$ $V. \quad I_1 + I_5 - I_2 = 0$ $VI. \quad I_4 - I_5 - I_3 = 0$ <hr style="width: 80%; margin: 5px auto;"/> $I_3 = ?$

Az egyenletek sorszámait a továbbiakban elhagyjuk. Vegyük észre, van olyan ismeretlenünk (I_0), ami egyetlen másik egyenletben sem fordul elő. Ez az egyenlet nyilván pont ennek az ismeretlennek a kiszámítására szolgál, így amennyiben nem ezt a mennyiséget keressük, az adott sort el is hagyhatjuk.

$$I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 - U_g = 0$$

$$I_4 \cdot R_4 - I_1 \cdot R_1 = 0$$

$$I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$$

$$I_1 + I_5 - I_2 = 0$$

$$I_4 - I_5 - I_3 = 0$$

$$I_3 = ?$$

Mivel az I_5 ismét közömbös, két utolsó egyenletet összeadva végképp eltüntethetjük az egyenletrendszerből:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 - U_g &= 0 \\ I_4 \cdot R_4 - I_1 \cdot R_1 &= 0 \\ I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 &= 0 \\ \underline{I_1 + I_4 - I_2 - I_3} &= 0 \\ I_3 &= ? \end{aligned}$$

Most kiejtjük az I_4 -et. A második egyenletből fejezzük ki, és helyettesítsük be az utolsóba:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 - U_g &= 0 \\ I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 &= 0 \\ I_1 + I_1 \cdot \frac{R_1}{R_4} - I_2 - I_3 &= 0 \\ \underline{I_3} &= ? \end{aligned}$$

Most az I_2 -től szabadulunk meg. A második egyenletből kifejezve behelyettesítjük az összes többi egyenletbe:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3 - U_g &= 0 \\ I_1 + I_1 \cdot \frac{R_1}{R_4} - I_3 \cdot \frac{R_3}{R_2} - I_3 &= 0 \\ \underline{I_3} &= ? \end{aligned}$$

A második egyenletből:

$$I_1 \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R_4}\right) = I_3 \cdot \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) \Rightarrow I_1 = I_3 \cdot \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_3)}{R_2 \cdot (R_1 + R_4)}$$

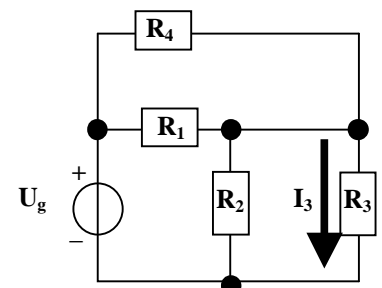
Ezt beírva az elsőbe:

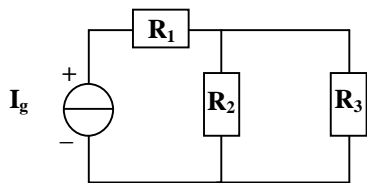
$$I_3 \cdot \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_3)}{R_2 \cdot (R_1 + R_4)} \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3 - U_g = 0$$

Ebből:

$$I_3 = \frac{U_g}{\frac{R_4 \cdot (R_2 + R_3)}{R_2 \cdot (R_1 + R_4)} \cdot R_1 + R_3} = 0.018 \text{ A}$$

7. Az áram értéke 18 mA, pozitív szám, tehát a feltételezett irány helyes.

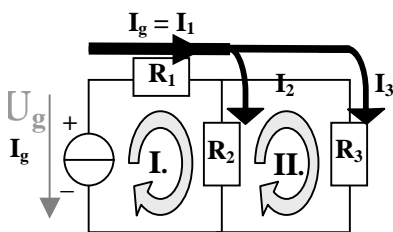
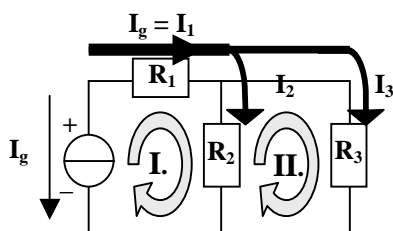
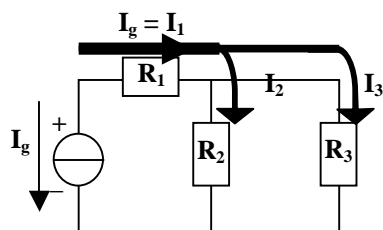




2.4. Példa. A Kirchhoff-törvények használata áramgenerátoros esetben

Határozza meg az ábrán látható áramkör I_3 áramát, ha

$$I_g = 40 \text{ mA}, R_1 = 100\Omega, R_2 = 200\Omega, R_3 = 300\Omega !$$



0. Szakadások, rövidzárak keresése. Nincsenek szakadt vezetékek, és olyan szerkezeti elemek sem, amelyek sarkait rövidzár köti össze.

1.-2. Vegyük fel az áramokat. Világos, hogy most I_g megegyezik az I_1 -el, így a továbbiakban I_g helyett is I_1 -t használjuk. A körben egyetlen áramgenerátor található, ennek irányítottága - mint azt korábban említettük, hasonlóan a feszültséggenerátorhoz, a pozitív sarkától a negatív sarka felé mutat.

3. Körüljárási irányok felvétele. A két független hurokban a szokásos módon felvesszük a körüljárási irányokat.

4.-5. Huroktörvények alkalmazása. Ennél a pontnál tennünk kell egy kis kitérőt. Tudjuk, hogy ebben a lépésben minden független hurokban előállítjuk a feszültségesések előjeles összegét. Az első hurokban viszont, egy pillanatra meglepő lehet az áramgenerátor, aminek csak az árama ismert. A megoldáshoz azt kell tudni, hogy a feszültséggenerátor és az áramgenerátor is ugyanannak az egyetlen valós hálózati elemnek, a tápegységnek az absztrakciója. Azaz, minden feszültséggenerátornak van árama, és minden áramgenerátornak van feszültsége. Ezek a mennyiségek egy adott hálózatra nézve állandóak, de kapcsolásonként különbözők lehetnek. A 2.2. feladatban ugyanezt a kört vizsgáltuk, csak ott feszültséggenerátor volt adott. A feszültséget ismertük, ám az I_1 -áramot nem, ami a generátor árama volt. Most egy áramgenerátorunk van, és bizonyára van egy ismeretlen U_g generátorfeszültség is, ami a generátort jellemzi. Vegyük hát fel ezt a feszültséget olyan szellemben, mint ahogy előzőleg az I_1 -et felvettük: jelöljük be az ábrába, és adjunk neki valamilyen irányt is! Mi most az áramgenerátorral egyező irányba vettük fel ezt az irányt, az U_g mennyiséget szürkével tüntettük fel. Írjuk fel a hurkokra a rájuk vonatkozó egyenleteket, és a 2.1. feladathoz hasonlóan alkalmazzuk a csomóponti törvényeket is. Eredményül az alábbi feladatot kapjuk:

I.	$I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 - U_g = 0$
II.	$I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$
III.	$I_1 - I_2 - I_3 = 0$
	<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>
	$I_3 = ?$

A feladat formailag teljesen megegyezik a 2.2. feladat összefüggéseivel, az egyetlen különbség mindössze az, hogy most az U_g ismeretlen, ám cserébe ismerjük a generátor áramát (I_1). Három egyenlet, három ismeretlen, az egyenletrendszer ismét megoldható.

6. Az egyenletrendszer megoldása. Most is feltűnhet, hogy az első egyenletben szereplő U_g egyetlen másik egyenletben sem szerepel, tehát ez a sor csak a generátor feszültségének kiszámítására alkalmas. Nekünk az I_3 kell, s mivel I_1 -et ismerjük elég csak a két utolsó egyenletet használni.

$$I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$$

$$\frac{I_1 - I_2 - I_3 = 0}{I_3 = ?}$$

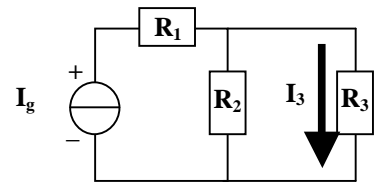
A másodikból kifejezve I_2 -t és behelyettesítve az elsőbe:

$$I_3 \cdot R_3 - (I_1 - I_3) \cdot R_2 = 0$$

Ahonnán:

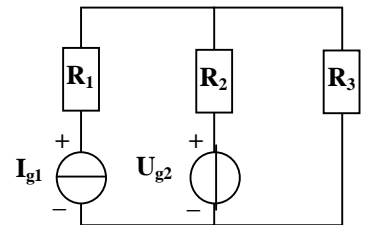
$$I_3 = \frac{I_1 \cdot R_2}{R_3 + R_2} = \frac{0.04 \cdot 200}{500} = 0.016 \text{ A}$$

7. Az eredmény tehát az, hogy az R_3 ellenálláson 16 mA nagyságú áram folyik át, melynek iránya megegyezik a megsejtett iránnyal.



2.5. Példa. A Kirchhoff-törvények használata többgenerátoros esetben.

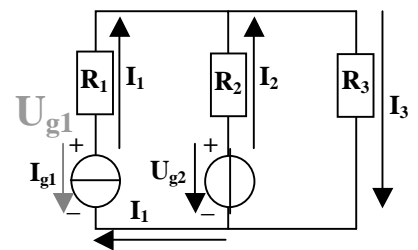
Határozza meg az ábrán látható áramkör I_3 áramát, ha $I_{g1}=40 \text{ mA}$, $U_{g2}=4 \text{ V}$, $R_1=100\Omega$, $R_2=200\Omega$, $R_3=300\Omega$!



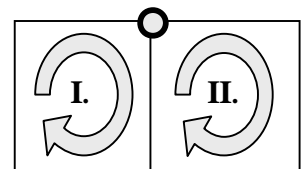
1. Szakadások, rövidzárak keresése. Nincsenek szakadt vezetékek, és olyan szerkezeti elemek sem, amelyek sarkait rövidzár köti össze.

1.-2. Vegyük fel az ágáramokat. Világos, hogy most I_{g1} -et ismerjük, ez megegyezik az I_1 -el, az I_{g2} -t viszont nem, amit viszont a továbbiakban I_2 -vel jelölünk. A feszültségekkel pont fordított a helyzet, U_{g2} -t ismerjük, és U_{g1} -et nem. Jelöljük be az ismeretlen mennyiségeket, és vegyünk fel hozzájuk irányokat is!

3. Körüljárási irányok felvétele. A két független hurokban a szokásos módon vesszük fel a körüljárási irányokat.



4.-5. Huroktörvények alkalmazása. Az első hurokban az előzőhöz hasonlóan járunk el, mint az előző példában, a hurkot körbe járva az áramgenerátor feltételezhető feszültségét is felvesszük az összegbe. A második hurkot pedig a 2.1. -es példa alapján képezhetjük. Mivel U_{g1} , I_2 ($=I_{g2}$), I_3 ismeretlenek, ismét szükség lesz a csomóponti törvényekre is. A körüljárási irányok mellé a kiválasztott csomópontot is bejelöljük. A kapott egyenletrendszer a következő feladatot alkotja:



$$\begin{array}{l}
 I. \quad I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 + U_{g2} - U_{g1} = 0 \\
 II. \quad I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 - U_{g2} = 0 \\
 III. \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\
 \hline
 I_3 = ?
 \end{array}$$

6. Oldjuk meg most ezt az egyenletrendszer! Vegyük észre, hogy U_{g1} ismeretlen és csak az első egyenlet tartalmazza. Ez, - mint korábban is láttuk - annyit jelent, hogy az első egyenlet egyedül ennek az értéknek a meghatározására szolgál. Mivel U_{g1} értéke számunkra most közömbös, az első egyenletet el is hagyhatjuk:

$$\begin{array}{l}
 I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 - U_{g2} = 0 \\
 I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\
 \hline
 I_3 = ?
 \end{array}$$

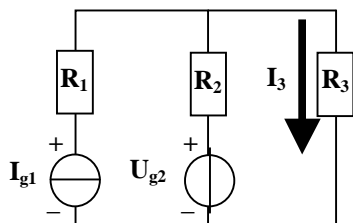
Fejezzük most ki az I_2 -t a második egyenletből, és helyettesítsük be az elsőbe:

$$\begin{array}{l}
 (I_3 - I_1) \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 - U_{g2} = 0 \\
 \hline
 I_3 = ?
 \end{array}$$

Ebből:

$$I_3 = \frac{I_1 \cdot R_2 + U_{g2}}{R_2 + R_3} = 0.024 \text{ A}$$

7. Kaptuk, hogy a kétgenerátoros hálózat R_3 -as ellenállásán átfolyó áram nagysága 24 mA, iránya pedig megegyezik a megsejtett iránnyal.



2.7. Nézze meg alaposan a kiindulási áramkört. Az első generátor árama 40 mA és mivel az áram a generátor pozitív sarka felől folyik a negatív sarka felé, az ábrán felfelé mutató irányítottágú. A második generátor árama ismeretlen, de az előbbi elv alapján annak árama is feltehetően felfelé irányított. Mindkét generátor tehát ugyanazon az R_3 -as ellenálláson keresztül azonos irányba termeli az áramot.

Hogy lehet ezek után az, hogy az R_3 -on mégis csak 24 mA nagyságú áram folyik? Hová tűnik a többi áram?

A megoldáshoz gondolja végig azt, amit az első tanulási egységben a generátorok belső ellenállásáról olvasott! Ezek után számítsa ki I_2 -t!

Fogalmazza meg, mit jelentenek eredményei!

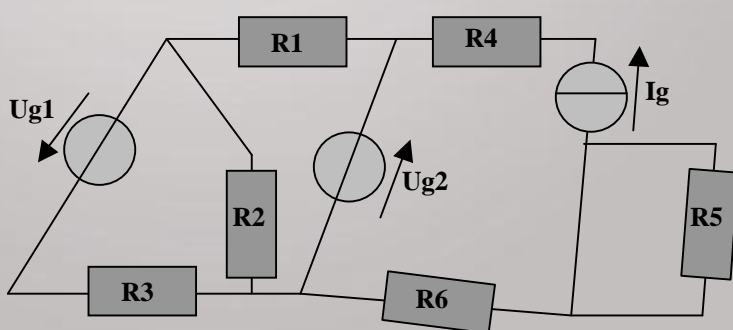
A fejezet végén beküldendő nagyfeladat



2.1. Feladat

Határozza meg a következő ábrán látható egyenáramú hálózat I_2 áramát (Ez az R2-n folyó áram)! A megoldáshoz a Kirchhoff-törvényeket használja!

A beküldendő feladat megoldását, rajzait A4-es fehér lapra készítse el. Számítógéppel szerkesztett megoldásokat nem áll módunkban elfogadni! Megoldásához mellékelje piszkozatait, esetleges észrevételeit, kérdéseit is!



$R1 = 1 \text{ k}\Omega$
$R2 = 2 \text{ k}\Omega$
$R3 = 1.5 \text{ k}\Omega$
$R4 = 200 \Omega$
$R5 = 5 \text{ k}\Omega$
$R6 = 50 \Omega$
$U_{g1} = 10 \text{ V}$
$U_{g2} = 4 \text{ V}$
$I_g = 20 \text{ mA}$



2.2. Feladat

Állítson össze egy legalább 3 független hurokból álló feladatot, és oldja is meg!

Érdeemes a feladatokat úgy megtervezni, hogy egyik generátor egyik sarkából se juthassunk egy másik generátor egyik sarkába sem ellenállás érintése nélkül. Legyenek a kapcsolásban olyan ágak is, amelyekben egyáltalán nincsenek generátorok!



ZH gyanús kérdések

Ellenőrizze tudását az alábbi kérdések megválaszolásával! A gondolatait egy üres papírra írja le, és ellenőrizze le a könyv végén található melléklet alapján! Ha az összes kérdésre hibátlanul tudja a választ, a tárgyalt feladatokat pedig önállóan, jegyzet nélkül is meg tudja oldani, akkor nem lesz problémája a vizsgán sem.

- Mondja ki helyesen Kirchhoff csomóponti törvényét!
- Mondja ki helyesen Kirchhoff huroktörvényét!
- Mit tesz, ha az analizálandó körben szakadt vezetékre akad?
- Mit tesz, ha az analizálandó körben rövidzárat fedez fel?
- Mit jelent az, hogy N db független hurkunk van?
- Ha k db. csomópontunk van, ezekből hány független?
- A körüljárási iránynak milyen irányúnak kell mindig lennie?
- Mit jelent, ha a kiszámolt áramérték negatív?
- Hogyan jár el, ha az adott hálózatban egy adott ellenálláson nem az átfolyó áramot akarja kiszámolni, hanem a rajta eső feszültséget?
- Mit tesz, ha egy feladatban áramgenerátorral találkozik?
- Elképzelhető-e olyan feladat, ahol az egyik csomópontba húsznál több vezeték fut be?
- Elképzelhető-e olyan feladat, hogy az áramirányokat felvéve olyan csomópont adódik, ahová minden áram befelé fut?
- Lehet-e a huroktörvények alapján felírt egyenletekben Amper mértékegységű tag?
- Sorolja el a Kirchhoff-analízis főbb lépéseit (7db)!



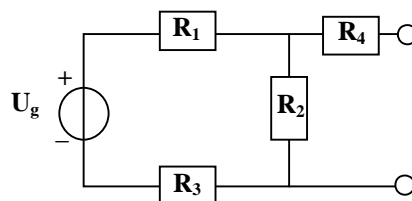
Írjon fel most Ön kérdéseket! Az alábbiakban soroljon fel olyan 10 kérdést, amelyeket Ön megkérdezne valakitől az anyaggal kapcsolatban! Ha nem jut eszébe elegendő, bátran lapozzon vissza! Ha éppen ismételi, a saját kérdéseire se felejtse el válaszolni!

ZH gyanús feladatok

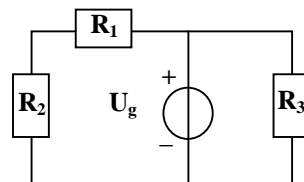
Oldja meg a következő feladatokat! Miután elkészült ellenőrizze eredményeit a mellékletben!



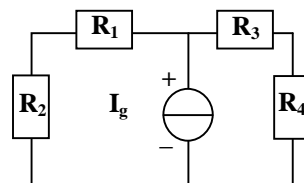
1. Adott az itt látható egyszerű hálózat. Számítsuk ki az R_2 ellenálláson folyó áramot, ha $U_g=5V$, $R_1=50W$, $R_2=150W$, $R_3=300W$, $R_4=400W$!



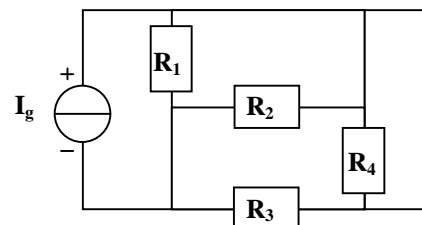
2. Adott az itt látható hálózat. Számítsuk ki az R_1 ellenálláson eső feszültséget, ha $U_g=10V$, $R_1=100W$, $R_2=200W$, $R_3=300W$!



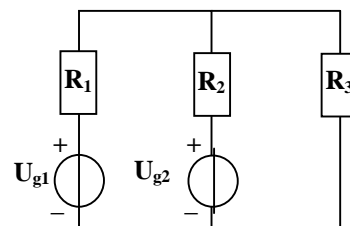
3. Adott az itt látható hálózat. Számítsuk ki az R_2 áramát, ha $I_g=10mA$, $R_1=100W$, $R_2=200W$, $R_3=300W$, $R_4=400W$!



4. Adott az itt látható hálózat. Számítsuk ki az R_2 áramát, ha $I_g=40mA$, $R_1=100W$, $R_2=200W$, $R_3=300W$, $R_4=400W$!



5. Adott az itt látható hálózat. Számítsuk ki az R_3 áramát, ha $U_{g1}=4V$, $U_{g2}=8V$, $R_1=100W$, $R_2=200W$, $R_3=300W$, $R_4=400W$!



5. Adott az itt látható hálózat. Számítsuk ki az R_3 áramát, ha $U_{g1}=4V$, $I_{g2}=10mA$, $R_1=100W$, $R_2=200W$, $R_3=300W$, $R_4=400W$!

